

第2章「集合と命題」章末問題

1 2つの集合 A, B を,
 $A = \{x \mid x \text{ は正の奇数}\}, \quad B = \{2n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
とする。次の $\square$ に, $\in, \subset, \cap, \cup$ のうち, 適する記号を入れよ。

- (1) $1 \square A$ (2) $\{1\} \square A$ (3) $\emptyset \square A$
(4) $A \square B = A$ (5) $A \square B = B$

【解答】 (1) $1 \in A$ (2) $\{1\} \subset A$ (3) $\emptyset \subset A$ (4) $A \cup B = A$ (5) $A \cap B = B$

【解説】
 $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, \quad B = \{3, 5, 7, 9, \dots\}$ である。

$B = \{2n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
 $2 \times 1 + 1 = 3$
 $2 \times 3 + 1 = 7$
 $B = \{3, 5, 7, \dots\}$

要素が袋に属しているときはこの記号
鈴木 $\in$ 先生

袋が他の袋にすっぽり入っているときはこの記号
3年C組 $\subset$ 中学3年

(1) 1 は集合 A の要素であるから $1 \in A$
(2) 1 のみを要素にもつ集合 $\{1\}$ は,
集合 A の部分集合であるから $\{1\} \subset A$
中括弧で囲まれているのは集合を表す。
 $\{1\}$ は中身に1という数字しか入っていない袋。

(3) 空集合 $\emptyset$ は集合 A の部分集合であるから $\emptyset \subset A$
空集合 $\emptyset$ およびその集合自身も部分集合である。
(部分集合と言われたら, 「空っぽの袋」「自分自身」の2つは必ず存在する)

$A \cap B = \{3, 5, 7, 9, \dots\}, \quad A \cup B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ である。

(4) $A \cup B = A$ (5) $A \cap B = B$

$A \dots \dots$ あ, い
 $B \dots \dots$ い

A と B の両方に共通して現れる場所が「共通部分」

$A \dots \dots$ あ, い
 $B \dots \dots$ い

A と B において, 登場する部分をすべて合体させた場所が「和集合」

この問題では B が A にすっぽり入っている状態なので, A と B の和集合は A そのものになる。また共通部分は B そのものになる。

2 1桁の自然数全体からなる集合を全体集合 U とする。 U の部分集合 A, B が
 $A \cap B = \{1, 9\}, \quad \overline{A} \cap B = \{6, 8\}, \quad \overline{A \cup B} = \{2, 4, 7\}$ を満たすとき, A, B を求めよ。

【解答】 $A = \{1, 3, 5, 9\}, \quad B = \{1, 6, 8, 9\}$

【解説】
 U は1桁の自然数全体からなる集合より
 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$
 $A \cap B = \{1, 9\}, \quad \overline{A} \cap B = \{6, 8\}, \quad \overline{A \cup B} = \{2, 4, 7\}$
ベン図にこれらの要素を書き込むと
要素3と5が $A \cap \overline{B}$ に属することがわかる。
よって $A \cap \overline{B} = \{3, 5\}$
右の図から
 $A = \{1, 3, 5, 9\}, \quad B = \{1, 6, 8, 9\}$

【あ, い】 【い, う】

3, 5 がまだ入っていない

$\overline{A} (\text{う}, \text{え})$ $B (\text{い}, \text{う})$ $\overline{A \cap B} (\text{う})$

共通部分

外側

$A \cup B (\text{あ}, \text{い}, \text{う})$ $\overline{A \cup B} (\text{え})$

3 全体集合 U を実数全体の集合とし、 U の部分集合 A, B を

$$A = \left\{ x \mid x < -\frac{2}{3} \right\}, \quad B = \{ x \mid -1 \leq x \leq 2 \}$$

とする。次の集合を求めよ。

- (1) $A \cap B$ (2) $A \cup B$ (3) $\overline{A \cap B}$

【解答】 (1) $A \cap B = \left\{ x \mid -1 \leq x < -\frac{2}{3} \right\}$ (2) $A \cup B = \{ x \mid x \leq 2 \}$

