

第2章「集合と命題」 4 命題と証明

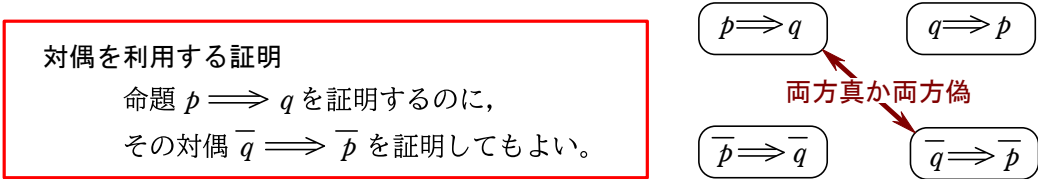
命題 $p \implies q$ が真であることを証明したいとき、 p を仮定して q を導くのが困難なこともある。このような場合に有効な証明方法を学ぼう。



これは真?偽? (https://www.fujitv.co.jp/b_hp/27h2004/)
「お客様は神様です」の対偶は?真偽は?

＜対偶を利用する証明＞

命題とその対偶の真偽は一致するから、次のことがいえる。

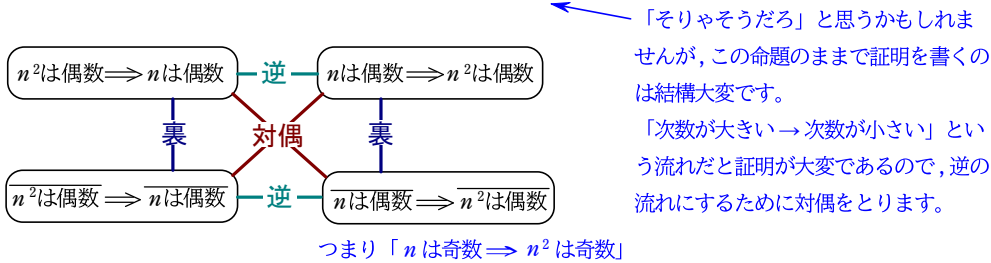


注意 「命題が真であることを証明する」ことを、単に「命題を証明する」と表現した。

参考 対偶をとると証明しやすくなる。対偶をとると明らかな命題になるなど劇的に問題が解きやすくなる。しかし、いつでもこの方法でうまくいくわけではない。直接証明できない場合に対偶をとることを考えてみよう。

例題 1 n は整数とする。対偶を利用して、次の命題を証明せよ。

n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。



証明

これも当たり前ですが、当たり前を証明するために文字を使う
対偶「 n が奇数ならば、 n^2 は奇数である」を証明する。
 n が奇数のとき、 n はある整数 k を用いて $n = 2k + 1$ と表される。

このとき $n^2 = (2k + 1)^2$ 必ず書く (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2

$$= (2k)^2 + 2 \cdot 2k \cdot 1 + 1^2$$
$$= 4k^2 + 4k + 1$$

目標はこれが奇数であることを見せつける
 $\rightarrow 2 \times \text{整数} + 1$ の形になるよう無理矢理変形する。

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

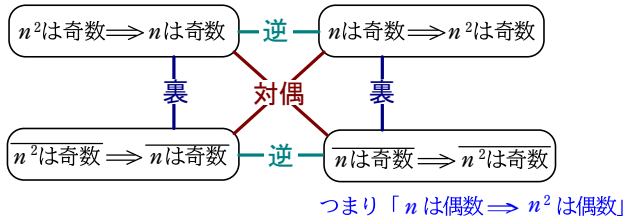
必ず書く $2k^2 + 2k$ は整数であるから、 n^2 は奇数である。
よって、対偶は真であり、もとの命題も真である。 終

k は整数なので
 $2 \times (\text{整数})^2 + 2 \times \text{整数}$ の計算結果は整数
になる。分数や小数になる訳がない。

奇数 = 偶数 + 1
= 2の倍数 + 1
= 2 $\times$ 整数 + 1
= 2 $\times k$ + 1
数学語で奇数は
2k + 1 と翻訳
されます

練習 22 n は整数とする。対偶を利用して、次の命題を証明せよ。

n^2 が奇数ならば、 n は奇数である。



証明

対偶「 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である」を証明する。
 n が偶数のとき、 n はある整数 k を用いて $n = 2k$ と表される。
このとき $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$
 $2k^2$ は整数であるから、 n^2 は偶数である。
よって、対偶は真であり、もとの命題も真である。

偶数 = 2の倍数 = $2 \times$ 整数 = $2 \times k$
数学語で偶数は $2k$ と翻訳されます

目標はこれが偶数であることを見せつける
→ $2 \times$ 整数 の形になるよう無理矢理変形する。
 $2 \times$ 整数 の形になったから、偶数と言い切れる

＜背理法を利用する証明＞

ある命題について、その命題が成り立たないと仮定して、矛盾を導くことでもとの命題を証明する方法がある。

参考 <https://www.homemate-research-police.com/useful/glossary/police/2292301/>

アリバイとは、法律用語で「現場不在証明」を意味する英単語「alibi」をカタカナにした言葉。日本でも「（事件などの）現場に居なかったことの証明」を意味する。事件などが発生した特定の時間において、どこか別の場所に居たことを証明することが「アリバイ」の意味であり、これによって事件現場には居なかったことを証明する。



