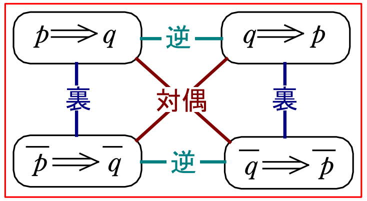
命題 $p \Longrightarrow q$ に対して

$q \Longrightarrow p$ を $p \Longrightarrow q$ の **逆**　　$p \Longrightarrow q$ の仮定と結論を逆にしたもの

$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を $p \Longrightarrow q$ の **対偶**　　$p \Longrightarrow q$ の仮定と結論を逆にして，それぞれ否定したもの

$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ を $p \Longrightarrow q$ の **裏**　　$p \Longrightarrow q$ の仮定と結論をそれぞれ否定したもの

という。命題 $p \Longrightarrow q$ とその逆，対偶，裏は，互いに右の図のような関係にある。ここでは，命題とその逆，対偶，裏の真偽について学ぼう。




## ＜命題の逆，対偶，裏＞

例 15　$a$ を実数とするとき，命題「$a=1 \Longrightarrow a^2=1$」の逆，対偶，裏

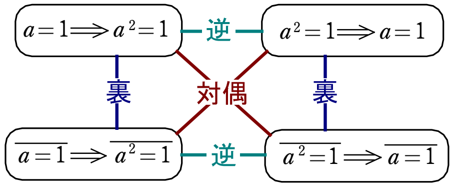
逆は　　$a^2=1 \Longrightarrow a=1$

対偶は　$a^2 \fallingdotseq 1 \Longrightarrow a \fallingdotseq 1$

裏は　　$a \fallingdotseq 1 \Longrightarrow a^2 \fallingdotseq 1$　　終

ノットイコールと読む

まゆげがついた文章を作って，その後言い換える



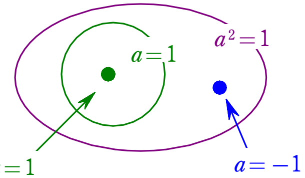

つまり $a \fallingdotseq 1 \Longrightarrow a^2 \fallingdotseq 1$　　つまり $a^2 \fallingdotseq 1 \Longrightarrow a \fallingdotseq 1$

命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽と，その命題の逆 $q \Longrightarrow p$ の真偽について考えてみよう。

例 15 の命題「$a=1 \Longrightarrow a^2=1$」は真である。

しかし，この命題の逆「$a^2=1 \Longrightarrow a=1$」は，$a=-1$ が反例となり，偽である。

$a=-1$ は $a^2=1$ を満たすが，$a=1$ を満たさない。




一般に，命題とその逆の真偽については，次のことがいえる。

**もとの命題が真であっても，その逆が真であるとは限らない。**

必要条件・十分条件を調べたときも，
行きか帰りかどっちかが真で偽になったことは多かったですよね。

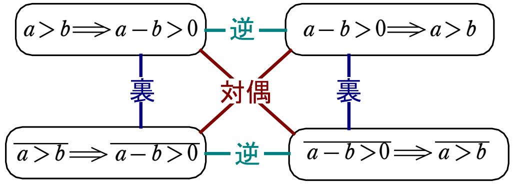
練習 20　$a$，$b$ は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

(1)　$a>b \Longrightarrow a-b>0$　　　(2)　$a=0 \Longrightarrow ab=0$

解答

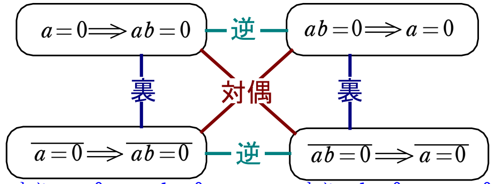
(1)　命題「$a>b \Longrightarrow a-b>0$」
　　これは真である。
　逆は「$a-b>0 \Longrightarrow a>b$」
　　これは真である。
　対偶は「$a-b \leqq 0 \Longrightarrow a \leqq b$」
　　これは真である。
　裏は「$a \leqq b \Longrightarrow a-b \leqq 0$」
　　これは真である。

移項しただけなので，全部真である




つまり $a \leqq b \Longrightarrow a-b \leqq 0$　　つまり $a-b \leqq 0 \Longrightarrow a \leqq b$

(2)　命題「$a=0 \Longrightarrow ab=0$」
　　これは真である。
　逆は「$ab=0 \Longrightarrow a=0$」
　　これは偽である。
　　(反例：$a=1$，$b=0$)
　対偶は「$ab \fallingdotseq 0 \Longrightarrow a \fallingdotseq 0$」
　　これは真である。
　裏は「$a \fallingdotseq 0 \Longrightarrow ab \fallingdotseq 0$」
　　これは偽である。
　　(反例：$a=1$，$b=0$)

