次の２つの文は，正しいことを述べているといえるだろうか。

1.41　1.73　2.23

(A)「整数４は偶数である」　　(B)「$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$ である」

ここでは，ある事柄について述べられた文や式が，正しいか正しくないかを論理的に考えるために，命題と条件について学ぼう。

＜命 題＞

上の２つの文について，(A) は正しく，(B) は正しくない。一般に，正しいか正しくないかが定まる文や式を **命題** という。また，命題が正しいとき，その命題は **真** であるといい，正しくないとき，その命題は **偽** であるという。

「しん」と読む　「ぎ」と読む

たとえば，上の命題 (A) は真であり，命題 (B) は偽である。

補足　「100 は大きい数である」は，正しいか正しくないかが定まらないから，命題ではない。

「カレーは辛い」
「担任の先生はおもしろい」など
人によって真か偽のどちらかに分かれる質問は命題といいません。
「マグロは魚である」
「タコは鳥である」など
誰に聞いても同じ反応をする質問を命題といいます。

練習 10　次の命題の真偽を述べよ。

(1)　実数 -3 について $\sqrt{(-3)^2}=-3$ である。

(2)　正三角形は二等辺三角形である。

解答

ルートの前に何もついてないから正の数

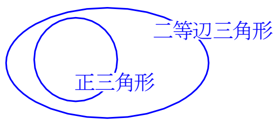
(1)　$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$ であるから，$\sqrt{(-3)^2}\neq -3$ である。

負の数

したがって，与えられた命題は偽である。

(2)　正三角形は二等辺三角形でもある。

したがって，与えられた命題は真である。



＜条 件＞

文字 x を含む文や式には，x の値によって，その真偽が変わるものがある。

たとえば「$x>3$」という式は，$x=4$ のときは真であるが，$x=2$ のときは偽である。

「$4>3$」←真　　「$2>3$」←偽

x に数字を入れると，その度に命題ができあがる。x の値によって真偽が分かれることもある。

「$x>3$」，「x は素数である」などのように，文字 x を含む文や式で，x に値を代入することで真偽が定まるものを，x に関する **条件** という。

条件の中には，文字を２つ以上含むものもある。たとえば，a，b が実数を表すとき，「$a+b>0$」，「$a>0$ かつ $b>0$」などは，a，b に関する条件である。

条件を考える場合には，条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を，その条件の **全体集合** という。

「$\sqrt{2}$ は偶数」→偽→「じゃあ，$\sqrt{2}$ って奇数なの？」

条件「x は偶数である」について，$x=\sqrt{2}$ とすると「$\sqrt{2}$ は偶数である」という何とも言えない文章ができあがる。
そもそも $\sqrt{2}$ は偶数や奇数などで分けられる数ではないので，x に分数やルートを代入してはダメである。
だから事前に x の全体集合を自然数か整数で設定しておかなければならない。
ただし，大体の問題では事前に全体集合が設定されているので，生徒はあまり気にしなくていい話である。

例 8　自然数全体の集合を N とし，x は N の要素とする。
x に関する条件「x は素数である」は，
$x=2$ のとき　真，$x=4$ のとき　偽　である。　終

「2 は素数である」　「4 は素数である」

練習 11　実数全体の集合を R とし，x は R の要素とする。x に関する条件「$x\geqq 1$」について，x に次の値を代入して得られる命題の真偽を調べよ。

