

第3章「2次関数」第1節 2次関数とグラフ 補充問題

1 関数 $y = ax + b$ ($-1 \leq x \leq 5$) の値域が、 $1 \leq y \leq 13$ となるような定数 a, b の値を求めよ。2 次の2次関数のグラフをかけ。また、その頂点と軸を求めよ。
ただし、 $a < 0$ とする。

解答 $a = -2, b = 11$

解説

$a < 0$ より、この関数のグラフは右下がりの直線の一部である。

よって、 $f(x) = ax + b$ とすると、値域は

$$f(5) \leq y \leq f(-1) \quad \text{すなわち} \quad 5a + b \leq y \leq -a + b$$

これが $1 \leq y \leq 13$ と一致するから

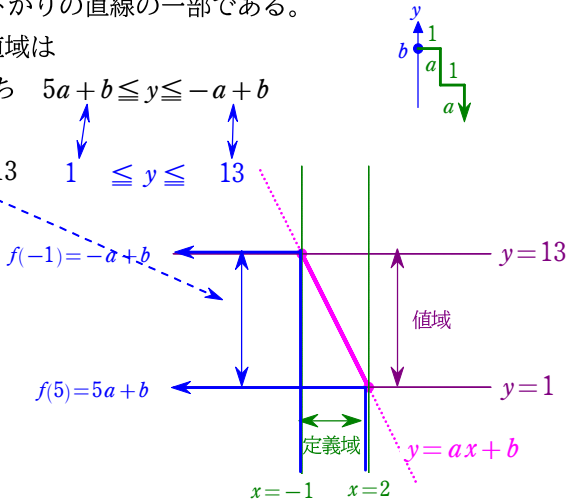
$$5a + b = 1, \quad -a + b = 13$$

これを解いて $a = -2, b = 11$

これは $a < 0$ を満たす。

これは書くこと

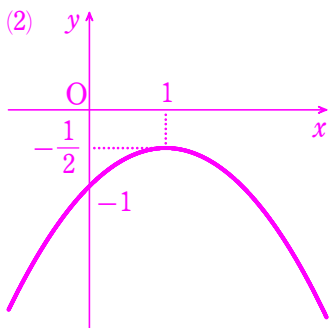
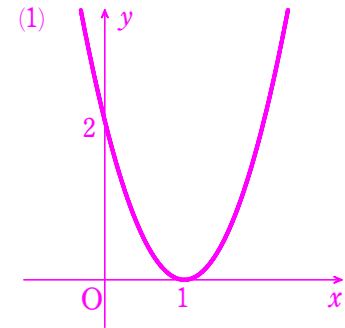
$$\begin{array}{rcl} 5a + b & = & 1 \\ -) -a + b & = & 13 \\ \hline 6a & = & -12 \end{array}$$



- (1) $y = 2x^2 - 4x + 2$ (2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$
(3) $y = (x - 1)(x - 2)$ (4) $y = (2x - 1)(x + 3)$

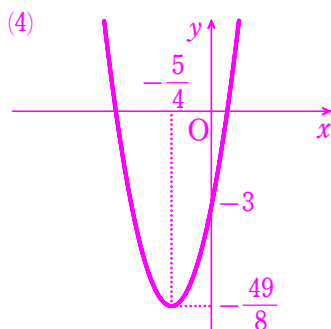
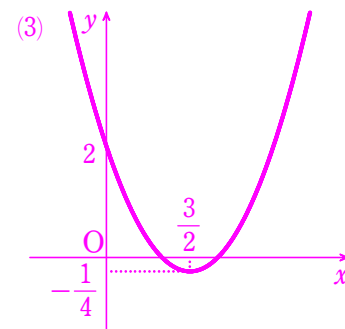
解答 (1) [図], 頂点は点 $(1, 0)$, 軸は直線 $x = 1$

(2) [図], 頂点は点 $(1, -\frac{1}{2})$, 軸は直線 $x = 1$



(3) [図], 頂点は点 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$, 軸は直線 $x = \frac{3}{2}$

(4) [図], 頂点は点 $(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8})$, 軸は直線 $x = -\frac{5}{4}$



解説

(1) $2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x) + 2$ -2 の半分は -1

$$= 2\{(x - 1)^2 - 1^2\} + 2 = 2(x - 1)^2 - 2 \cdot 1^2 + 2 = 2(x - 1)^2$$

よって $y = 2(x - 1)^2$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

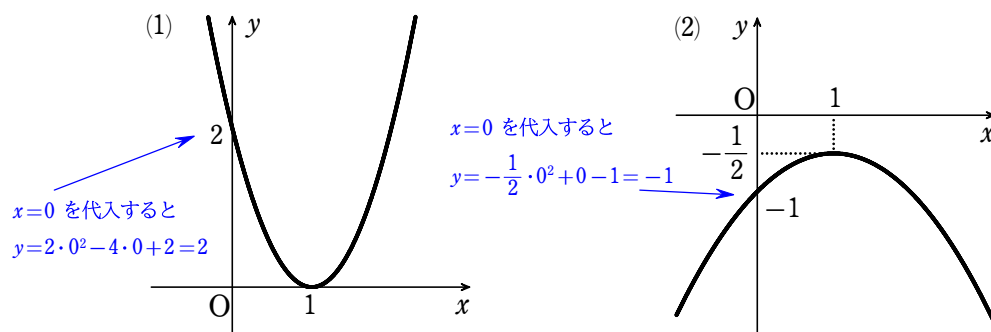
その頂点は点 $(1, 0)$ ，軸は直線 $x=1$ である。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x) - 1 && -\frac{1}{2}x^2 + x = -\frac{1}{2} \times x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2x) \\
 &&& -2 \text{ の半分は } -1 \\
 &&& = -\frac{1}{2} \times \{x^2 + (-2x)\} \\
 &= -\frac{1}{2}\{(x-1)^2 - 1^2\} - 1 \\
 &= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 \\
 &= -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

