

第3章「2次関数」第1節 2次関数とグラフ 2 2次関数のグラフ

2次関数 $y = x^2$ のグラフは、右の図のような曲線になる。このグラフは、点 (x, x^2) を多くとっていくと得られる。ここでは、まず2次関数 $y = ax^2$ のグラフを調べ、それをもとにいろいろな2次関数のグラフについて調べていこう。



まずは放物線を目で見よう

< 2次関数 $y = ax^2$ のグラフ >

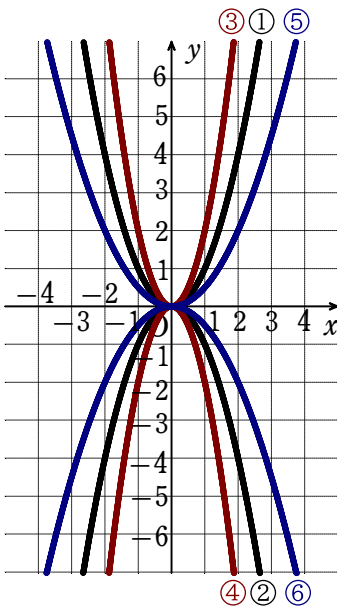
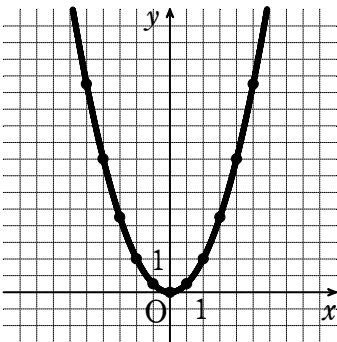
2次関数

- ① $y = x^2$
- ② $y = -x^2$
- ③ $y = 2x^2$
- ④ $y = -2x^2$
- ⑤ $y = \frac{1}{2}x^2$
- ⑥ $y = -\frac{1}{2}x^2$

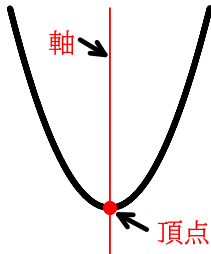
のグラフは、それぞれ右の図のような曲線になる。

2次関数 $y = ax^2$ のグラフには、次のような特徴がある。

- 1. 原点を通り、y軸に関して対称な曲線である。
- 2. $a > 0$ のとき、上に開いている。
 $a < 0$ のとき、下に開いている。

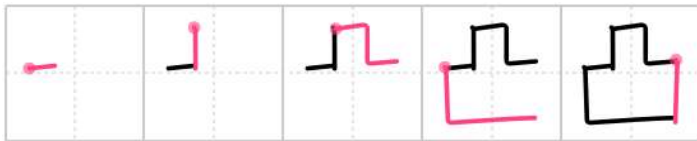


2次関数 $y = ax^2$ のグラフの形の曲線を **放物線** という。放物線は限りなくのびた曲線であり、対称の軸をもつ。その対称の軸を放物線の **軸** といい、軸と放物線の交点を放物線の **頂点** という。
山のでっぺんか谷の底を頂点という



上に開いた形の放物線は **下に凸** であるといい、
下に開いた形の放物線は **上に凸** であるという。

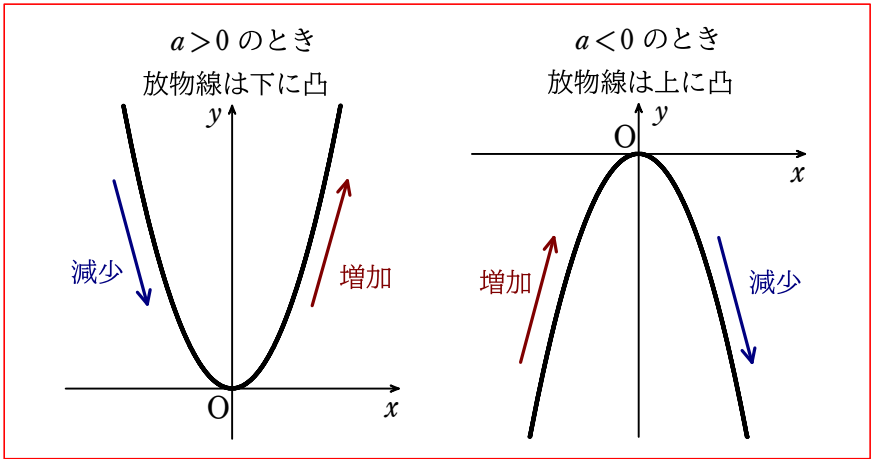
上に凸...上に向かって尖っている



(<http://kakijun.com/c/51f8.html>)

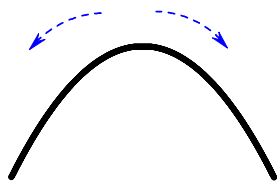
2次関数 $y = ax^2$ において、 x の値が増加するとき、 y の値の変化については、次のことがいえる。

- $a > 0$ のとき、 $x = 0$ の前後で 減少 から 増加 に変わる。
- $a < 0$ のとき、 $x = 0$ の前後で 増加 から 減少 に変わる。



参考

放物線は上から下を書くとき綺麗にかけます。
下に凸の放物線もノートをひっくり返して上から下になるよう書くと綺麗です。



練習 5 次の2次関数のグラフをかけ。また、その放物線は上に凸、下に凸のどちらであるか。

(1) $y=3x^2$

(2) $y=-3x^2$

(3) $y=\frac{1}{3}x^2$

(4) $y=-\frac{1}{3}x^2$

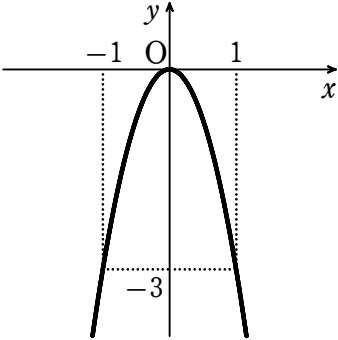
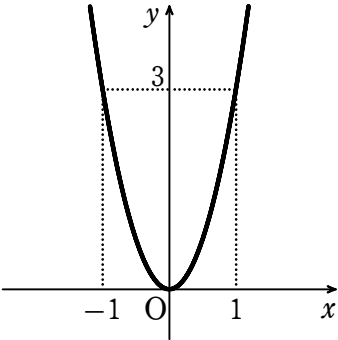
頂点の他にもう1点書き込む(大体の場合で $x=1$ と $x=-1$ のとき)。

グラフから式を復元できる材料が書き込まれていることが大事。

- 解答

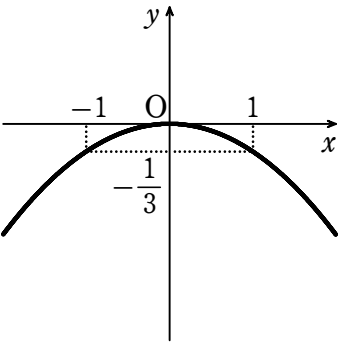
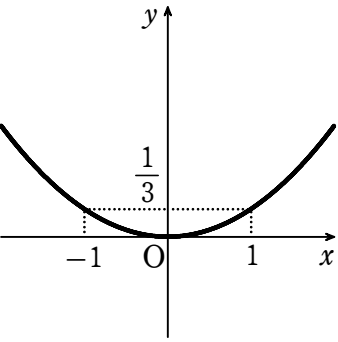
(1) グラフは下の図のようになる。
放物線は下に凸。