(1)　$x=2$　　(2)　$x=-1$　　(3)　$x=\sqrt{2}$

解答

(1)　命題「$2\geqq 1$」となる。　これは　真

(2)　命題「$-1\geqq 1$」となる。これは　偽

(3)　命題「$\sqrt{2}\geqq 1$」となる。これは　真

$\sqrt{2}=1.41\cdots$

＜命題 $p \Longrightarrow q$＞

今後，1つ1つの条件を単に p，q などの文字で表すことにする。

実数について述べた命題「3より大きければ，1より大きい」は，

実数 x に関する2つの条件 $p: x>3$，$q: x>1$ を用いて，

p ならば q ← $x>3$ ならば $x>1$

と表現することができる。 無理矢理文字を登場させる

仮定 結論
$p \Longrightarrow q$

このような命題を，記号「$\Longrightarrow$」を用いて $p \Longrightarrow q$ と書く。 この矢印は「ならば」と読む

命題 $p \Longrightarrow q$ について，p を **仮定**，q を **結論** という。

矢印の前を仮定，矢印の後ろを結論という。

x を実数とするとき，命題

「$x>3 \Longrightarrow x>1$」は真である。また

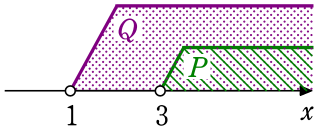
3よりも右にいるなら，必ず1よりも右にいることになる

$x>3$ を満たす x の値全体の集合を P，

$x>1$ を満たす x の値全体の集合を Q

とすると，$P \subset Q$ が成り立つ。

緑が紫にすっぽり入っている



$P=\{x \mid x>3,\ x \text{ は実数}\}$

$Q=\{x \mid x>1,\ x \text{ は実数}\}$

一般に，全体集合を U とし，U の要素のうち，

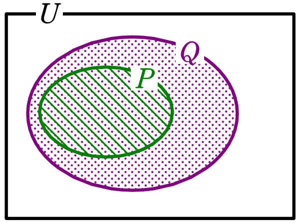
条件 p を満たすもの全体の集合を P，

条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とすると，命題 $p \Longrightarrow q$ は

P の要素はすべて Q の要素である

ということを表している。



「P の中にいるなら，必ず Q の中にもいますか」と聞かれている状態で，真か偽か調べないと分からない。

すなわち，$p \Longrightarrow q$ が真ならば，$P \subset Q$ が成り立つ。

逆に，$P \subset Q$ が成り立てば，$p \Longrightarrow q$ は真である。

前ページで調べたことから，次のことがいえる。

命題 $p \Longrightarrow q$ ← これを主張しているだけで，まだ真か偽か分からない。

1 命題 $p \Longrightarrow q$ は，「p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。

2 条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき，

「命題 $p \Longrightarrow q$ が真である」と「$P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

仮定 結論
$p \Longrightarrow q$ が真

同じ

仮定が結論にすっぽり入る

練習 12 次の2つの条件 p，q について，命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽を，集合を用いて調べよ。

(1) 実数 x に関する2つの条件 $p: x \leqq 2$，$q: x \leqq 4$

(2) 自然数 m に関する2つの条件

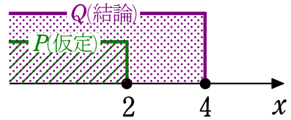
$p: m$ は12の正の約数，$q: m$ は18の正の約数

解答

(1) 条件 p を満たすもの全体の集合を P，条件 q を満たすもの全体の集合を Q とする。

右の図より $P \subset Q$ が成り立つから，

命題 $p \Longrightarrow q$ は真である。

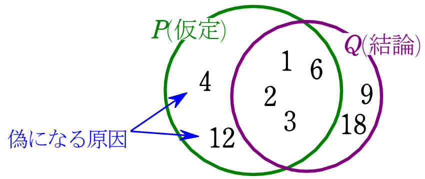


(2) 条件 p を満たすもの全体の集合を P，

条件 q を満たすもの全体の集合を Q とする。

$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$，

$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$



よって，$P \subset Q$ は成り立たないから，命題 $p \Longrightarrow q$ は偽である。

命題 $p \Longrightarrow q$ が偽であるのは

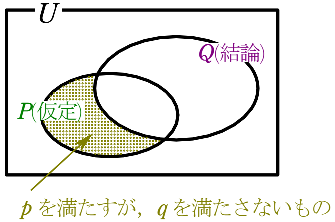
p を満たすが，q を満たさないもの　(※)