(3) $\overline{A \cap B} = \{ x \mid x > 2 \}$

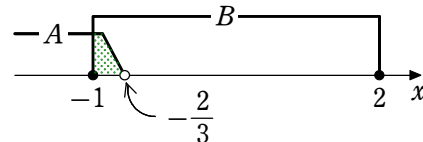
【解説】

- (1) $x < -\frac{2}{3}$ と $-1 \leq x \leq 2$ の共通範囲は

$$-1 \leq x < -\frac{2}{3}$$

よって $A \cap B = \left\{ x \mid -1 \leq x < -\frac{2}{3} \right\}$

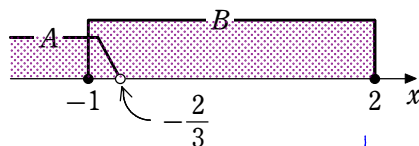
x の範囲で集合が与えられているときは、
答えも範囲で答えること。



- (2) $x < -\frac{2}{3}$ と $-1 \leq x \leq 2$ の少なくとも一方を満たす x の値の範囲は $x \leq 2$

よって $A \cup B = \{ x \mid x \leq 2 \}$

外側

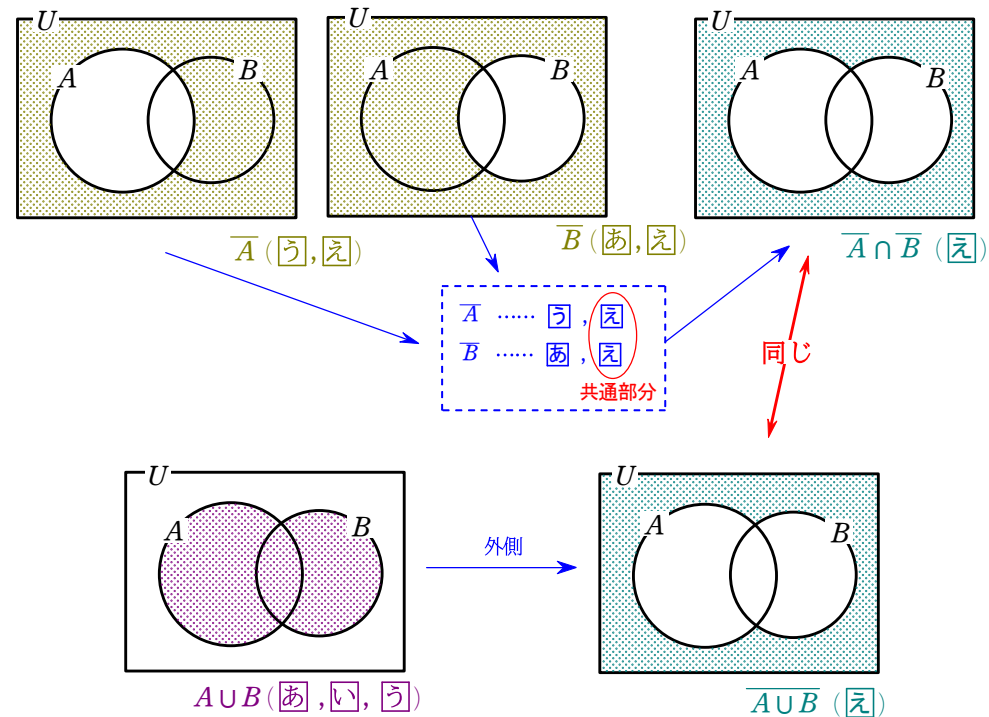


- (3) $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap B}$ であるから $\overline{A \cap B} = \{ x \mid x > 2 \}$

右図参照



外側



4 次の の中に適するものを，下の (a) ~ (d) のうちから 1 つずつ選べ。

(1) 四角形 ABCD が長方形であることは，四角形 ABCD の対角線の長さが等しいための 。

(2) a, b は実数とする。 $a \geq b$ は， $|a-b|=a-b$ であるための 。

- (a) 必要十分条件である
- (b) 必要条件であるが十分条件ではない
- (c) 十分条件であるが必要条件ではない
- (d) 必要条件でも十分条件でもない

解答 (1) (c) (2) (a)

解説

(1) 「四角形 ABCD が長方形である

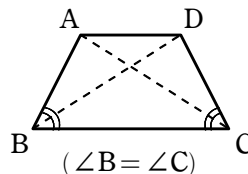
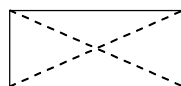
⇒ 四角形 ABCD の対角線の長さが等しい」は真。

「四角形 ABCD の対角線の長さが等しい

⇒ 四角形 ABCD が長方形である」は偽。

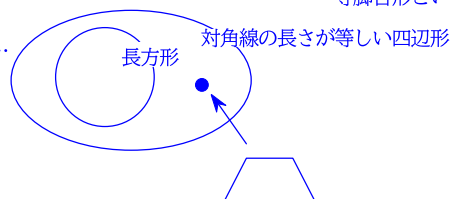
(反例：右の図のような台形)

