

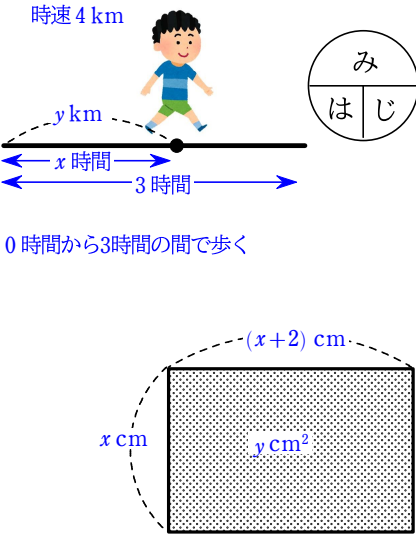
第3章「2次関数」第1節 2次関数とグラフ 1 関数とグラフ

自然現象や社会現象の中には、2つの量が互いに関連しながら変化するような現象が多くある。変化する量 x 、 y について、 y が x の1次式や2次式で表される場合を調べてみよう。

＜関数＞

- 例1 (1) 時速4 km で3時間歩く。
 x 時間歩いたときの道のりを y km とすると、 x と y の間の関係は次の式で表される。
 $y = 4x$
 x の値の範囲は $0 \leq x \leq 3$ である。
- (2) 横が縦より2 cm 長い長方形について、縦の長さを x cm、面積を y cm² とすると、 x と y の間の関係は次の式で表される。
 $y = x(x+2)$ すなわち $y = x^2 + 2x$
 x の値の範囲は $x > 0$ である。

横=縦+2
= $x+2$



終

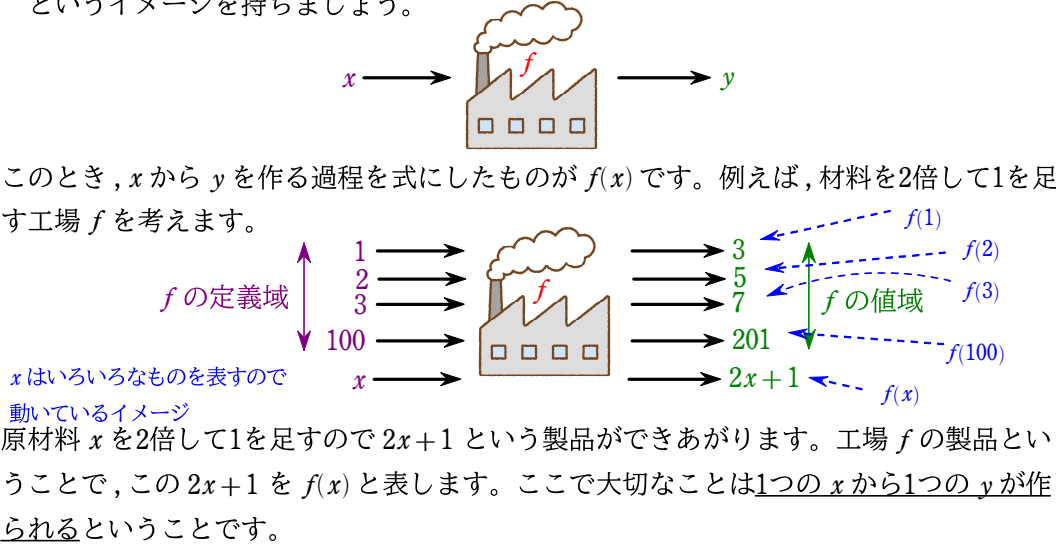
辺の長さは正 x を独立変数, y を従属変数という。

例1のように、2つの変数 x 、 y について、 x の値が1つ決まるとそれに対応して y の値がただ1つ決まるとき、 y は x の関数であるという。
 x の関数において、変数 x のとりうる値の範囲を、その関数の定義域という。
たとえば、例1(1)の関数の定義域は $0 \leq x \leq 3$ である。 中学では「 x の変域」と言いましたが、高校では「定義域」といいます。