(2) グラフは下の図のようになる。
放物線は上に凸。



- (3) グラフは下の図のようになる。
放物線は下に凸。

(4) グラフは下の図のようになる。
放物線は上に凸。



2次関数 $y=ax^2$ のグラフについてまとめると、次のようになる。

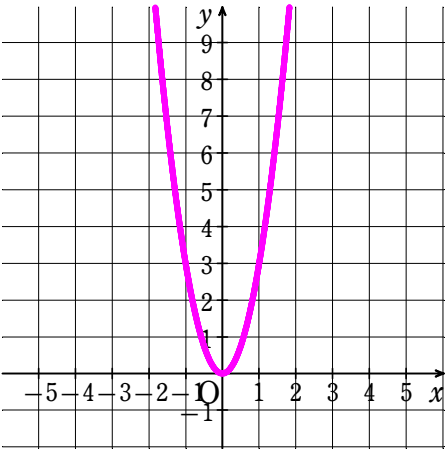
2次関数 $y=ax^2$ のグラフ

グラフは放物線で、軸は y 軸、頂点は原点である。
 $a>0$ のとき 下に凸 $a<0$ のとき 上に凸

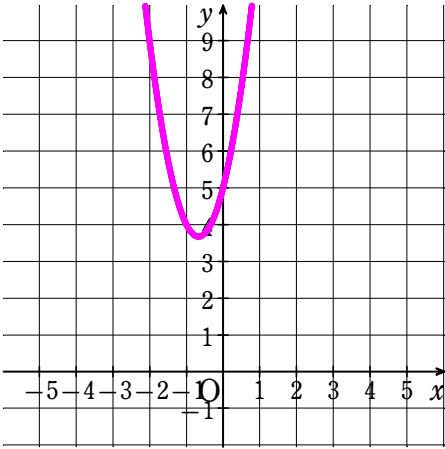
研究 2次関数 $y=ax^2$ のグラフの開き具合は、 a の値によってどのように変化するか説明してみよう。 |a| が大きくなるほど、開き具合は小さくなる

参考

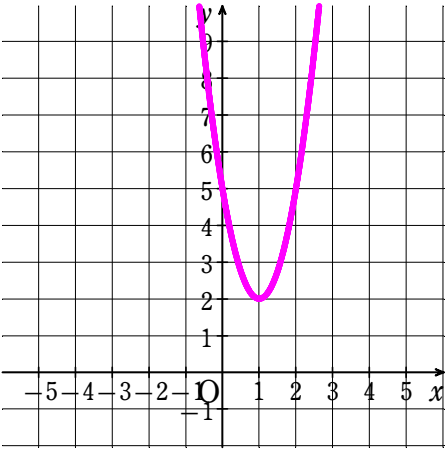
$y=3x^2$ のグラフ



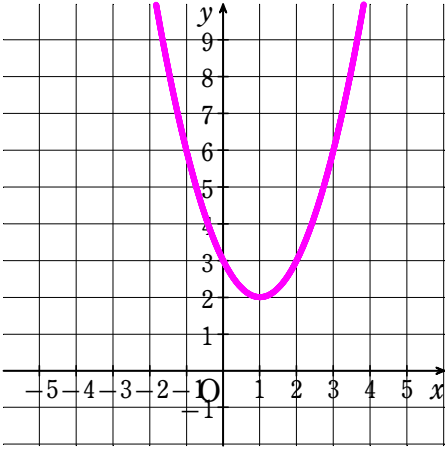
$y=3x^2+4x+5$ のグラフ



$y=3(x-1)^2+2$ のグラフ



$y=(x-1)^2+2$ のグラフ



x^2 の係数が同じなら、グラフの現れる場所は変わるが形は変わらない

< 2 次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフ >

次の 2 つの 2 次関数のグラフの関係を調べてみよう。

$$y = 2x^2, \quad y = 2x^2 + 1$$

2 つの関数の値を比べると、右の表のように、 x のどの値についても、それに対応する $2x^2 + 1$ の値は $2x^2$ の値より 1 だけ大きい。

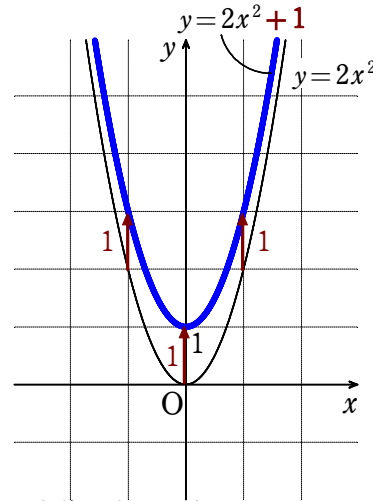
x	...	-2	-1	0	1	2	...
$2x^2$	...	8	2	0	2	8	...
$2x^2 + 1$	...	9	3	1	3	9	...

よって、 $y = 2x^2 + 1$ のグラフ上の各点は、 $y = 2x^2$ のグラフ上の各点を、

y 軸方向に 1 だけ移動したもの

になっている。したがって、 $y = 2x^2 + 1$ のグラフは右の図のようになる。

その頂点は点 $(0, 1)$ 、軸は y 軸である。



注意 「 y 軸方向に」とは「 y 軸の正の向きに」ということである。負の向きへの移動は、「 y 軸方向 -1」などと表す。

平面上で、図形上の各点を一定の向きに、一定の距離だけ動かすことを、**平行移動** という。

一般に、次のことがいえる。

2 次関数 $y = ax^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、点 $(0, q)$ が頂点となるように平行移動した放物線である。その軸は y 軸である。

後で説明がでますが、
 y 軸を「直線 $x = 0$ 」としてもよい。

手順

1. x 軸、 y 軸、原点 O を書く
2. 頂点の場所を式から読み取る
3. x^2 の係数から放物線が上に凸か下に凸か考える。
4. 頂点の他に通る点を書き込み、そこを通るように放物線を書く。