よって，四角形 ABCD が長方形であることは四角形 ABCD の対角線の長さが等しいための十分条件であるが必要条件ではない。 図 (c)



等脚台形という

真
長方形は対角線の長さが等しい四角形であるための…
偽



(2) 「 $a \geq b \implies |a-b|=a-b$ 」は真。
「 $|a-b|=a-b \implies a \geq b$ 」は真。
よって， $a \geq b$ は $|a-b|=a-b$ であるための必要十分条件である。

移項

$$a \geq b \rightarrow a-b \geq 0$$

よって絶対値の中身の $a-b$ が 0 以上なので，
中身がそのまま出てくる。

絶対値の公式より $|a-b|$ は中身がそのまま出てくる $a-b$ か，中身が (-1) 倍された $-(a-b)$ のどちらかになる。問題文より $|a-b|=a-b$ が成り立つならば， $a-b$ は 0 以上でなければならない。ゆえに， $a-b \geq 0$ より移項して $a \geq b$ が成り立つ。

真
 $a \geq b$ は $|a-b|=a-b$ であるための…
真

図 (a)

絶対値

a が正の数または 0 のとき $|a|=a$

中身が正なら，中身がそのまま出てくる

a が負の数するとき $|a|=-a$

中身が正なら，中身の (-1) 倍が出てくる

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & (a-b \geq 0) \\ -(a-b) & (a-b < 0) \end{cases}$$

5 m, n, k は自然数とする。次の命題の逆, 対偶, 裏をそれぞれ述べ, それらの真偽を調べよ。

積 mnk は偶数 $\implies m, n, k$ の少なくとも1つは偶数

〔解答〕 逆「 m, n, k の少なくとも1つは偶数 $\implies$ 積 mnk は偶数」は真

対偶「 m, n, k はいずれも奇数 $\implies$ 積 mnk は奇数」は真

裏「積 mnk は奇数 $\implies m, n, k$ はいずれも奇数」は真

〔解説〕

逆「 m, n, k の少なくとも1つは偶数 $\implies$ 積 mnk は偶数」は真

m, n, k のうちどれか1個でも偶数があれば, 掛けると偶数になる

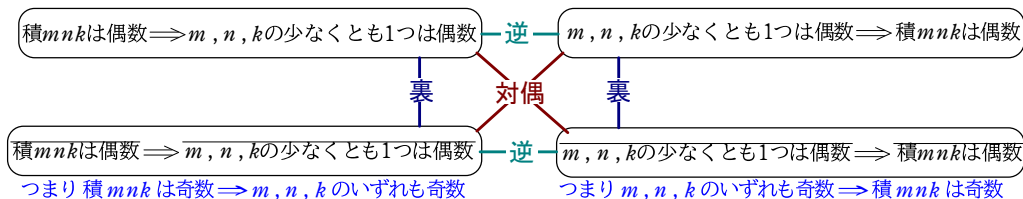
対偶「 m, n, k はいずれも奇数 $\implies$ 積 mnk は奇数」は真

(奇数) $\times$ (奇数) $\times$ (奇数) は奇数になる

裏「積 mnk は奇数 $\implies m, n, k$ はいずれも奇数」は真

積が奇数になるのは掛けられているものがすべて奇数の時に限る。

1つでも偶数を掛けると, 掛け算した結果は偶数になる。



6 「2つの集合 A と B の共通部分は空集合である」という命題を, 記号を用いて表すと次のようになる。

$$A \cap B = \emptyset$$

次の命題を, 記号を用いて表せ。

(1) x は集合 A の要素である。

(2) x のみを要素にもつ集合は, 集合 A の部分集合である。

(3) 2つの集合 A と B の和集合は, 集合 C の補集合に含まれる。

〔解答〕 (1) $x \in A$ (2) $\{x\} \subset A$ (3) $A \cup B \subset \bar{C}$

〔解説〕

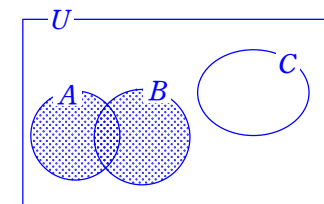
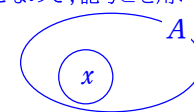
∈ (1) $x \in A$ ← 「属する」は記号 $\in$ を用いる

(2) $\{x\} \subset A$ ← 要素が x しかない集合は中括弧を使って $\{x\}$ と表す。

(3) $A \cup B \subset \bar{C}$ 部分集合とは A の袋に「すっぽり入る」ということなので, 記号 $\subset$ を用いる。

「含まれる」は「部分集合である」と同じ言葉なので, 記号 $\subset$ を用いる。

A と B の和集合は記号 $\cup$ を用いる
(水がたくさん入る方をイメージ)