関数の定義域を示すのに、関数の式の後にかっこをつけて示すことがある。
たとえば、例1の関数は、次のように書く。 関数では定義域も示す。

- (1) $y = 4x$ ($0 \leq x \leq 3$) (2) $y = x^2 + 2x$ ($x > 0$)

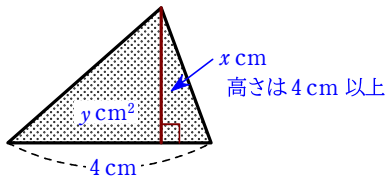
参考(関数のイメージ)
関数 $y = f(x)$ について、「原材料 x を f という名前の工場に入れたら製品 y ができた」というイメージを持ちましょう。



x はいろいろなものを表すので動いているイメージ
原材料 x を2倍して1を足すので $2x+1$ という製品ができあがります。工場 f の製品ということで、この $2x+1$ を $f(x)$ と表します。ここで大切なことは1つの x から1つの y が作られるということです。
1つの x に対して1つの y が決まれば関数なので
「このクラスの出席番号 x 番の人の身長が y cm」
としても、 y は x の関数となります。しかし
「このクラスの出席番号 x 番の人が好きな料理 y 」
としたとき、ある生徒の好きな料理が2つも3つもでてきたら y は x の関数ではなくなります。「このクラスの出席番号 x 番の人が最も好きな料理 y 」とすれば関数になります。

練習 1 底辺の長さが 4 cm、高さが x cm の三角形の面積を y cm² とする。
 ただし、高さは 4 cm 以上であるとする。 y を x の式で表せ。

解答 三角形の面積 = $\frac{1}{2} \times$ 底辺 $\times$ 高さ
 三角形の面積は $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x = 2x$
 また、高さは 4 cm 以上であるから $x \geq 4$
 したがって $y = 2x$ ($x \geq 4$)
 定義域は丸括弧で表す



y が x の 1 次式で表されるとき、 y は x の **1 次関数** であるといい、 y が x の 2 次式で表されるとき、 y は x の **2 次関数** であるという。1 次式 $\rightarrow x$ の肩に乗っている数字が最大 1
 たとえば、 $y = 2x + 1$ は x の 1 次関数であり、 $y = 2x^2 + 4x + 5$ は x の 2 次関数である。

1 次関数、2 次関数の一般形

a, b, c は定数とする。
 1 次関数は $y = ax + b$ ただし、 $a \neq 0$
 2 次関数は $y = ax^2 + bx + c$ ただし、 $a \neq 0$

注意 定義域が実数全体であるとき、定義域を示すことを省略することがある。
 特に x に制限がないとき
 y が x の関数であるとき、 y を表す x の式を $f(x)$ や $g(x)$ のように書くことがある。
 x の関数 $y = f(x)$ を単に、関数 $f(x)$ ともいう。
 犬にポチと名付けるのと同じで、式に f や g と名前をつけている。関数は英語で function より、よく f が使われる

関数 $y = f(x)$ において、 x の値 a に対応して決まる y の値を $f(a)$ と書き、
 $f(a)$ を関数 $f(x)$ の $x = a$ における **値** という。
 $f(x)$ の x を数字に置き換えたもの。
 すべての x に同じ数字が入る。

例 2 関数 $f(x)$ の値

2 次関数 $f(x) = x^2 + 3x$ において
 $f(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 = 25 + 15 = 40$
 $f(a) = a^2 + 3a$ 計算はできるところまでする
 である。

$f(x) = x^2 + 3x$
 $\downarrow$
 $f(\bigcirc) = \bigcirc^2 + 3 \cdot \bigcirc$

終

練習 2 2 次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ において、次の値を求めよ。

- (1) $f(3)$
 (4) $f(-2)$
- (2) $f(0)$
 (5) $f(-a)$
- (3) $f(-1)$
 (6) $f(a+1)$

解答
 (1) $f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 9 - 6 + 1 = 4$
 (2) $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$
 (3) $f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$
 (4) $f(-2) = (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$
 (5) $f(-a) = (-a)^2 - 2 \cdot (-a) + 1 = a^2 + 2a + 1$
 (6) $f(a+1) = (a+1)^2 - 2(a+1) + 1$
 $= (a^2 + 2a + 1) - 2a - 2 + 1 = a^2$