アリバイ

「犯行時刻に現場にいたと仮定する」→「しかしその時刻には別の場所にいた」
→矛盾
→「犯行時刻に現場にはいなかった」
→「犯人ではない」

次の例題 2 の証明は、以下のような流れである。

- ① 命題が成り立たないと仮定する。
- ② ① の仮定のもとで矛盾を導く。
- ③ ② で矛盾が生じたのは、① の仮定が間違っているからである。
- ④ したがって、もとの命題が成り立つ。

このような証明方法を **背理法** という。

背理法を利用して命題を証明するには、次のように行う。

背理法を利用する証明

命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより、もとの命題が真であると結論する。

(イメージ) 数学の世界は完璧です。その完璧な世界で何かにケチをつけたとします。するとそのケチが原因で数学の世界のどこかに不都合が生じることになります。だからそのケチをつけたことが間違いだった、やっぱり正しかったね。

参考 自然数 1, 2, 3, …… に、0 と $-1, -2, -3, ……$ とを合わせて **整数** という。

また、整数 m と 0 でない整数 n を用いて分数 $\frac{m}{n}$ の形に表される数を **有理数** という。

たとえば、 $\frac{1}{3}$ や $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}$ は有理数である。整数 m は $\frac{m}{1}$ と表されるから、

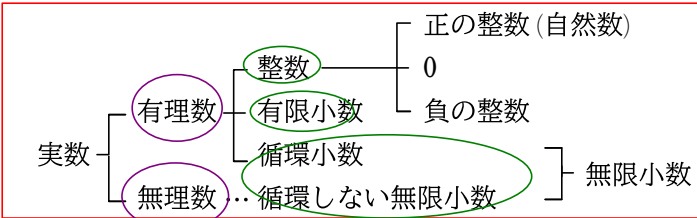
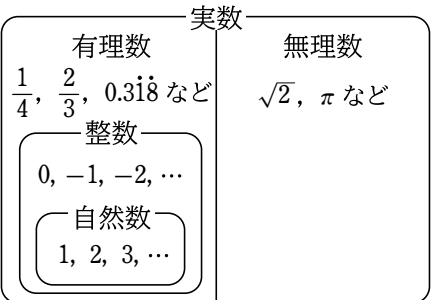
有理数である。ここでは、数についてまとめよう。
有理数は英語で rational number といいます。ratio が比という意味で、比で表される数、つまり分数で表される数という意味です。

整数と、有限小数または無限小数で表される数とを合わせて **実数** という。

実数のうち、有理数でない数を **無理数** という。

無理数は、循環しない無限小数で表される数であり、分母と分子がともに整数である分数で表すことはできない。

たとえば、 $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ 、円周率 π は、無理数であることが知られている。



実数を「有理数」と「無理数」で分類 実数を「整数」と「有限小数」と「無限小数」で分類

「 $\sqrt{2}$ は分数で書けない数である」ことを証明の途中で使うということ

例題 2 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

$$1 + \sqrt{2} = 2.414213\dots$$

$1 + \sqrt{2}$ は無理数である。

証明 $1 + \sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、 $1 + \sqrt{2}$ は有理数である。
その有理数を r とすると、 $1 + \sqrt{2} = r$ より $\sqrt{2} = r - 1$
 r が有理数ならば $r - 1$ も有理数であるから、
この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。
したがって、 $1 + \sqrt{2}$ は無理数である。 (分数で書けない) = $\frac{n}{m} - 1$
(分数で書けない) = $\frac{n}{m} - \frac{m}{m}$
(分数で書けない) = $\frac{n-m}{m}$ ん?

終

「無理数=有理数」の形を目指して矛盾を導く

参考

難しい問題の証明ではよく背理法が用いられます。フェルマーの最終定理も背理法で証明されました。

この背理法ですが「その命題が真である」ことは分かりますが「なぜ真なのか」ということは分かりません。正しいことを否定して議論していくとどこかに矛盾が生じます。したがってもともとの命題が真であることはわかります。しかし、中身について切り込んでいくわけではないので、「なぜ真なのか」という問いは残ったままです。

僕が大学で数学を学んでいたとき、ある教授がこう言っていました。

「ファルマーの最終定理が証明されたが、あれは背理法で証明されているので

なぜフェルマーの最終定理が成り立つのかまだ解明されていない。

私はその構造を研究しています」

あれから20年以上経ちました。今はどこまで解明されているのでしょうかね。

フェルマーの最終定理

n を 3 以上の自然数とすると、 $x^n + y^n = z^n$ を満たす正の整数 x, y, z の組は存在しない。

数学史に名を連ねる巨人たちが300年以上の歳月を費やしても証明できなかったこの命題を、1995年、米国プリンストン大学のイギリス人数学者アンドリュー・ワイルズが証明した。

練習 23 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

$1 + 3\sqrt{2}$ は無理数である。

証明 「無理数=有理数」の形を目指して矛盾を導く

無理数 = 有理数 = 分数で書ける数

$1 + 3\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、 $1 + 3\sqrt{2}$ は有理数である。

その有理数を r とすると、 $1 + 3\sqrt{2} = r$ より $3\sqrt{2} = r - 1$

両辺 3 で割って $\sqrt{2} = \frac{r-1}{3}$
 r が有理数ならば $\frac{r-1}{3}$ も有理数であるから、
この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。
したがって、 $1 + 3\sqrt{2}$ は無理数である。

(分数で書けない) = $(r-1) \div 3$
(分数で書けない) = $\left(\frac{n}{m} - 1\right) \div 3$
(分数で書けない) = $\frac{n-m}{m} \div 3$
(分数で書けない) = $\frac{n-m}{m} \times \frac{1}{3}$
(分数で書けない) = $\frac{n-m}{3m}$ ん?