

1 m は自然数とする。次の の中に適するものを、下の (a) ~ (d) のうちから 1 つずつ a, b は実数とする。次の命題の対偶を述べ、その真偽を調べよ。
 $a + b$ は無理数 $\implies a, b$ の少なくとも一方は無理数

- (1) m が 6 で割り切れることは、 m が 2 で割り切れるための 。
- (2) m が 2 で割り切れることは、 m が素数であるための 。
- (a) 必要十分条件である
(b) 必要条件であるが十分条件ではない
(c) 十分条件であるが必要条件ではない
(d) 必要条件でも十分条件でもない

解答 (1) (c) (2) (d)

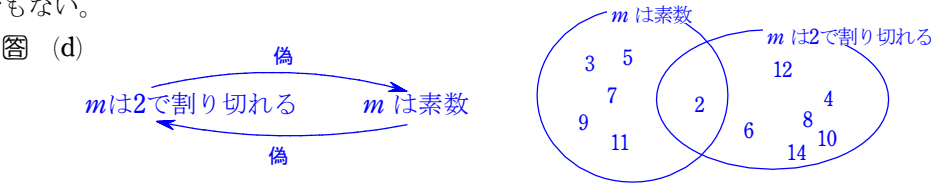
解説

(1) m は 6 の倍数ということ m は 2 の倍数ということ
「 m が 6 で割り切れる $\implies m$ が 2 で割り切れる」 は真。
「 m が 2 で割り切れる $\implies m$ が 6 で割り切れる」 は偽。(反例: $m = 8$)
よって、 m が 6 で割り切れることは、 m が 2 で割り切れるための十分条件であるが必要条件ではない。



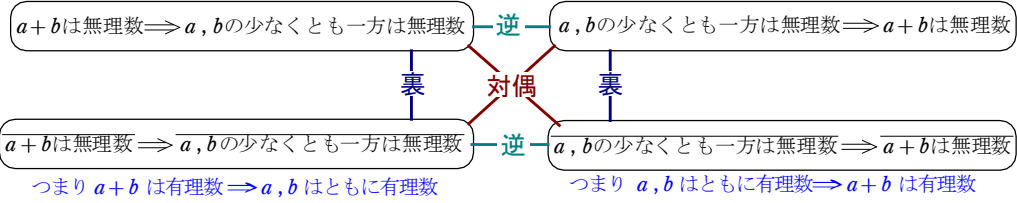
(2) 「 m が 2 で割り切れる $\implies m$ が素数である」 は偽。(反例: $m = 4$)
「 m が素数である $\implies m$ が 2 で割り切れる」 は偽。(反例: $m = 3$)

よって、 m が 2 で割り切れることは、 m が素数であるための必要条件でも十分条件でもない。



解答 対偶「 a, b はともに有理数 $\implies a + b$ は有理数」は真

解説



対偶は
「 a, b はともに有理数 $\implies a + b$ は有理数」
これは真である。
有理数 = 分数で書ける数
「 a, b はともに有理数 $\implies a + b$ は有理数」
文字が2個の場合
「 a, b の少なくとも一方は」 \iff 「 a, b はともに」
 $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}$ とすると
 $a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq} = \frac{mq + np}{nq}$
通分 $a + b$ も分数になる
「分数と分数と足したら分数になりますか？」
と聞かれている。当たり前である。

参考

逆の「 a, b の少なくとも一方は無理数 $\implies a + b$ は無理数」
裏の「 $a + b$ は有理数 $\implies a, b$ はともに有理数」
これらは両方偽である。(反例: $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$)
 $a + b = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$
0は有理数であるから