7 a, b は実数とする。次の命題が偽であることを示すための反例となる a, b の組を、下

の (a) ~ (f) のうちから 2 つずつ選べ。

(1) a, b がともに無理数ならば、 $a+b$ は無理数である。

(2) a, b がともに無理数ならば、 ab は無理数である。

(a) $a = \sqrt{3}, b = 0$

(b) $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}$

(c) $a = \sqrt{3}, b = 1 + \sqrt{3}$

(d) $a = \sqrt{3}, b = 1 - \sqrt{3}$

(e) $a = 1 + \sqrt{3}, b = 1 - \sqrt{3}$

(f) $a = 2 + \sqrt{3}, b = \sqrt{3} - 1$

解答 (1) (d), (e) (2) (b), (e)

解説

(1) a, b がともに無理数であるのは (b) ~ (f) の場合である。 (a) の $b=0$ は有理数

このうち、 $a+b$ が無理数でないのは (d), (e) の場合である。 罫 (d), (e)

((d): $a+b = \sqrt{3} + (1-\sqrt{3}) = 1$ (e): $a+b = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3}) = 2$)

(2) a, b がともに無理数であるのは (b) ~ (f) の場合である。

このうち、 ab が無理数でないのは (b), (e) の場合である。 罫 (b), (e)

((b): $ab = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ (e): $ab = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = -2$)

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ の公式

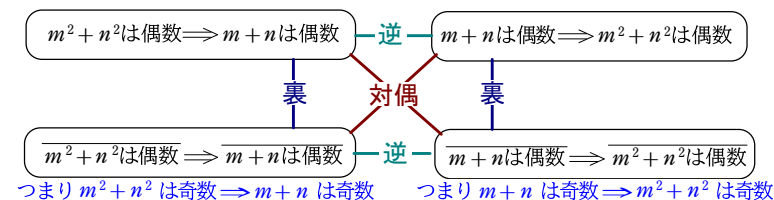
$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) = 1^2 - (\sqrt{3})^2 = 1-3 = -2$

8 m, n は自然数とする。次の命題を証明せよ。

$m^2 + n^2$ が偶数ならば、 $m+n$ は偶数である。

解説

証明



対偶「 $m+n$ が奇数ならば、 $m^2 + n^2$ は奇数である」を証明する。

$m+n$ が奇数のとき、 $m+n$ はある整数 k を用いて

$m+n = 2k+1$ と表される。

このとき $m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn$ (有名な公式です。覚えましょう。)

$m+n$ に代入 $= (2k+1)^2 - 2mn = 4k^2 + 4k + 1 - 2mn$

$= 4k^2 + 4k + 1 - 2mn$ (目標はこれが奇数であることを見せつける)

$= 2(2k^2 + 2k - mn) + 1$ (→ $2 \times$ 整数 + 1 の形になるよう無理矢理変形する。)

$2k^2 + 2k - mn$ は整数であるから、 $m^2 + n^2$ は奇数である。 (→ $2 \times$ 整数 + 1 の形になったから、奇数と言い切れる)

別解 ($m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn$ の公式が思い浮かばない人へ)

対偶「 $m+n$ が奇数ならば、 $m^2 + n^2$ は奇数である」を証明する。

$m+n$ が奇数のとき、次の [1], [2] の場合がある。

[1] m が奇数で n が偶数 [2] m が奇数で n が偶数

[1] について

m, n はある整数 k, l を用いて

$m = 2k+1, n = 2l$ と表される。

このとき $m^2 + n^2 = (2k+1)^2 + (2l)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2$ (目標はこれが奇数であることを見せつける)

$= 2(2k^2 + 2k + 2l^2) + 1$ (→ $2 \times$ 整数 + 1 の形になるよう無理矢理変形する。)

$2k^2 + 2k + 2l^2$ は整数であるから、 $m^2 + n^2$ は奇数である。 (→ $2 \times$ 整数 + 1 の形になったから、奇数と言い切れる)

[2] についても [1] と同様である。

よって、対偶は真であり、もとの命題も真である。 (→ m と n が逆になるだけで、書く内容が同じときは、こうやって書いておけばいい。)