が存在するときである。

したがって，命題 $p \Longrightarrow q$ が偽であること

を示すには，(※) の例を 1 つだけあげればよい。

そのような例を **反例** という。



P(仮定) が Q(結論) からはみ出ている

反例がたくさんあったとしても，その中で 1 個だけを示せば，その命題が偽であることを証明できる。

＜必要条件と十分条件＞

2 つの条件 p，q について，　大前提

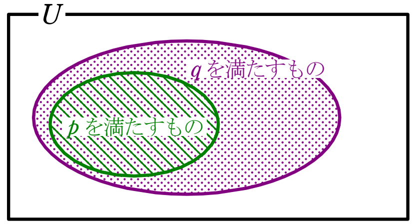
命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，

p は q であるための **十分条件** である，

q は p であるための **必要条件** である

という。

目玉焼きの黄身を十分条件，白身を必要条件という。



$p \Longrightarrow q$ が真ならば，$P \subset Q$ が成り立つ

例 9　反例をあげて，命題が偽であることを示す。

a は実数とする。

命題「$a^2=4 \Longrightarrow a=2$」

「2乗して 4 になるのは 2 しかないよね」と聞かれている。

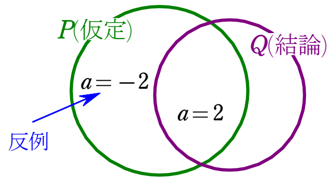
-2 だってそうだから，この命題は偽。

について，$a=-2$ は，$a^2=4$ を満たすが，

$a=2$ を満たさない。

よって，$a=-2$ は反例となるから，

この命題は偽である。　終



例 10　a は実数とする。

「3を2乗したら9ですか？」と聞かれている。当然，真である。

命題「$a=3 \Longrightarrow a^2=9$」は真であるから，

$a=3$ は $a^2=9$ であるための十分条件，

$a^2=9$ は $a=3$ であるための必要条件

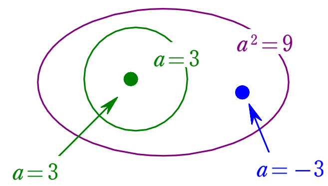
である。

じゅう　　よう

$p \Longrightarrow q$ が真

$\boxed{\text{十分条件}}$　$\boxed{\text{必要条件}}$

終



(すっぽり入っていることを確認したら)

狭い方が十分条件

広い方が必要条件

(広いの「ひ」は必要の「ひ」)

練習 13　n は自然数とする。次の命題が偽であることを示せ。

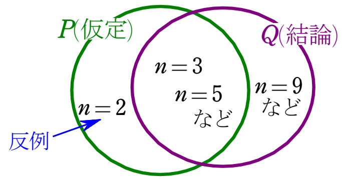
n が素数ならば，n は奇数である。

解答

2 は素数であるが奇数ではない。

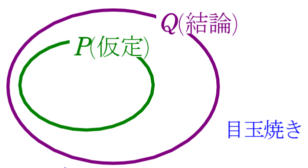
よって，$n=2$ は反例となるから，

この命題は偽である。



仮定　結論

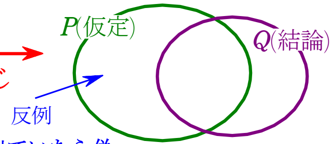
$p \Longrightarrow q$　が真　⟷　同じ



仮定が結論にすっぽり入っていたら真

仮定　結論

$p \Longrightarrow q$　が偽　⟷　同じ



仮定が結論からはみ出ていたら偽

参考

十分条件…それだけ分かればもう十分なもの

必要条件…前提として最低限必要とされるもの

「十分」→ たくさんあるので広そうなイメージ

「必要」→ 必要最低限という狭そうなイメージ

このように，言葉のイメージだと逆になってしまうので，間違えないようにしましょう。

例

トマトと野菜は右図の包含関係です。

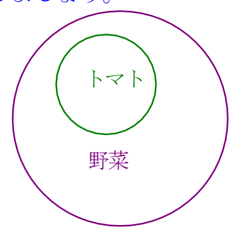
トマトは野菜の種類の 1 つなので、「トマト $\Longrightarrow$ 野菜」は真です。