$y = ax^2 + q$ のグラフの形は、
 $+q$ の部分を手で隠したグラフと同じ形になる



練習 6 次の 2 次関数のグラフをかけ。また、その頂点と軸を求めよ。

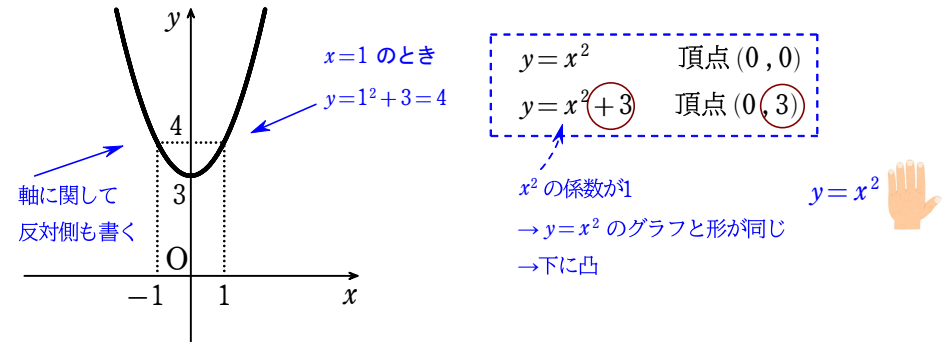
(1) $y = x^2 + 3$

(2) $y = 2x^2 - 1$

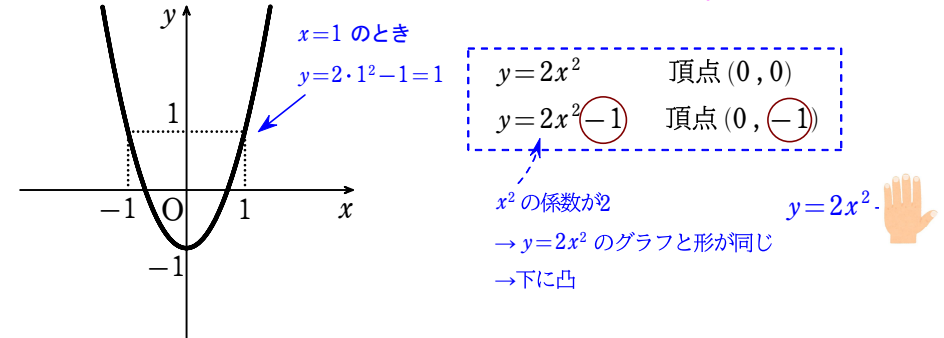
(3) $y = -x^2 - 2$

解答

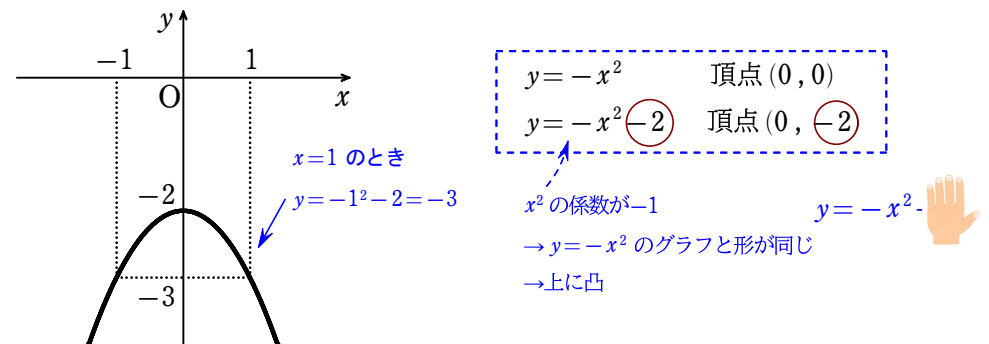
(1) グラフは下の図のようになる。頂点は点 $(0, 3)$ 、軸は y 軸。



(2) グラフは下の図のようになる。頂点は点 $(0, -1)$ 、軸は y 軸。



(3) グラフは下の図のようになる。頂点は点 $(0, -2)$ 、軸は y 軸。



< 2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフ >

次の 2 つの 2 次関数のグラフの関係を調べてみよう。

$$y=2x^2, \quad y=2(x-3)^2$$

2 つの関数の値を比べると、次のような表ができる。

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$2x^2$	...	8	2	0	2	8	18	32	50	...
$2(x-3)^2$	...	50	32	18	8	2	0	2	8	...

この表において、 $2(x-3)^2$ の段の値は、 $2x^2$ の段の値を右へ 3 だけずらしたものになっている。

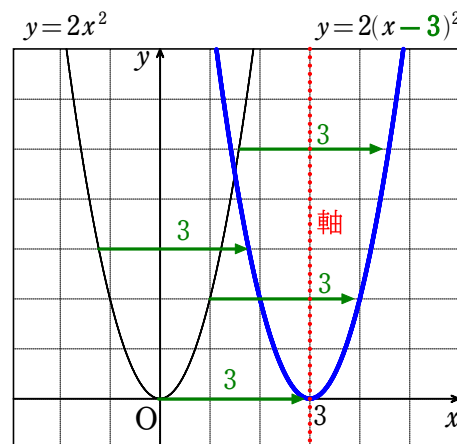
よって、 $y=2(x-3)^2$ のグラフは、 $y=2x^2$ のグラフを、

x 軸方向に 3 だけ平行移動したもの
であることがわかる。

したがって、 $y=2(x-3)^2$ のグラフは、右の図のようになる。

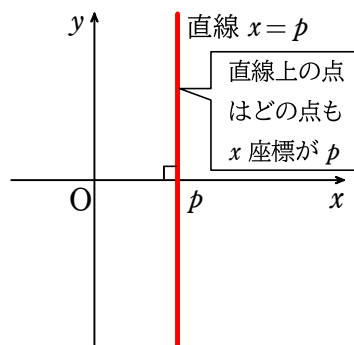
その頂点は点 (3, 0) である。

また、その軸は、点 (3, 0) を通り
 y 軸に平行な直線 $x=3$ である。



注意 点 $(p, 0)$ を通り y 軸に平行な直線を、
直線 $x=p$ という。

「 x 座標が p の人！」と声をかけると、
点 $(1, 0), (1, 1), (1, 2), \dots$ という座標の人が手をあげる。
つまり、 y 軸に平行に手があがっていく。



次の 2 つの 2 次関数のグラフの関係はどうだろうか。

$$y=2x^2, \quad y=2(x+3)^2$$

前ページと同様な表を作ると、次のようになる。

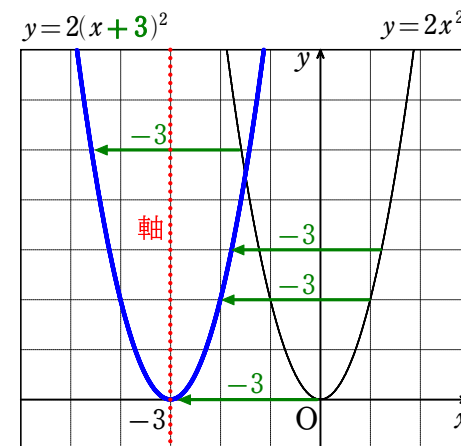
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
$2x^2$	...	50	32	18	8	2	0	2	8	...
$2(x+3)^2$	...	8	2	0	2	8	18	32	50	...

この表において、 $2(x+3)^2$ の段の値は、 $2x^2$ の段の値を左へ 3 だけずらしたものになっている。

したがって、 $y=2(x+3)^2$ のグラフは、 $y=2x^2$ のグラフを、

x 軸方向に -3 だけ平行移動したもの
であり、右の図のようになる。

その頂点は点 (-3, 0) であり、
軸は直線 $x=-3$ である。



一般に、次のことがいえる。

2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは、 $y=ax^2$ のグラフを、
点 $(p, 0)$ が頂点となるように平行移動した放物線である。
その軸は直線 $x=p$ である。

注意 $y=2(x+3)^2$ は、 $y=2[x-(-3)]^2$ と考えればよい。

参考 横方向は動かす方向を間違える人が多いです。 y が 0 になる場所が原点からどこに動いたか考えると分かりやすいです。

例えば $y=(x-3)^2$ について y が 0 になるのは $y=(3-3)^2$ より $x=3$ のときです。

だから、 $y=x^2$ を $y=(x-3)^2$ に重ねるためには、 $(0, 0)$ を $(3, 0)$ に重ねる動きが必要なので、 x 軸方向に 3 だけ平行移動します。