よって $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $(1, -\frac{1}{2})$ ，軸は直線 $x=1$ である。



$$\begin{aligned}
 (3) \quad (x-1)(x-2) &= x^2 - 3x + 2 && (x-A)(x-B) = x^2 - (A+B)x + AB \\
 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 && -3 \text{ の半分は } -\frac{3}{2} \\
 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

よって $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ ，軸は直線 $x=\frac{3}{2}$ である。

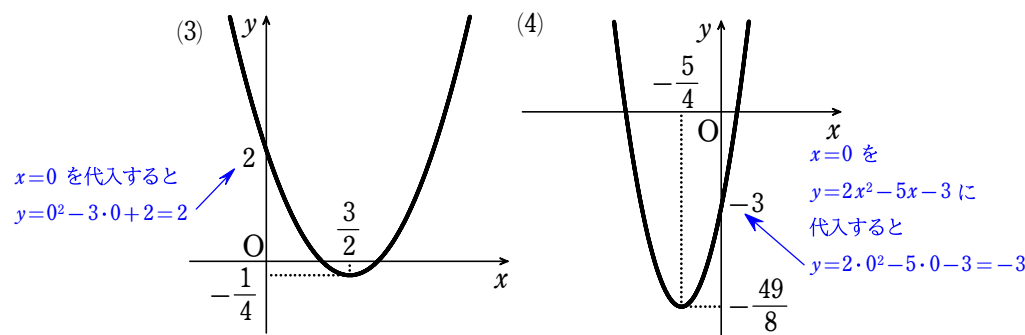
$$\begin{aligned}
 (4) \quad (2x-1)(x+3) &= 2 \cdot 1 \cdot x^2 + \{2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1\}x + (-1) \cdot 3 && (Ax+B)(Cx+D) \\
 &= 2x^2 + 5x - 3 && = ACx^2 + (AD+BC)x + BD \\
 &= 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) - 3 && +\frac{5}{2} \text{ の半分は } +\frac{5}{2} \div 2 = +\frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = +\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\left\{\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right\} - 3 \\
 &= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 3 \\
 &= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} - \frac{24}{8} = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}
 \end{aligned}$$

よって $y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $(-\frac{5}{4}, -\frac{49}{8})$ ，軸は直線 $x=-\frac{5}{4}$ である。



3 放物線 $y=2x^2-4x-1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) この放物線の頂点の座標を求めよ。
- (2) この放物線を、 x 軸方向に 2、 y 軸方向に -1 だけ平行移動したとき、移動後の放物線の方程式を求めよ。

【解答】 (1) $(1, -3)$ (2) $y=2(x-3)^2-4$

【解説】

$$(1) \quad 2x^2-4x-1 = 2(x^2-2x)-1 \quad -2 \text{ の半分は } -1$$

$$= 2\{(x-1)^2-1^2\}-1$$

$$= 2(x-1)^2-2 \cdot 1^2-1$$

$$= 2(x-1)^2-3$$

よって $y=2(x-1)^2-3$

したがって、頂点の座標は $(1, -3)$

(2) 移動後の放物線の頂点の座標は、

点 $(1, -3)$ を x 軸方向に 2、

y 軸方向に -1 だけ平行移動するので、

$$(1+2, -3-1) \quad \text{すなわち} \quad (3, -4)$$

平行移動しても x^2 の係数は変わらないので

$$\text{求める放物線の方程式は} \quad y=2(x-3)^2-4$$

【別解】 (2)

2 次関数 $y=2x^2-4x-1$ のグラフを、

x 軸方向に 2、 y 軸方向に -1 だけ平行移動するので、

移動後の放物線の方程式は

$$y-(-1)=2(x-2)^2-4(x-2)-1$$

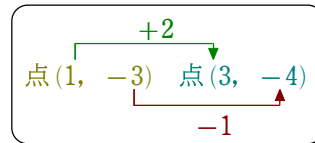
計算すると

$$y+1=2(x^2-4x+4)-4(x-2)-1$$

$$y = 2x^2-8x+8-4x+8-1-1$$

$$\text{すなわち} \quad y=2x^2-12x+14$$

【終】



平行移動の公式

$$\begin{array}{ccc} y & = & f(x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ y-q & & x-p \end{array} \quad \text{符号注意}$$

$$\begin{array}{ccccc} y & = & 2x^2 & - & 4x & - & 1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ y-(-1) & & x-2 & & x-2 & & \end{array}$$

グラフを平行移動させるだけなら、この公式が一番早い