

第2章「集合と命題」研究 $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

前ページの例題2では、「 $\sqrt{2}$ が無理数である」ということを認めていた。
この事実を、背理法を利用して証明してみよう。

「 $\sqrt{2}$ が無理数でない」すなわち 無理数 = 有理数 = 分数で書ける数

「 $\sqrt{2}$ が有理数である」
と仮定すると、 $\sqrt{2}$ はある自然数 m, n を用いて $\sqrt{2}$ は正の数だから
分子分母は自然数

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \quad \dots\dots ①$$

と表すことができる。このとき、できる限り約分して、 m と n に1以外の正の公約数がないような分数にする。 これ以上約分できない分数を既約分数という。既約分数では、分子と分母を1より大きい数で割ることができない。

① から $\sqrt{2}n = m$
この両辺を2乗すると $(\sqrt{2}n)^2 = m^2$

$$2n^2 = m^2 \quad \dots\dots ②$$

よって、 m^2 は偶数である。 $m^2 = 2n^2 = 2 \times \text{整数の形}$

70 ページの例題1により、 m^2 が偶数ならば、 m も偶数となる。
偶数 m は、ある自然数 k を用いて、 $m = 2k$ と表されるから、

② に代入して m は正の数なので k も正の数

$$2n^2 = (2k)^2 \quad \text{つまり} \quad 2n^2 = 4k^2$$

両辺2で割って $n^2 = 2k^2$ $n^2 = 2k^2 = 2 \times \text{整数の形}$
よって、 n^2 は偶数となり、70 ページの例題1により n も偶数となる。

m と n がともに偶数となることは、
 m と n に1以外の正の公約数がないとしたことに矛盾する。

したがって、 $\sqrt{2}$ は有理数ではなく、無理数である。

終

参考

左の証明が最も有名な証明です。同じ議論をすれば「 $\sqrt{3}$ が無理数であること」を証明することができます。もう少し証明を短くしたい人はこんなことを考えてみましょう。そもそも②の時点で矛盾です。②を満たす m, n の組は存在しません。
下の表を見てみましょう。何か気がつきましたか？

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m^2	1 ²	2 ²	3 ²	4 ²	5 ²	6 ²	7 ²	8 ²	9 ²	10 ²
素因数分解	1	2 ²	3 ²	2 ⁴	5 ²	2 ² ・3 ²	7 ²	2 ⁶	3 ⁴	2 ² ・5 ²

m	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m^2	11 ²	12 ²	13 ²	14 ²	15 ²	16 ²	17 ²	18 ²	19 ²	20 ²
素因数分解	11 ²	2 ⁴ ・3 ²	13 ²	2 ² ・7 ²	3 ² ・5 ²	2 ⁸	17 ²	2 ² ・3 ⁴	19 ²	2 ⁴ ・5 ²

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2n^2$	2・1 ²	2・2 ²	2・3 ²	2・4 ²	2・5 ²	2・6 ²	2・7 ²	2・8 ²	2・9 ²	2・10 ²
素因数分解	2	2 ³	2・3 ²	2 ⁵	2・5 ²	2 ³ ・3 ²	2・7 ²	2 ⁷	2・3 ⁴	2 ³ ・5 ²

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$2n^2$	2・11 ²	2・12 ²	2・13 ²	2・14 ²	2・15 ²	2・16 ²	2・17 ²	2・18 ²	2・19 ²	2・20 ²
素因数分解	2・11 ²	2 ⁵ ・3 ²	2・13 ²	2 ³ ・7 ²	2・3 ² ・5 ²	2 ⁷	2・17 ²	2 ³ ・3 ⁴	2・19 ²	2 ⁵ ・5 ²

どこに注目するかというと「素因数2の指数」です。②の右辺の m^2 について、素因数分解すると「素因数2が現れない」か「素因数2の指数は偶数」のどちらかです。しかし②の左辺の $2n^2$ について「素因数2の指数は奇数」です。

「素因数2の指数」は「その数を2で何回割れるか」
ということなので、「素因数2が現れない」＝「2で0回割り切れる」
と考えると、②は

（②の左辺の $2n^2$ は2で奇数回割り切れる）＝（②の左辺の m^2 は2で偶数回割り切れる）
となり矛盾となります。このことを使って証明しても構いません。

Column 素数は無限に存在する

以下は有名な証明ですが、テストに出ることは滅多にありません

「素数は無限に存在する」ことを証明するには背理法が有効です。
「素数は無限には存在しない」すなわち「素数は有限個である」と仮定します。
素数が全部で n 個あるとし、 n 個の素数を小さい順に

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n \quad \textcircled{1}$$

$$m = p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1$$

p_1 が最も小さい素数(つまり $p_1 = 2$)
 p_2 が二番目に小さい素数(つまり $p_2 = 3$)
 p_3 が三番目に小さい素数(つまり $p_3 = 5$)
.....
 p_n が最も大きい素数

とします。
ここで、 n 個の素数すべてを掛けて 1 を足した数
を考えます。

m は p_n よりも大きい数ですから、
素数ではありません。

また、 m は ① のどれで割っても 1 余るので、
 m は m より小さいすべての素数で割り切れない
数であるから、 m は新しい素数となります。
しかしこれは、

「 p_n が最も大きい素数」としたことに矛盾します。
よって、「素数は無限に存在する」のです。

p_n に正の数(つまり $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$)を掛けて
さらに1を足しているから p_n より大きい
仮定から p_n が最も大きな素数なので、 p_n よりも大きい数に素数はない

$$\begin{array}{r} p_2 p_3 \dots p_n \\ p_1 \overline{) p_1 p_2 p_3 \dots p_n + 1} \\ \underline{p_1 p_2 p_3 \dots p_n} \\ 1 \end{array}$$

m を p_1 で割ると、商が $p_2 p_3 \dots p_n$ で余り 1
10は10より小さい素数2や5で割り切れる
→ 10は素数でない
11は11より小さな素数ではどれも割り切れない
→ 11も素数

参考

100以下の素数が何個あるか知っていますか？
2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、
41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97
より、全部で25個あります。

では10000以下の素数は何個でしょう？数えるのも面倒ですよね。
具体的な個数を求めるには数えるしかありませんが、
だいたい個数でいいなら公式があります（素数定理といいます）。

高校の範囲を大きく超える内容なので、
詳しくは大学生になってからで調べてみてください。

$$\frac{10000}{\log 10000} \asymp \frac{10000}{9.21} \asymp 1085.7 \text{ 個}$$

実際は1229個