$y=(x+3)^2$ について y が 0 になるのは $y=(-3+3)^2$ より $x=-3$ のときです。

だから、 $y=x^2$ を $y=(x+3)^2$ に重ねるためには、 x 軸方向に -3 だけ平行移動します。

手順

1. x 軸, y 軸, 原点 O を書く
2. 頂点の場所を式から読み取る
3. x^2 の係数から放物線が上に凸か下に凸か考える。
4. 頂点の他に通る点(今回は y 軸との交点)を書き込み, そこを通るように放物線を書く。

x に 0 を代入すれば求められる。
また, 軸に関して $x=0$ と対称な場所も同じ y 座標になるので, そこも書き込む。

$y=a(x-p)^2$ のグラフの形は,

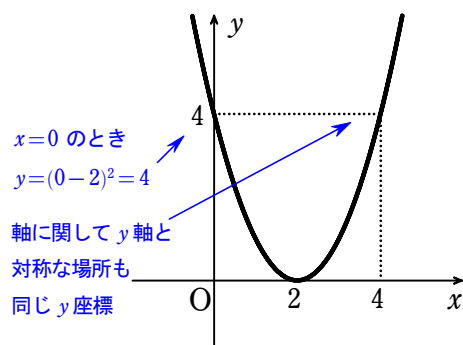
かつこの中を x に書き換えたグラフと同じ形になる

$$y=a(\cdot \text{X} b)^2 \rightarrow y=ax^2$$

練習 7 次の 2 次関数のグラフをかけ。また, その頂点と軸を求めよ。

- (1) $y=(x-2)^2$
- (2) $y=2(x+1)^2$
- (3) $y=-(x-3)^2$
- (4) $y=-2(x+2)^2$

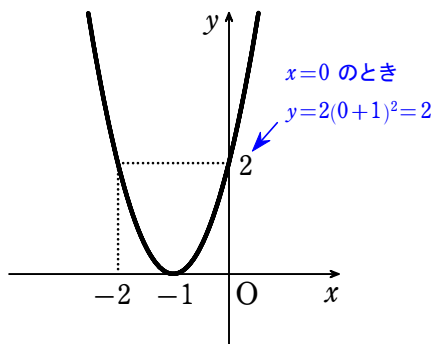
【解答】(1) グラフは下の図のようになる。頂点は点 $(2, 0)$, 軸は直線 $x=2$



$$\begin{aligned} y &= x^2 && \text{頂点 } (0, 0) \\ y &= (x-2)^2 && \text{頂点 } (2, 0) \quad x=2 \text{ で } y=0 \\ &&& x^2 \text{ の係数が } 1 \\ &&& \rightarrow y=x^2 \text{ のグラフと形が同じ} \\ &&& \rightarrow \text{下に凸} \end{aligned}$$

$$y=(\cdot \text{X} 2)^2 \rightarrow y=x^2$$

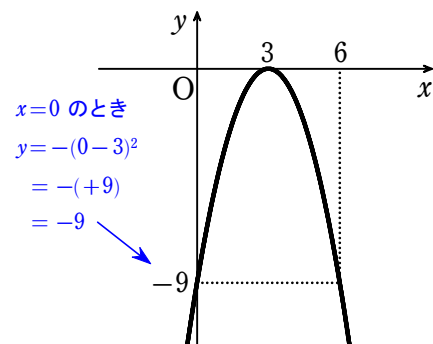
(2) グラフは下の図のようになる。頂点は点 $(-1, 0)$, 軸は直線 $x=-1$



$$\begin{aligned} y &= 2x^2 && \text{頂点 } (0, 0) \\ y &= 2(x+1)^2 && \text{頂点 } (-1, 0) \quad x=-1 \text{ で } y=0 \\ &&& x^2 \text{ の係数が } 2 \\ &&& \rightarrow y=2x^2 \text{ のグラフと形が同じ} \\ &&& \rightarrow \text{下に凸} \end{aligned}$$

$$y=2(\cdot \text{X} \cdot)^2 \rightarrow y=2x^2$$

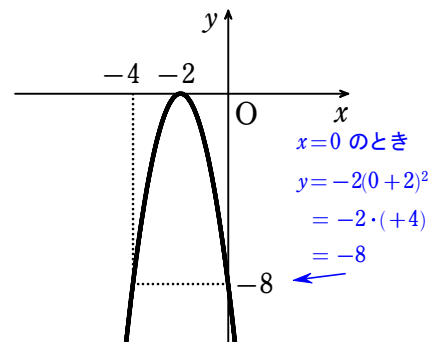
(3) グラフは下の図のようになる。頂点は点 $(3, 0)$, 軸は直線 $x=3$



$$\begin{aligned} y &= -x^2 && \text{頂点 } (0, 0) \\ y &= -(x-3)^2 && \text{頂点 } (3, 0) \quad x=3 \text{ で } y=0 \\ &&& x^2 \text{ の係数が } -1 \\ &&& \rightarrow y=-x^2 \text{ のグラフと形が同じ} \\ &&& \rightarrow \text{上に凸} \end{aligned}$$

$$y=-(\cdot \text{X} 3)^2 \rightarrow y=-x^2$$

(4) グラフは下の図のようになる。頂点は点 $(-2, 0)$, 軸は直線 $x=-2$



$$\begin{aligned} y &= -2x^2 && \text{頂点 } (0, 0) \\ y &= -2(x+2)^2 && \text{頂点 } (-2, 0) \quad x=-2 \text{ で } y=0 \\ &&& x^2 \text{ の係数が } -2 \\ &&& \rightarrow y=-2x^2 \text{ のグラフと形が同じ} \\ &&& \rightarrow \text{上に凸} \end{aligned}$$

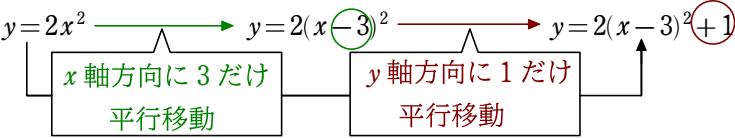
$$y=-2(\cdot \text{X} \cdot)^2 \rightarrow y=-2x^2$$

< 2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ >

これまでに調べたことから、 $y = a(x - p)^2 + q$ の形で表される 2 次関数のグラフをかくことができる。

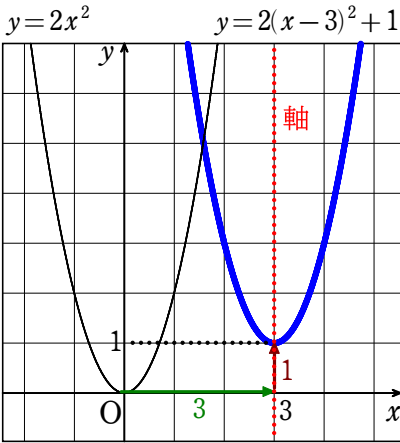
例 3 2 次関数 $y = 2(x - 3)^2 + 1$ のグラフ

$y = 2x^2$ と $y = 2(x - 3)^2 + 1$ のグラフの関係は、次のようになる。



したがって、 $y = 2(x - 3)^2 + 1$ のグラフは、
 $y = 2x^2$ のグラフを
x 軸方向に 3、y 軸方向に 1 だけ
平行移動したもの
であり、右の図のようになる。
その頂点は点 (3, 1) であり、
軸は直線 $x = 3$ である。