$f(x) = (x)^2 - 2 \cdot (x) + 1$ と考えてもよい。
 $\downarrow$
 $f(-a) = (-a)^2 - 2 \cdot (-a) + 1$

別解
 $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ より $f(a+1) = \{(a+1)-1\}^2 = a^2$

例題 1 1 次関数 $f(x) = ax + b$ について $f(1) = 3$, $f(4) = 9$ が成り立つとき、
 定数 a, b の値を求めよ。

解答

$f(1) = 3$ から $f(1) = a \cdot 1 + b = 3$ よって $a + b = 3$ ①
 $f(4) = 9$ から $f(4) = a \cdot 4 + b = 9$ よって $4a + b = 9$ ②
 ①, ②を解いて $a = 2, b = 1$

$$\begin{array}{r} 4a + b = 9 \dots ② \\ -) \quad a + b = 3 \dots ① \\ \hline 3a = 6 \end{array}$$

参考
 この問題は中学校で習う以下の問題と全く同じである。

「1 次関数 $y = ax + b$ が、 $x = 1$ のとき $y = 3$, $x = 4$ のとき $y = 9$ となるとき、
 定数 a, b の値を求めなさい」
 「直線 $y = ax + b$ が 2 点 $(1, 3), (4, 9)$ を通るとき、定数 a, b の値を求めなさい」

$f(1) = 3$ とは「 $x = 1$ のとき $y = 3$ 」を簡単に書いたものと考えましょう。

練習 3 1 次関数 $f(x) = ax + b$ が次の条件を満たすとき、定数 a, b の値を求めよ。

(1) $f(2) = 8, f(-1) = -4$

(2) $f(0) = 2, f(3) = -7$

解答

(1) $f(2) = 8$ から $f(2) = a \cdot 2 + b = 8$ より $2a + b = 8$ …… ①

$f(-1) = -4$ から $f(-1) = a \cdot (-1) + b = -4$ より $-a + b = -4$ …… ②

①, ② を解いて $a = 4, b = 0$

$$\begin{array}{rcl} 2a + b & = & 8 \cdots \text{①} \\ -) -a + b & = & -4 \cdots \text{②} \\ \hline 3a & = & 12 \end{array}$$

(2) $f(0) = 2$ から $f(0) = a \cdot 0 + b = 2$ より $b = 2$ …… ①

$f(3) = -7$ から $f(3) = a \cdot 3 + b = -7$ より $3a + b = -7$ …… ②

① を ② に代入して $3a + 2 = -7$ よって $3a = 9$ より $a = -3$

よって $a = -3, b = 2$

研究(グラフについて)

黒板					
教卓					
$(-2, 3)$	$(-1, 3)$	$(0, 3)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(3, 3)$
$(-2, 2)$	$(-1, 2)$	$(0, 2)$	$(1, 2)$	$(2, 2)$	$(3, 2)$
$(-2, 1)$	$(-1, 1)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$	$(3, 1)$
$(-2, 0)$	$(-1, 0)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 0)$	$(3, 0)$
$(-2, -1)$	$(-1, -1)$	$(0, -1)$	$(1, -1)$	$(2, -1)$	$(3, -1)$
$(-2, -2)$	$(-1, -2)$	$(0, -2)$	$(1, -2)$	$(2, -2)$	$(3, -2)$

自分の席の場所にある座標を覚えましょう。

<関数のグラフ>

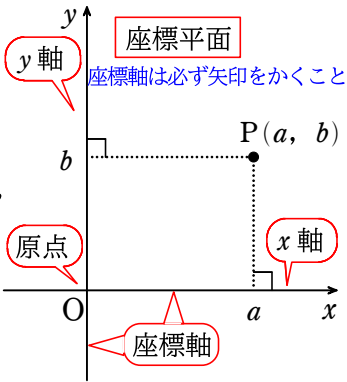
原点はOriginの頭文字でオーです。ゼロではありません。

平面上に、右の図のような点 O で垂直に交わる 2 本の数直線を取り、それらを x 軸と y 軸とする。点 O を **原点** といい、 x 軸と y 軸をあわせて **座標軸** という。