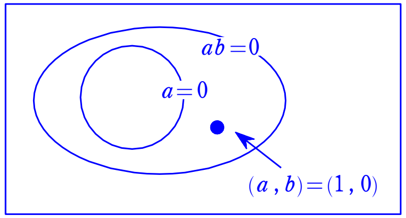



つまり $a \fallingdotseq 0 \Longrightarrow ab \fallingdotseq 0$　　つまり $ab \fallingdotseq 0 \Longrightarrow a \fallingdotseq 0$

積 $ab$ が0だからといって，
$a$ は絶対に0かというと，
$b$ だけが0のときもある。。

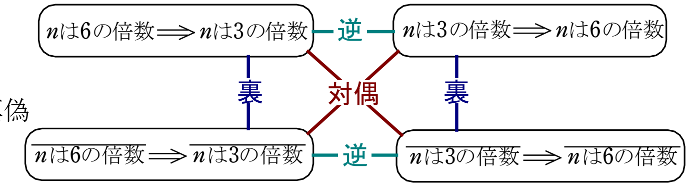
積 $ab$ が0でないのは，
$a$ も $b$ も0でないからである。

$a$ が0でなくても，
$b$ が0だと積 $ab$ は0になる



## <命題の対偶とその真偽>

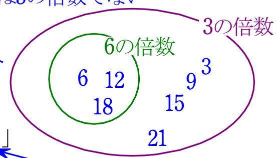
命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽と，その命題の対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽について考えてみよう。



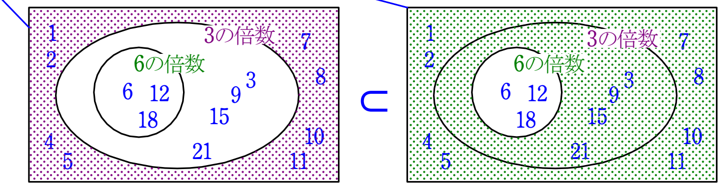

つまり $n$ は6の倍数でない ⟹ $n$ は3の倍数でない

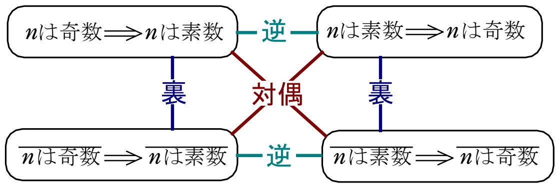
つまり $n$ は3の倍数でない ⟹ $n$ は6の倍数でない

$n$ は自然数とする。たとえば，命題「$n$は6の倍数⟹ $n$は3の倍数」は真である。




また，この命題の対偶「$n$は3の倍数でない⟹ $n$は6の倍数でない」も真である。

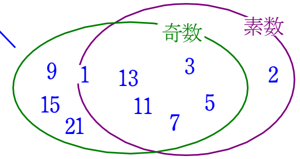


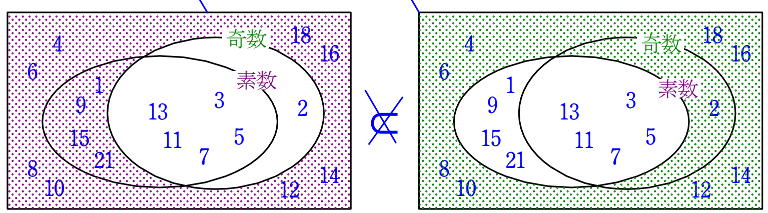

さらに，命題「$n$は奇数⟹ $n$は素数」は偽である。 反例 $n=1$ や $n=9$

つまり $n$ は偶数 ⟹ $n$ は素数でない

つまり $n$ は素数でない ⟹ $n$ は偶数




また，この命題の対偶「$n$は素数でない⟹ $n$は偶数」も偽である。 反例 $n=1$ や $n=9$




全体集合 $U$ の要素の中で，条件 $p$ を満たすもの全体の集合を $P$ で，条件 $q$ を満たすもの全体の集合を $Q$ で表す。一般に，

$p \Longrightarrow q$ が真であることは $P \subset Q$ が成り立つことと同じ，

$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ が真であることは $\overline{Q} \subset \overline{P}$ が成り立つことと同じ，

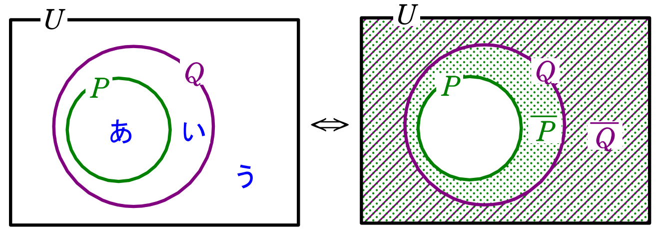
である。

真ならばすっぽり入っている

また，集合 $P$，$Q$ については

$P \subset Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \subset \overline{P}$