終



一般に、次のことがいえる。

2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

符号 2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、

注意 点 (p, q) が頂点となるように平行移動した放物線である。

その軸は直線 $x = p$ である。

手順

- 1. x 軸, y 軸, 原点Oを書く
- 2. 頂点の場所を式から読み取る
- 3. x^2 の係数から放物線が上に凸か下に凸か考える。
- 4. 頂点の他に通る点(今回は y 軸との交点)を書き込み、そこを通るように放物線を書く。

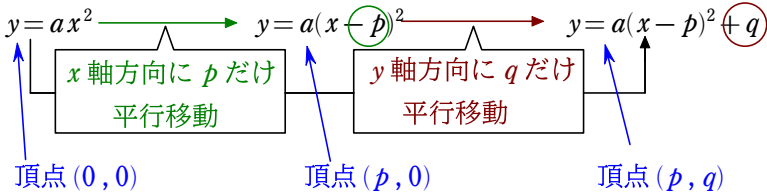
x に 0 を代入すれば求められる。
また、軸に関して $x = 0$ と対称な場所も同じ
 y 座標になるので、そこも書き込む。

$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフの形は、

かっこの中を x に書き換え

後ろの $+q$ を手で隠したグラフと同じ形になる

$y = a(\cancel{x - p})^2 \rightarrow y = ax^2$



$y = a(x - p)^2 + q$ の式から頂点を読み取る

式	頂点
$y = a(x - A)^2 + B$	(A, B)
$y = a(x - A)^2 - B$	$(A, -B)$
$y = a(x + A)^2 + B$	$(-A, B)$
$y = a(x + A)^2 - B$	$(-A, -B)$

頂点の x 座標は式と符号が逆になるので注意

頂点の y 座標は式と同じ符号になる

練習 8 次の2次関数のグラフをかけ。また、その頂点と軸を求めよ。

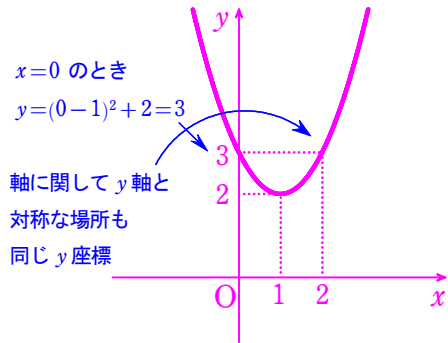
(1) $y = (x-1)^2 + 2$

(2) $y = 2(x-2)^2 - 4$

(3) $y = -2(x+1)^2 + 2$

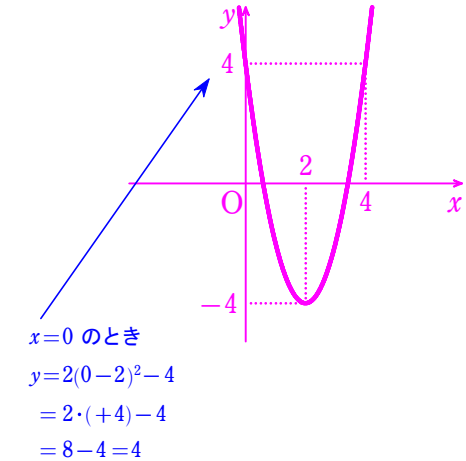
(4) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

【解答】 (1) [図], 頂点は点 (1, 2), 軸は直線 $x = 1$



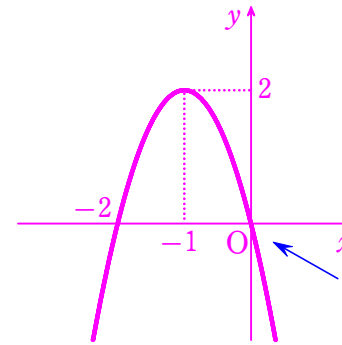
$y = (x-1)^2 + 2$ 頂点 (1, 2)
 符号逆
 x^2 の係数が 1
 $\rightarrow y = x^2$ のグラフと形が同じ
 $\rightarrow$ 下に凸
 $y = (\text{✗} 1)^2 - \text{✗}$ $\rightarrow y = x^2$

(2) [図], 頂点は点 (2, -4), 軸は直線 $x = 2$



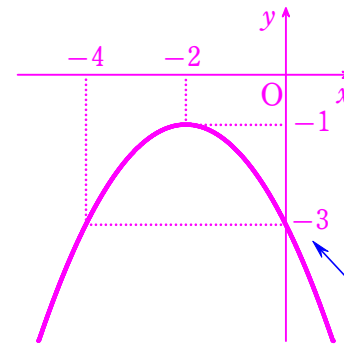
$y = 2(x-2)^2 - 4$ 頂点 (2, -4)
 符号逆
 x^2 の係数が 2
 $\rightarrow y = 2x^2$ のグラフと形が同じ
 $\rightarrow$ 下に凸
 $y = 2(\text{✗} 2)^2 - \text{✗}$ $\rightarrow y = 2x^2$

(3) [図], 頂点は点 (-1, 2), 軸は直線 $x = -1$



$y = -2(x+1)^2 + 2$ 頂点 (-1, 2)
 符号逆
 x^2 の係数が -2
 $\rightarrow y = -2x^2$ のグラフと形が同じ
 $\rightarrow$ 上に凸
 $y = -2(\text{✗} 1)^2 - \text{✗}$ $\rightarrow y = -2x^2$

(4) [図], 頂点は点 (-2, -1), 軸は直線 $x = -2$



$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$ 頂点 (-2, -1)
 符号逆
 x^2 の係数が $-\frac{1}{2}$
 $\rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフと形が同じ
 $\rightarrow$ 上に凸
 $y = -\frac{1}{2}(\text{✗} 2)^2 - \text{✗}$ $\rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2$

前ページでまとめたことは、次のように述べることもできる。

2 次関数 $y = ax^2$ のグラフを、
 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q
 だけ平行移動すると、
 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフになる。

頂点がこの平行移動によって $(0, 0)$ から (p, q) に動く。平行移動しただけなので x^2 の係数は a のままで変わらない。よって、 x^2 の係数が a で、頂点が (p, q) である放物線の式は $y = a(x - p)^2 + q$

例 4 2 次関数 $y = 2x^2$ のグラフの平行移動

平行移動後の放物線をグラフにもつ 2 次関数の式を調べると、
 たとえば次のようになる。 頂点がどこに動くか、そこを頂点とする式はどうなるか考える。

もとの式	x 軸方向	y 軸方向	平行移動後の式
(1) $y = 2x^2$	1	3	$y = 2(x - 1)^2 + 3$ ← 頂点は $(1, 3)$
(2) $y = 2x^2$	1	-3	$y = 2(x - 1)^2 - 3$ ← 頂点は $(1, -3)$
(3) $y = 2x^2$	-1	3	$y = 2\{x - (-1)\}^2 + 3$ ← 頂点は $(-1, 3)$
			すなわち $y = 2(x + 1)^2 + 3$