この平面上の点 P の位置は、図のように 2 つの実数の組 (a, b) で表される。この組 (a, b) を点 P の **座標** といい、このような点 P を $P(a, b)$ と書く。

また、座標が (a, b) である点を、**点 (a, b)** ということがある。このようにして座標を定めた平面を **座標平面** という。 **グラフ用紙や方眼紙のことを、高校では「座標平面」といいます**

関数 $y = f(x)$ を座標平面上の図形として表したものが**グラフ**である。
 1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは、傾きが a 、切片が b の直線である。
 このグラフを、直線 $y = ax + b$ ということもある。また、 $y = ax + b$ をこの **直線の方程式** という。



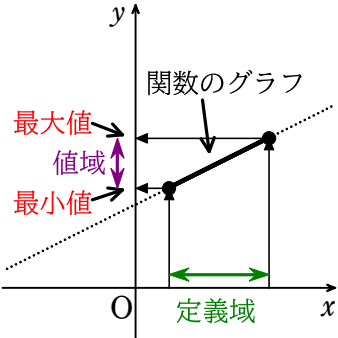
一般に、関数 $y = f(x)$ の **グラフ** とは、関係 $y = f(x)$ を満たすような点 $(x, f(x))$ 全体で作られる図形のことである。また、関数の定義域の x の値に対応して y がとる値の範囲を、この関数の **値域** という。

関数の値域に最大の値があるとき、その値を関数の **最大値** という。

また、最小の値があるとき、その値を関数の **最小値** という。

グラフの中で一番高い場所の y 座標を最大値といい、一番低い場所の y 座標を最小値といいます。
 今後、最大値や最小値がない場合も考えていきます。

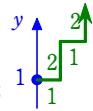
関数のグラフを利用して、その関数の最大値、最小値を求めてみよう。



関数のグラフをかく場合、定義域内は実線でかき、定義域外は破線でかくことが多い。

例題 2 関数 $y=2x+1$ ($1 \leq x \leq 3$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数のグラフをかけ。定義域 (2) 関数の値域を求めよ。
- (3) 関数の最大値、最小値を求めよ。



【解答】 (1) この関数のグラフは、 $y=2x+1$

のグラフのうち、 $1 \leq x \leq 3$ に対応する部分である。

$$x=1 \text{ のとき } y=2 \cdot 1 + 1 = 3$$

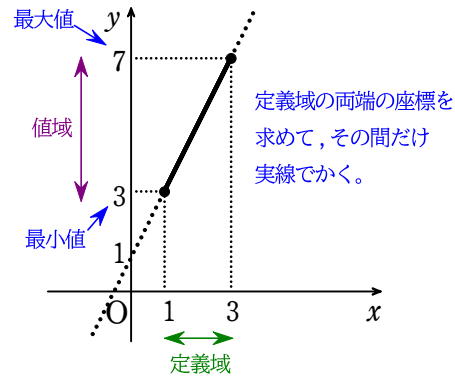
$$x=3 \text{ のとき } y=2 \cdot 3 + 1 = 7$$

よって、グラフは右の図の実線部分である。値域は y の範囲を不等号で表す

(2) 値域は $3 \leq y \leq 7$

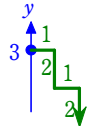
(3) $x=3$ で最大値 7 をとり、
 $x=1$ で最小値 3 をとる。

最大値や最小値はそのときの x の値もセットで答える



練習 4 関数 $y=-2x+3$ ($-1 \leq x \leq 2$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数のグラフをかけ。 (2) 関数の値域を求めよ。
- (3) 関数の最大値、最小値を求めよ。



【解答】

(1) この関数のグラフは、 $y=-2x+3$ のグラフのうち、 $-1 \leq x \leq 2$ に対応する部分である。

$$x=-1 \text{ のとき } y=-2 \cdot (-1) + 3 = 5$$

$$x=2 \text{ のとき } y=-2 \cdot 2 + 3 = -1$$

よって、グラフは右の図の実線部分である。

(2) 値域は $-1 \leq y \leq 5$

(3) $x=-1$ で最大値 5 をとり、 $x=2$ で最小値 -1 をとる。