もしあなたが、何か正体不明なAを見つけたとき「Aはトマトである」

と分かれば、あなたはAを「野菜である」と断定するには十分ですね。

（あえて「Aは野菜である」と言わなくても、さっき「Aはトマトである」とわかったので、その段階で「Aは野菜である」ことは分かってしまっていますね。）

これが十分条件のイメージです。（十分条件は結構厳しい条件なので、狭いイメージです）



次は必要条件についてです。
あなたはまた、正体不明なBを見つけました。Bをよく見ている中で、なにかヒントを見つけて「Bは野菜である」と断定できたとします。しかし、Bが野菜であることは分かっても、野菜は種類がたくさんあるので、Bは人参かも、ピーマンかもしれません。
しかし、この「Bは野菜である」ということが「Bがトマトかどうか」を考えるためには必要不可欠ですよね。そもそも野菜と分からなければトマトと断定できるわけがありません。「Bは魚である」と思った後に「Bはトマトかな」と思うわけがありません。「Bは野菜である」という前提があるから「Bはトマトである」可能性があるわけです。これが必要条件のイメージです。（必要条件は結構緩い条件なので、広いイメージです）

包んでいる(広い方)…必要条件、包まれているの(狭い)…十分条件

問題を解くためのテクニック

行って帰って１０分必要

$$p\text{であることは } q \text{ であるための・・・}$$

十分(10分)

必要

片道5分ということです

練習 14　a は実数，n は自然数とする。次の $\boxed{}$ に，「必要」，「十分」のうち，適する言葉を入れよ。

(1)　$a>1$ は $a>0$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

(2)　n が 3 の倍数であることは $n=9$ であるための $\boxed{}$ 条件である。

このような問題では「行き」と「帰り」のそれぞれの真偽を調べましょう。

解答

(1)　「$a>1 \Longrightarrow a>0$」は真，

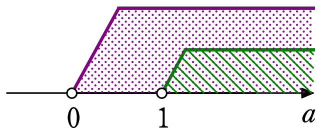
「$a>0 \Longrightarrow a>1$」は偽。$\left(反例：a=\dfrac{1}{2}\right)$

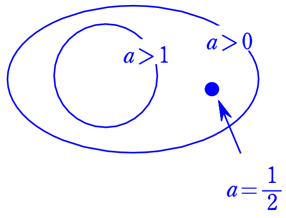
よって　十分

真

$a>1$ は $a>0$ であるための…

偽





(2)　「n が 3 の倍数 $\Longrightarrow n=9$」は偽 (反例：$n=3$)，

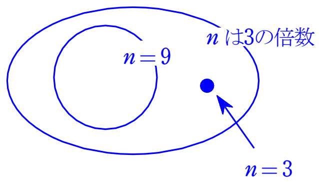
「$n=9 \Longrightarrow n$ が 3 の倍数」は真。

よって　必要

偽

n が 3 の倍数であることは $n=9$ であるための…

真



2つの命題を合体した書き方

2つの条件 p，q について，「$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$」を $p \Longleftrightarrow q$ と書く。
命題 $p \Longrightarrow q$ と $q \Longrightarrow p$ がともに真のとき，すなわち命題 $p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき，p は q であるための **必要十分条件** であるという。同様に，q は p であるための必要十分条件である。