頂点の x 座標がマイナスのときは、次のどちらの考え方でいってもよい。

① $y = a(x - p)^2 + q$ の公式に無理矢理代入する。ただし中括弧を使うことになる。

この問題では $y = 2\{x - (-1)\}^2 + 3$ となり、中括弧の中を計算して $y = 2(x + 1)^2 + 3$ となる。

② 頂点の x 座標の符号が逆なものが式に入ると考える。

この問題では頂点の x 座標が -1 なので、式には $(x + 1)^2$ が現れる。ゆえに答えは $y = 2(x + 1)^2 + 3$ となる。

練習 9 2 次関数 $y = -3x^2$ のグラフを次のように平行移動すると、どのような 2 次関数のグラフになるか。その関数の式を求めよ。

- (1) x 軸方向に 4、 y 軸方向に 2 だけ平行移動
- (2) x 軸方向に 4、 y 軸方向に -2 だけ平行移動
- (3) x 軸方向に -4 、 y 軸方向に 2 だけ平行移動

解答

$y = -3x^2$ のグラフを平行移動しているので、動かした後のグラフの式における x^2 の係数も -3 で変わらない。

- 符号逆 符号そのまま

(1) この移動によって頂点が $(4, 2)$ になるので、式は $y = -3(x - 4)^2 + 2$
- 符号逆 符号そのまま

(2) この移動によって頂点が $(4, -2)$ になるので、式は $y = -3(x - 4)^2 - 2$
- 符号逆 符号そのまま

(3) この移動によって頂点が $(4, -2)$ になるので、式は $y = -3\{x - (-4)\}^2 + 2$
 すなわち $y = -3(x + 4)^2 + 2$

< 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ >

2 次式 $2(x-3)^2 + 1$ を整理すると

$$2(x-3)^2 + 1 = 2(x^2 - 6x + 9) + 1 = 2x^2 - 12x + 18 + 1$$

$$(x-A)^2 = x^2 - 2Ax + A^2 \quad = 2x^2 - 12x + 19$$

となる。すなわち、次の等式が成り立つ。

$$2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1$$

たとえば、2 次関数 $y = 2x^2 - 12x + 19$ が与えられたとき、これを $y = 2(x-3)^2 + 1$ と変形すると、そのグラフの頂点と軸がわかる。

x の 2 次式を上等の式の右辺のような形に変形することを、**平方完成** するという。

平方完成

$a(x + \square)^2 + \bigcirc$ の形の
2 次式に変形すること

【参考】

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{A}{2} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 = x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\text{よって} \quad \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\text{両辺から} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \text{を引いて} \quad \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 = x^2 + Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\text{すなわち} \quad \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 = x^2 + Ax$$

同様に

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{A}{2} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 = x^2 - Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\text{よって} \quad \left(x - \frac{A}{2}\right)^2 = x^2 - Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\text{両辺から} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \text{を引いて} \quad \left(x - \frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 = x^2 - Ax + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\text{すなわち} \quad \left(x - \frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 = x^2 - Ax$$

例 5 (1) $x^2 + 4x$ を平方完成する。

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 \\ &= (x+2)^2 - 2^2 \\ &= (x+2)^2 - 4 \end{aligned}$$

+4 の半分は +2

$$x^2 + \blacksquare x = \left(x + \frac{\blacksquare}{2}\right)^2 - \left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2$$

2 乗
半分

(2) $x^2 - 3x + 2$ を平方完成する。

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{8}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

-3 の半分は $-\frac{3}{2}$

$$x^2 - \blacksquare x = \left(x - \frac{\blacksquare}{2}\right)^2 - \left(\frac{\blacksquare}{2}\right)^2$$

2 乗
半分

$x^2 - 3x$ の部分のみ公式を用いる。+2 はとりあえず放置。

出てきた $-\frac{9}{4}$ と放置していた +2 を足す

【終】

注意 半分にして括弧の中に入れるのは x の係数 です。

x をくっつけたまま入れてはいけません。

(よくある間違い)

$$x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3x}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + 2$$

ここがダメ

また、勝手にマイナスをかけたり、約数で割ってしまう間違いもよく見ます。

悪い例

$$y = -x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2x - 3$$

$$y = 2x^2 + 4x + 6 = x^2 + 2x + 3$$

マイナスをかけて符号を
変えるのは間違い

すべて2で割って式を
簡単にするのは間違い

これらはやってはいけない操作です。そもそも「マイナスをかける」「同じ数で割る」という操作は「両辺にマイナスをかける」「両辺を同じ数で割る」という操作です。

例

$$-5x = -10 \quad \text{両辺に} (-1) \text{を掛けて} \quad 5x = 10 \quad \text{両辺5で割って} \quad x = 2$$

練習 10 次の2次式を平方完成せよ。

- (1) $x^2 + 8x$ (2) $x^2 - 4x$ (3) $x^2 + 6x + 8$
 (4) $x^2 - 8x + 10$ (5) $x^2 + 5x$ (6) $x^2 - x + 1$
 (7) $x^2 + x - 2$ (8) $x^2 - 7x + 12$

【解答】

+8の半分は+4

$$(1) \quad x^2 + 8x = (x+4)^2 - 4^2 \\ = (x+4)^2 - 16$$

+6の半分は+3

$$(3) \quad x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 3^2 + 8 \\ = (x+3)^2 - 9 + 8 \\ = (x+3)^2 - 1$$

+5の半分は $\frac{+5}{2}$

$$(5) \quad x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

+xの係数は+1である。

+1の半分は $\frac{+1}{2}$

$$(7) \quad x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \\ = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{8}{4} \\ = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

-7の半分は $\frac{-7}{2}$

$$(8) \quad x^2 - 7x + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 \\ = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{48}{4} \\ = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

-4の半分は-2

$$(2) \quad x^2 - 4x = (x-2)^2 - 2^2 \\ = (x-2)^2 - 4$$

-8の半分は-4

$$(4) \quad x^2 - 8x + 10 = (x-4)^2 - 4^2 + 10 \\ = (x-4)^2 - 16 + 10 \\ = (x-4)^2 - 6$$

-xの係数は-1である。

-1の半分は $\frac{-1}{2}$

$$(6) \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{4}{4} \\ = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

例 6 $3x^2 + 6x + 2$ を平方完成する。

超大事

$$3x^2 + 6x = 3 \times x^2 + 3 \times 2x = 3 \times (x^2 + 2x)$$

+2の半分は+1

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 2 &= 3(x^2 + 2x) + 2 \\ &= 3\{(x+1)^2 - 1^2\} + 2 \\ &= 3(x+1)^2 - 3 \cdot 1 + 2 \\ &= 3(x+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

① x^2, x を含む項を x^2 の係数3でくくる。
文字を含まない項はとりあえず放置

② $x^2 + 2x$ を平方完成する。

中括弧を必ず使うこと

③ 3を分配法則にかけて{ }をはずす。
(毎年、これができない生徒が多い)

④ 出てきた-3と放置していた+2を足す

終

練習 11 次の2次式を平方完成せよ。

(1) $2x^2 - 8x - 3$

(2) $3x^2 + 9x + 4$

(3) $-2x^2 + 4x + 3$

(4) $-2x^2 - 6x + 1$

【解答】

−4 の半分は −2

$$\begin{aligned} (1) \quad 2x^2 - 8x - 3 &= 2(x^2 - 4x) - 3 \\ &= 2\{(x-2)^2 - 2^2\} - 3 \\ &= 2(x-2)^2 - 2 \cdot 4 - 3 \\ &= 2(x-2)^2 - 8 - 3 = 2(x-2)^2 - 11 \end{aligned}$$