9 次の問いに答えよ。超有名な問題です これがあるときは背理法を用います

(1) a, b は有理数とする。 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

$$a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$$

(2) $(a-2) + (b+3)\sqrt{2} = 0$ を満たす有理数 a, b の値を求めよ。

【解答】 (2) $a = 2, b = -3$

【解説】

(1)【証明】 $b \neq 0$ と仮定する。

等式 $a + b\sqrt{2} = 0$ 移項

を $b\sqrt{2} = -a$ として

両辺 b で割ると $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$ と変形できる。

ここで、 a, b は有理数であるから、有理数=分数で書ける数

$-\frac{a}{b}$ も有理数である。

このことは、 $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

よって $b = 0$

次に、 $b = 0$ とすると等式に代入して

$a + 0 \cdot \sqrt{2} = 0$ よって $a = 0$

したがって、命題「 $a + b\sqrt{2} = 0 \implies a = b = 0$ 」は真である。

この証明は前半と後半の2つに分かれています。前半では「 $b \neq 0$ 」を背理法を用いて示します。後半では前半を用いて「 $a = 0$ 」を示します。前半後半を合体して「 $a = b = 0$ 」を示しています。

両辺を0で割るのはタブーであるが、今 $b \neq 0$ と仮定しているので両辺を b で割ることができる。

$$\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

(分数で書けない) $= -a \div b$

(分数で書けない) $= -\frac{m}{n} \div \frac{q}{p}$

(分数で書けない) $= -\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$

(分数で書けない) $= -\frac{mp}{nq}$ ん?

【参考】 $a + b\sqrt{2} = 0$ となる a と b は0しかないと思っていませんか?

例えば $a = -2, b = \sqrt{2}$ を代入するとどうでしょう。

$$a + b\sqrt{2} = (-2) + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2 + 2 = 0$$

となって $a + b\sqrt{2}$ の計算結果は0になります。他にも $a = -\sqrt{2}, b = 1$

など、 a と b に無理数を用いていいなら無限にあります。

この問題は

a と b に無理数を使ってはだめだとすると、 $a + b\sqrt{2}$ の計算結果が0になるのは a も b も0のときしかない

ことを証明しています。

ちなみに $\sqrt{2}$ が $\sqrt{3}$ や π になっても同じことが成り立ちます。

(2) a, b が有理数ならば、 $a-2, b+3$ はともに有理数である。

また、 $\sqrt{2}$ は無理数である。

よって、(1) で証明したことから、

有理数 a, b が $(a-2) + (b+3)\sqrt{2} = 0$ を満たすとき

$$a-2=0, b+3=0$$

したがって $a=2, b=-3$

確かに a, b は有理数である。

(このとき、 $(a-2) + (b+3)\sqrt{2} = 0$ である。)

$a-2$ を A ,
 $b+3$ を B と考える。

(1)の結果から

A も B も有理数で $A + B\sqrt{2} = 0$ ならば

A も B も0になるしかない。

$$(a-2) + (b+3)\sqrt{2} = 0$$

↓
0

分数から2を引いても、分数に3を足してもやっぱり分数である。

$$\frac{m}{n} - 2 = \frac{m}{n} - \frac{2n}{n} = \frac{m-2n}{n}$$

$$\frac{q}{p} + 3 = \frac{q}{p} + \frac{3p}{p} = \frac{q+3p}{p}$$

【参考】(2)の最後の一行について)

難しい話になりますが、 $a=2, b=-3$ が求めた段階では、まだこれらが「答えの候補」の段階です。なぜなら $a=2, b=-3$ が求められたのは(1)の

「 $A + B\sqrt{2} = 0 \implies A = B = 0$ が真」

を用いているので、逆向きの矢印については触れていません。つまり、

「答えになるとしたら $a=2, b=-3$ しかないけど、これらも答えになるかどうか

調べないと分からないよね。もしかしたらこの問題は答え無しかもね。」

という疑念を晴らすために最後の1行があると思ってください。

こんな具体例を考えます。

例えば方程式 $x^2 = 4$ の解は $x = \pm 2$ です。±2以外に解はありません。

ただ、こんな問題はでしょう。「 x が整数の時に $x^2 = 3$ を解け」

$x^2 = 3$ となる x は $\pm\sqrt{3}$ 以外ありませんので、答えになるとしたら $\pm\sqrt{3}$ しかありません。

しかし x は整数とあるので、 $\pm\sqrt{3}$ は整数でないことから、この問題は「解無し」になります

他の問題でこの1行を入れなければならないかというと、そんなことはありません。

あくまでこの問題では片方向きの矢印の命題を用いて問題を解いているのでこうなっただけで、君たちが普通に問題を解くときは全く関係ありません。(これも難しい言い方ですが、ほとんどの問題を解くときに行っている操作(移項や方程式を解くなど)は同値変形です。つまり、逆向きを調べなくても大丈夫な操作がほとんどです。)