また，このとき，p と q は **同値** であるという。

「同値」とは「数学的に言っていることは同じ」という意味。

$p \overset{真}{\underset{真}{\Longleftrightarrow}} q \longrightarrow$ 必要十分条件 同値

例 11　a は実数とする。

命題「$a=0 \Longrightarrow a^2=0$」と「$a^2=0 \Longrightarrow a=0$」は

当たり前

ともに真であるから，「$a=0 \overset{真}{\underset{真}{\Longleftrightarrow}} a^2=0$」が成り立つ。

$a^2=\begin{cases}正（aが正のとき）\\ 0\ \ （aが0のとき）\\ 正（aが負のとき）\end{cases}$

よって，$a=0$ は $a^2=0$ であるための必要十分条件である。

同様に，$a^2=0$ は $a=0$ であるための必要十分条件である。

すなわち，$a=0$ と $a^2=0$ は同値である。　終

練習 15　a，b，c は実数とする。次の中で，$a=b$ と同値な条件をすべて選べ。

①　$a+c=b+c$　　②　$a^2=b^2$　　③　$(a-b)^2=0$

解答

$a=b$ の両辺に c を足すと $a+c=b+c$

「$a=b \Rightarrow a+c=b+c$」は「$a=b$ から初めて $a+c=b+c$ まで変形できますか?」と聞かれていると考えましょう。変形できるなら真です。

① 「$a=b \overset{真}{\underset{真}{\Longleftrightarrow}} a+c=b+c$」が成り立つ。

$a+c=b+c$ の両辺から c を引くと $a+c-c=b+c-c$　よって $a=b$

② 「$a^2=b^2 \Longrightarrow a=b$」は偽。(反例：$a=1$，$b=-1$)

例えば $x^2=9$ となる x は $x=\pm3$ である。同様に，$a^2=b^2$ となる a は $a=\pm b$ と2つある。

$a=b \overset{真}{\underset{偽}{\rightleftarrows}} a^2=b^2$

当たり前

③ 「$a-b=0 \overset{真}{\underset{真}{\Longleftrightarrow}} (a-b)^2=0$」が成り立つ。

$(a-b)^2=\begin{cases}正（a-bが正のとき）\\ 0\ \ （a-bが0のとき）\\ 正（a-bが負のとき）\end{cases}$

$(a-b)^2$ が0になるのは，中身の $a-b$ が0になるときしかない。

$-b$ を移項

すなわち「$a=b \Longleftrightarrow (a-b)^2=0$」が成り立つ。

よって，$a=b$ と同値な条件は　①，③

練習 16　a，b は実数，m，n は自然数とする。次の $\boxed{}$ に，「必要条件であるが十分条件ではない」，「十分条件であるが必要条件ではない」，「必要十分条件である」のうち，適する言葉を入れよ。

(1)　四角形 ABCD が長方形であることは，四角形 ABCD が平行四辺形であるための $\boxed{}$。

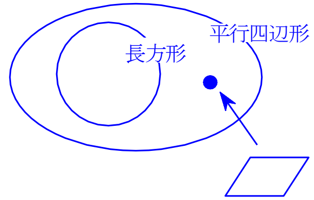
(2)　$a>b$ は，$2a+1>2b+1$ であるための $\boxed{}$。

(3)　積 mn が偶数であることは，m が偶数であるための $\boxed{}$。

解答

長方形 は 平行四辺形 であるための… $\overset{真}{\underset{偽}{\rightleftarrows}}$

(1) 「四角形 ABCD が長方形である $\Longrightarrow$ 四角形 ABCD が平行四辺形である」は真。
「四角形 ABCD が平行四辺形である $\Longrightarrow$ 四角形 ABCD が長方形である」は偽。
よって，四角形 ABCD が長方形であることは四角形 ABCD が平行四辺形であるための十分条件であるが必要条件ではない。



$a>b$ の両辺2倍して $2a>2b$
さらに両辺に1を足して $2a+1>2b+1$

(2) 「$a>b \Longrightarrow 2a+1>2b+1$」は真。
「$2a+1>2b+1 \Longrightarrow a>b$」は真。
よって，$a>b$ は $2a+1>2b+1$ であるための必要十分条件である。

$2a+1>2b+1$ の両辺から1を引いて
$2a+1-1>2b+1-1$　よって $2a>2b$
さらに両辺を2で割って
$\dfrac{2a}{2}>\dfrac{2b}{2}$　よって　$a>b$