(2) $3x^2 + 9x + 4 = 3(x^2 + 3x) + 4$ +3 の半分は $\frac{+3}{2}$

$$\begin{aligned} &= 3\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + 4 \\ &= 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{9}{4} + 4 \\ &= 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} + \frac{16}{4} = 3\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} \end{aligned}$$

(3) $-2x^2 + 4x + 3 = -2(x^2 - 2x) + 3$ −2 の半分は −1

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x &= \underline{-2 \times x^2} + \underline{(-2) \times (-2x)} \\ &= \underline{-2 \times \{x^2 + (-2x)\}} \quad \text{符号に注意} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2\{(x-1)^2 - 1^2\} + 3 \\ &= -2(x-1)^2 + 2 \cdot 1 + 3 \\ &= -2(x-1)^2 + 2 + 3 = -2(x-1)^2 + 5 \end{aligned}$$

(4) $-2x^2 - 6x + 1 = -2(x^2 + 3x) + 1$ +3 の半分は $\frac{+3}{2}$

$$\begin{aligned} -2x^2 - 6x &= \underline{-2 \times x^2} + \underline{(-2) \times (+3x)} \\ &= \underline{-2 \times \{x^2 + (+3x)\}} \quad \text{符号に注意} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} + 1 \\ &= -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{9}{4} + 1 \\ &= -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} + \frac{2}{2} = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

2次式の平方完成を利用して、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかいてみよう。

例 7 2次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフ

超大事 $x^2 - 4x + 3$ を平方完成すると

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= (x-2)^2 - 2^2 + 3 \\ -4 \text{ の半分は } -2 &= (x-2)^2 - 4 + 3 \\ &= (x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

よって、 $y = x^2 - 4x + 3$ は

$$y = (x-2)^2 - 1$$

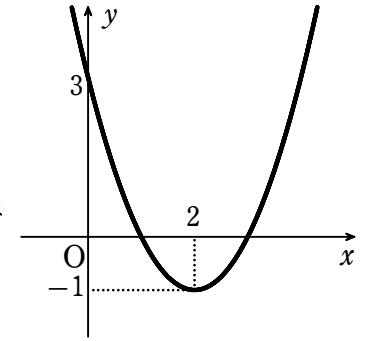
と変形できる。

したがって、2次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ のグラフは右の図のようになる。

その頂点は点 (2, −1)、軸は直線 $x = 2$ である。

また、 $x = 0$ のとき、 $y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$

であるから、グラフは y 軸と点 (0, 3) で交わる。【終】



補足 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ において、 $x = 0$ のとき $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$ である。
よって、そのグラフは y 軸と点 (0, c) で交わる。

例題 3 次の2次関数のグラフをかけ。また、その頂点と軸を求めよ。

超大事

$$y = -2x^2 - 4x + 1$$

+2の半分は+1

$$\begin{aligned} -2x^2 - 4x &= \underline{-2 \times x^2} + \underline{(-2) \times (+2x)} \\ &= \underline{-2 \times \{x^2 + (+2x)\}} \end{aligned}$$

符号に注意

解答 $-2x^2 - 4x + 1 = -2\{x^2 + 2x\} + 1$

$$= -2\{(x+1)^2 - 1^2\} + 1$$

$$= -2(x+1)^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 = -2(x+1)^2 + 3$$

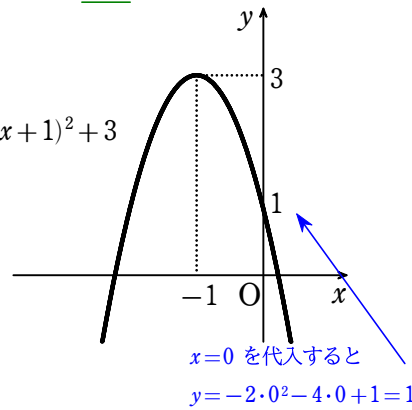
よって $y = -2(x+1)^2 + 3$

したがって、この関数のグラフは右の

図のような放物線である。

その頂点は点 $(-1, 3)$ 、軸は直線

$x = -1$ である。



練習 12 次の2次関数のグラフをかけ。また、その頂点と軸を求めよ。

(1) $y = x^2 - 6x + 5$

(2) $y = 2x^2 + 8x + 3$

(3) $y = -3x^2 + 6x + 1$

(4) $y = -x^2 - 4x + 2$

(5) $y = 2x^2 - 6x - 1$

(6) $y = -x^2 + 3x$

解答 -6の半分は-3

(1) $x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 3^2 + 5 = (x-3)^2 - 4$

よって $y = (x-3)^2 - 4$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $(3, -4)$ 、軸は直線 $x = 3$ である。

+4の半分は+2

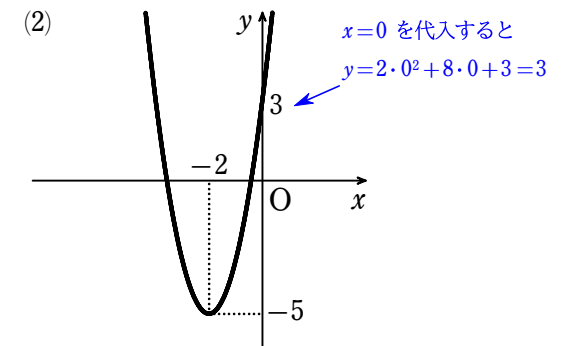
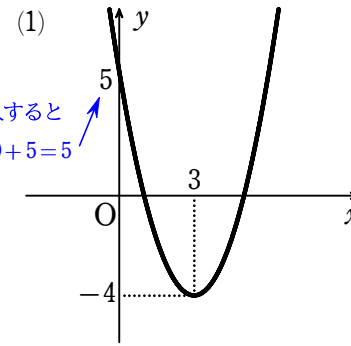
(2) $2x^2 + 8x + 3 = 2(x^2 + 4x) + 3 = 2\{(x+2)^2 - 2^2\} + 3$

$$= 2(x+2)^2 - 2 \cdot 2^2 + 3 = 2(x+2)^2 - 5$$

よって $y = 2(x+2)^2 - 5$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $(-2, -5)$ 、軸は直線 $x = -2$ である。



-2の半分は-1

(3) $-3x^2 + 6x + 1 = -3(x^2 - 2x) + 1 = -3\{(x-1)^2 - 1^2\} + 1$
 $= -3(x-1)^2 + 3 \cdot 1^2 + 1 = -3(x-1)^2 + 4$

よって $y = -3(x-1)^2 + 4$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $(1, 4)$ 、軸は直線 $x = 1$ である。

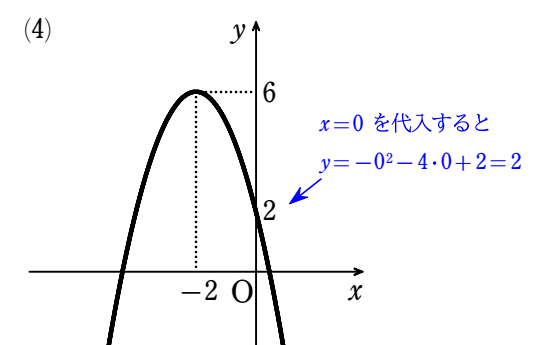
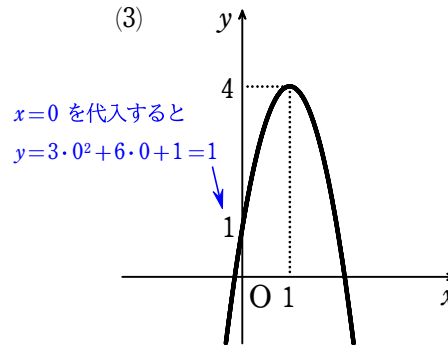
+4の半分は+2