が成り立つ。




$p \Rightarrow q$ が真

$P$ が $Q$ にすっぽりはいる

$P$ が $Q$ にすっぽりはいっていれば，必然的に $\overline{Q}$ が $\overline{P}$ にすっぽり入る

$\overline{Q}$ の中に入るなら $\overline{P}$ の中に必ず入る ⟶ 対偶の $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ も真

紫の斜線中に緑がすっぽり入っている。

つまり $\overline{P} \supset \overline{Q}$ が成り立つ。

$\overline{P}=$ $\boxed{い}$，$\boxed{う}$

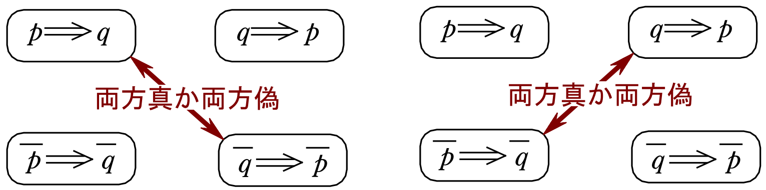
$\overline{Q}=$ $\boxed{う}$

$\boxed{い}$ の分だけ $\overline{P}$ の方が $\overline{Q}$ より広い

以上のことから，次のことがいえる。

対偶証明法といいます。すごく大事です。

> **命題とその対偶の真偽**
>
> **命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。**




元の命題と対偶の命題が偽のとき，反例は同じになる。

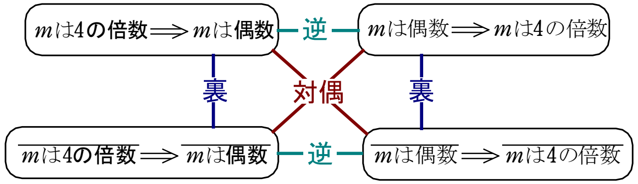
練習 21　$m$, $n$ は自然数とする。次の命題とその対偶の真偽を調べ，それらが一致することを確かめよ。

(1)　$m$ は 4 の倍数 $\Longrightarrow$ $m$ は偶数

(2)　$m+n$ は偶数 $\Longrightarrow$ $m$ は偶数　または　$n$ は偶数

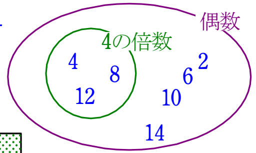
$\boxed{\text{解答}}$

(1)

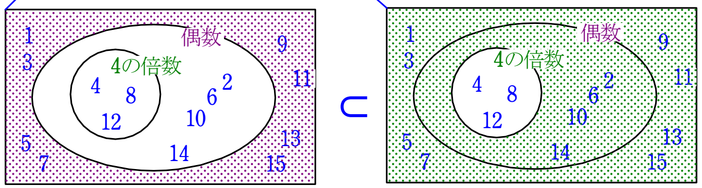



つまり $m$ は4の倍数でない $\Longrightarrow$ $m$ は奇数　　つまり $m$ は奇数 $\Longrightarrow$ $m$ は4の倍数でない

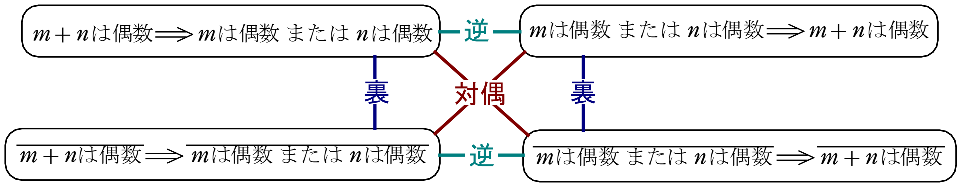
命題「$m$ は 4 の倍数 $\Longrightarrow$ $m$ は偶数」は真である。




対偶は「$m$ は奇数 $\Longrightarrow$ $m$ は 4 の倍数でない」　これも真である。




(2)




つまり $m+n$ は奇数 $\Longrightarrow$ $m$ は奇数 かつ $n$ は奇数　　つまり $m$ は奇数 かつ $n$ は奇数 $\Longrightarrow$ $m+n$ は奇数

$\overline{m\text{は偶数 または }n\text{は偶数}}$ $\to$ $\overline{m\text{は偶数}}$ かつ $\overline{n\text{は偶数}}$ $\to$ $m$は奇数 かつ $n$は奇数

命題「$m+n$ は偶数 $\Longrightarrow$ $m$ は偶数　または　$n$ は偶数」は偽である。

(反例：$m=n=1$)　　和が偶数 $\to$ 偶＋偶か奇＋奇

対偶は「$m$ は奇数　かつ　$n$ は奇数 $\Longrightarrow$ $m+n$ は奇数」　これも偽である。

(反例：$m=n=1$)　　奇＋奇＝偶 より偽

反例は同じでいける