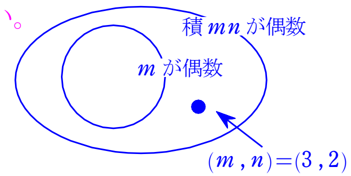
$a>b$ は $2a+1>2b+1$ であるための… $\overset{真}{\underset{真}{\rightleftarrows}}$

m でなくて n が2の倍数なら積も2の倍数になる。

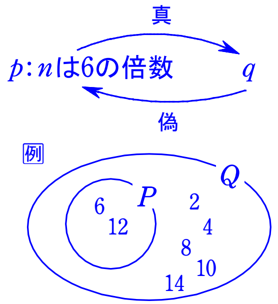
(3) 「積 mn が偶数である $\Longrightarrow$ m が偶数である」は偽。(反例：$m=3$，$n=2$)
「m が偶数である $\Longrightarrow$ 積 mn が偶数である」は真。
よって，積 mn が偶数であることは m が偶数であるための必要条件であるが十分条件ではない。

2の倍数 $\times n$=2の倍数

積 mn が偶数は m が偶数であるための… $\overset{偽}{\underset{真}{\rightleftarrows}}$



研究　自然数 n に関する条件 p を「p : n は 6 の倍数」とするとき，
「p は q であるための十分条件であるが必要条件ではない」
が正しくなるような条件 q を 1 つ考えよう。



解答

「条件p: n は6の倍数」が十分条件になるので
p は狭くなる。ゆえに条件 p は q に含まれる。
したがって p を含むような集合を考えればいいから
たとえば「 q:nは2の倍数 」「 q:nは3の倍数 」
などがある。

＜条件の否定＞

条件 p に対して，「p でない」も条件である。これを p の **否定** といい，$\overline{p}$ で表す。
条件 $\overline{p}$ の否定はもとの条件 p である。
「n は偶数ではない」ことはない→「n は奇数」ではない→ n は偶数

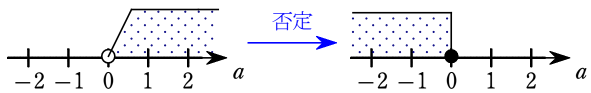
「n は3の倍数」→「n は3の倍数でない」など
言い換えのできないものもある。

例 12　実数 a に関する条件の否定

(1)　条件「a は有理数である」の否定は，これでもいいが，できれば単語も反対にしたほうが美しい
「a は有理数でない」　すなわち　「a は無理数である」
有理数 ↔ 無理数

(2)　条件「$a>0$」の否定は，
「$a>0$ でない」　すなわち　「$a \leqq 0$」　終

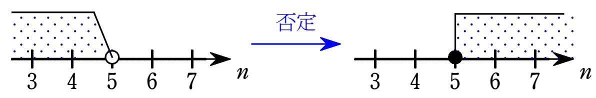
範囲の場合は「〇〇でない」ではなく，反対の範囲で答える
不等号の向きが変わるだけでなく「白丸」と「黒丸」も変わる



練習 17　n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。
(1)　n は偶数である　　　　(2)　n は 5 より小さい

解答
こっちの方がいい
(1)　n は奇数である　(n は偶数でない)　　奇数 ↔ 偶数
(2)　n は 5 以上である

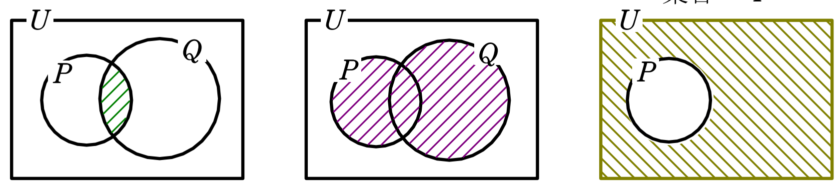
より小さい ↔ 以上
より大きい ↔ 以下



＜「かつ」，「または」と否定＞

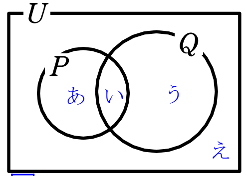
全体集合を U とし，U の要素の中で，条件 p を満たすもの全体の集合を P で，条件 q を満たすもの全体の集合を Q で表す。このとき，条件 p かつ q，p または q，$\overline{p}$ と集合の関係は，次ページのようになる。