(4) $-x^2 - 4x + 2 = -(x^2 + 4x) + 2 = -\{(x+2)^2 - 2^2\} + 2$
 $= -(x+2)^2 + 2^2 + 2 = -(x+2)^2 + 6$

よって $y = -(x+2)^2 + 6$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $(-2, 6)$ 、軸は直線 $x = -2$ である。



$$\begin{aligned}
 (5) \quad 2x^2 - 6x - 1 &= 2\left(x^2 - 3x\right) - 1 = 2\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} - 1 \\
 &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

よって $y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ 、軸は直線 $x = \frac{3}{2}$ である。

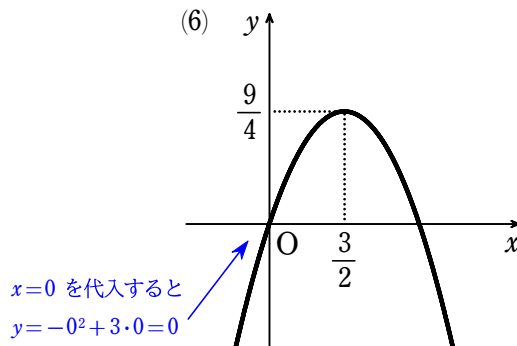
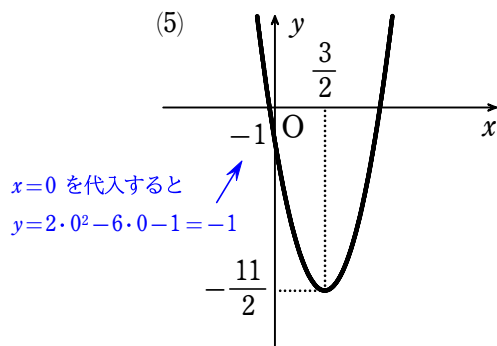
$$\begin{aligned}
 (6) \quad -x^2 + 3x &= -(x^2 - 3x) = -\left\{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right\} \\
 &= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

$-x^2 + 3x = \underline{-1} \times x^2 + \underline{(-1)} \times (-3x) = \underline{-1} \times \{x^2 + (-3x)\}$

よって $y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

したがって、この関数のグラフは下の図のような放物線である。

その頂点は点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 、軸は直線 $x = \frac{3}{2}$ である。



一般に、次のことがいえる。

x^2 の係数が変わらないので、
頂点の場所は変わっても形は同じである

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを平行移動した放物線である。

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを、**放物線** $y = ax^2 + bx + c$ ともいう。
また、 $y = ax^2 + bx + c$ をこの **放物線の方程式** という。

補足 2 つの放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 、 $y = ax^2 + b'x + c'$ は、 x^2 の係数がともに a であるから、いずれも放物線 $y = ax^2$ を平行移動したものである。
よって、一方を平行移動して他方に重ねることができる。

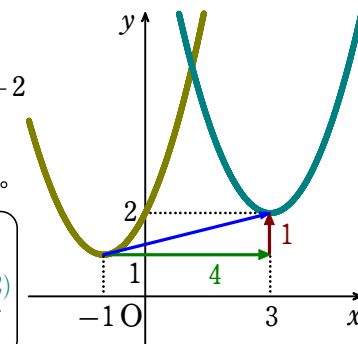
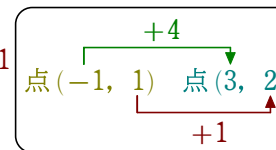
応用例題 1

放物線 $y = x^2 + 2x + 2$ を平行移動して放物線 $y = x^2 - 6x + 11$ に重ねるには、
どのように平行移動すればよいか。

どっちをどっちに移動させるか
間違えないように

ヒント 2 つの放物線の頂点の移動に着目する。

解答 $y = x^2 + 2x + 2$ を変形すると $+2$ の半分は $+1$
 $y = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 - 1^2 + 2 = (x+1)^2 + 1$
 よって $y = (x+1)^2 + 1$ より頂点は点 $(-1, 1)$
 $y = x^2 - 6x + 11$ を変形すると -6 の半分は -3
 $y = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 - 3^2 + 11 = (x-3)^2 + 2$
 よって $y = (x-3)^2 + 2$ より頂点は点 $(3, 2)$
 よって、頂点は点 $(-1, 1)$ から点 $(3, 2)$ に移動する。
 したがって、
 x 軸方向に 4、 y 軸方向に 1
 だけ平行移動すればよい。



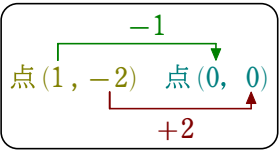
練習 13 放物線 $y=2x^2-4x$ を平行移動して次の放物線に重ねるには、どのように平行移動すればよい。

- (1) $y=2x^2$
- (2) $y=2x^2+4x-3$

【解答】

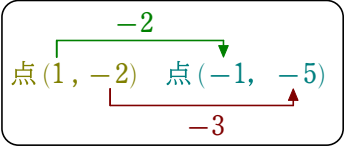
$y=2x^2-4x$ を変形すると
 $y=2x^2-4x=2(x^2-2x)=2[(x-1)^2-1^2]=2(x-1)^2-2\cdot1^2=2(x-1)^2-2$
 よって $y=2(x-1)^2-2$ より頂点は $(1,-2)$

- (1) $y=2x^2$ の頂点は $(0,0)$ より
 頂点は点 $(1,-2)$ から点 $(0,0)$ に移動する。
 したがって、 x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2
 だけ平行移動すればよい。



- (2) $y=2x^2+4x-3$ を変形すると
 $y=2x^2+4x-3=2(x^2+2x)-3=2[(x+1)^2-1^2]-3=2(x+1)^2-2\cdot1^2-3=2(x+1)^2-5$

よって $y=2(x+1)^2-5$ より頂点は $(-1,-5)$
 ゆえに、頂点は点 $(1,-2)$ から
 点 $(-1,-5)$ に移動する。
 したがって、 x 軸方向に -2 , y 軸方向に -3
 だけ平行移動すればよい。



【参考】 x の 2 次式 ax^2+bx+c の平方完成

x の 2 次式 ax^2+bx+c は、次のように平方完成することができる。

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \qquad +\frac{b}{a} \text{ の半分は } +\frac{b}{a}\div2=+\frac{b}{a}\times\frac{1}{2}=+\frac{b}{2a}$$

$$\begin{aligned} &=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\cancel{a}\cdot\frac{b^2}{\cancel{a}4a}+c \quad \text{約分} \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a} \\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

この変形はできなくてもいいですが、他の問題でこの結果を聞かれることはあります。

$$-b^2+4ac=-(b^2-4ac)$$

よって、放物線 $y=ax^2+bx+c$ の頂点と軸は次のようになる。

頂点は 点 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, 軸は 直線 $x=-\frac{b}{2a}$