条件　p かつ q　　集合　$P \cap Q$
条件　p または q　　集合　$P \cup Q$
条件　$\overline{p}$　　集合　$\overline{P}$



例　自然数 m , n に関する 2 つの条件　p :　m は偶数である，　q : n は偶数である
(い, あ)　(い, う)

	nは偶数(q)	nは奇数($\overline{q}$)
mは偶数(p)	い	あ
mは奇数($\overline{p}$)	う	え



p かつ q　→　「 m は偶数」(い, あ) かつ「 n は偶数」(い, う)　→　い

p または q　→　「 m は偶数」(い, あ) または「 n は偶数」(い, う)　→　あ，い，う

$\overline{p}$　→　「 m は偶数」(い, あ) でない　→　「 m は奇数」　→　う，え

[参考]　$A\cup B$，$A\cap B$ の補集合について，次の **ド・モルガンの法則** が成り立つ。

ド・モルガンの法則　　まゆげが切れると鼻がひっくり返る

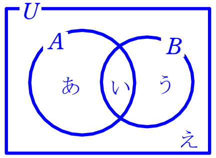
1　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　　2　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

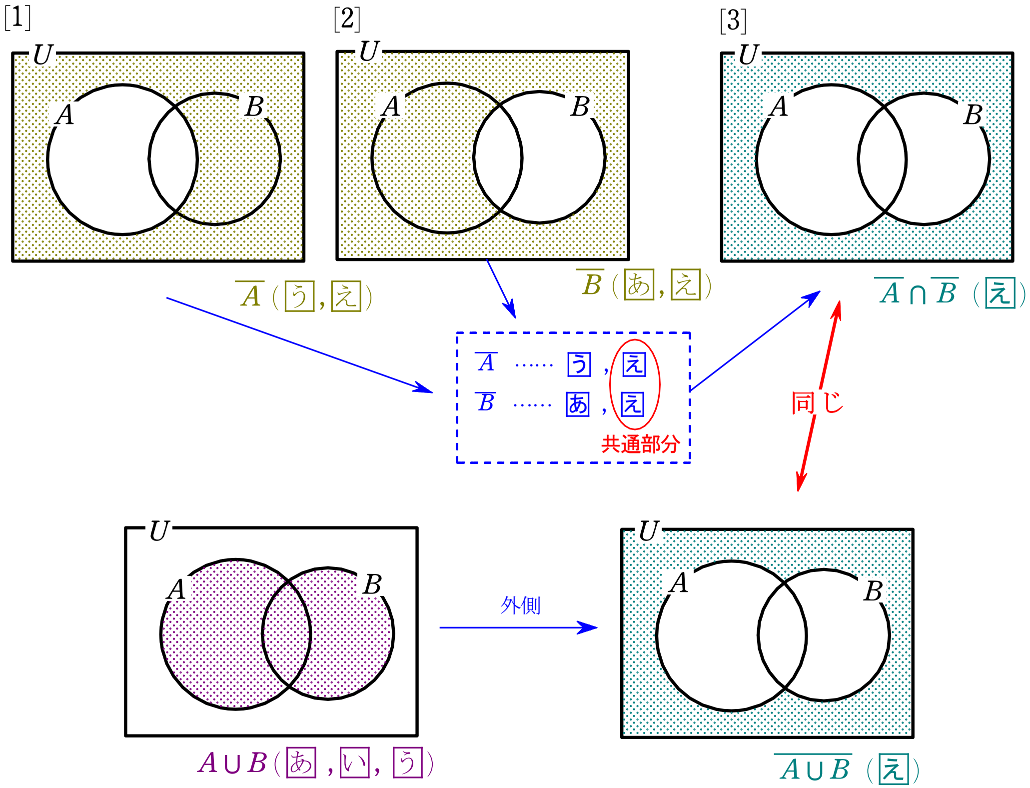
$\overline{A}\cup\overline{B}$ や $\overline{A}\cap\overline{B}$ を求めるのは苦手な者が多い。

この法則を用いて，$\overline{A\cap B}$ や $\overline{A\cup B}$ を求めた方が楽な場合がある。

$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は，それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり，その共通部分 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は，図 [3] の斜線部分である。

図 [3] の斜線部分は $\overline{A\cup B}$ であるから，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ が成り立つ。



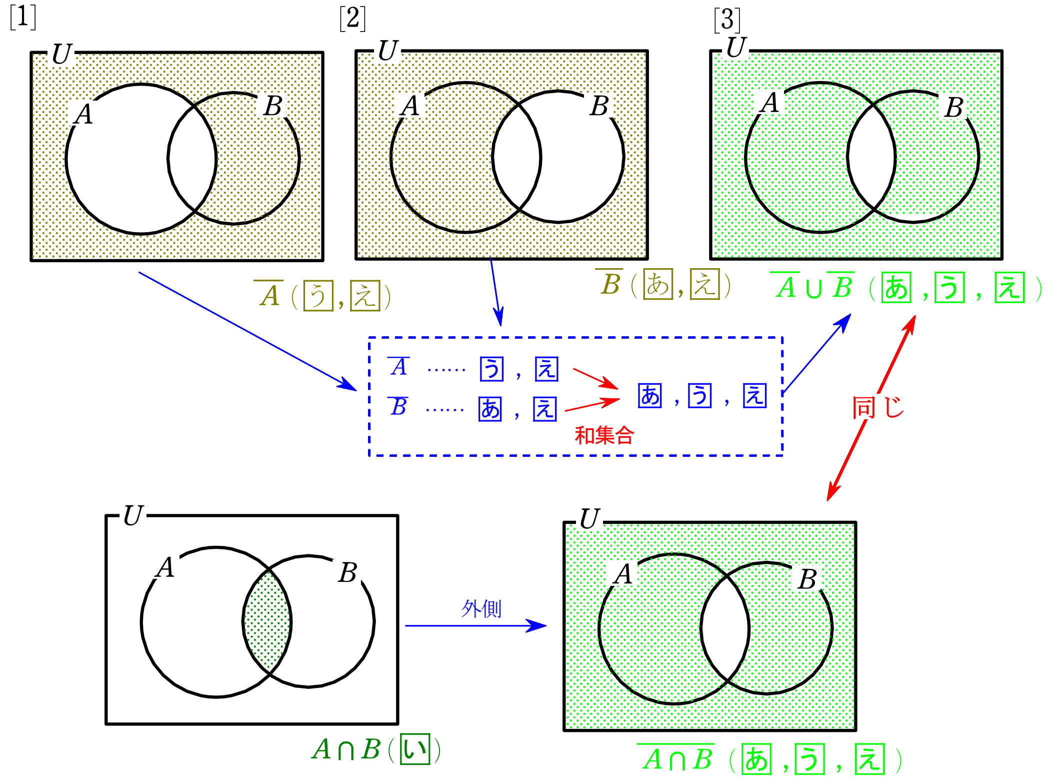


$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ が成り立つことを，上の方法にならって図を用いて確かめよ。

[解答]

$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は，それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり，その和集合 $\overline{A}\cup\overline{B}$ は，図 [3] の斜線部分である。

図 [3] の斜線部分は $\overline{A\cap B}$ であるから，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ が成り立つ。



ド・モルガンの法則により，2つの集合 P, Q について，

$$\overline{P\cap Q}=\overline{P}\cup\overline{Q},\quad \overline{P\cup Q}=\overline{P}\cap\overline{Q}$$

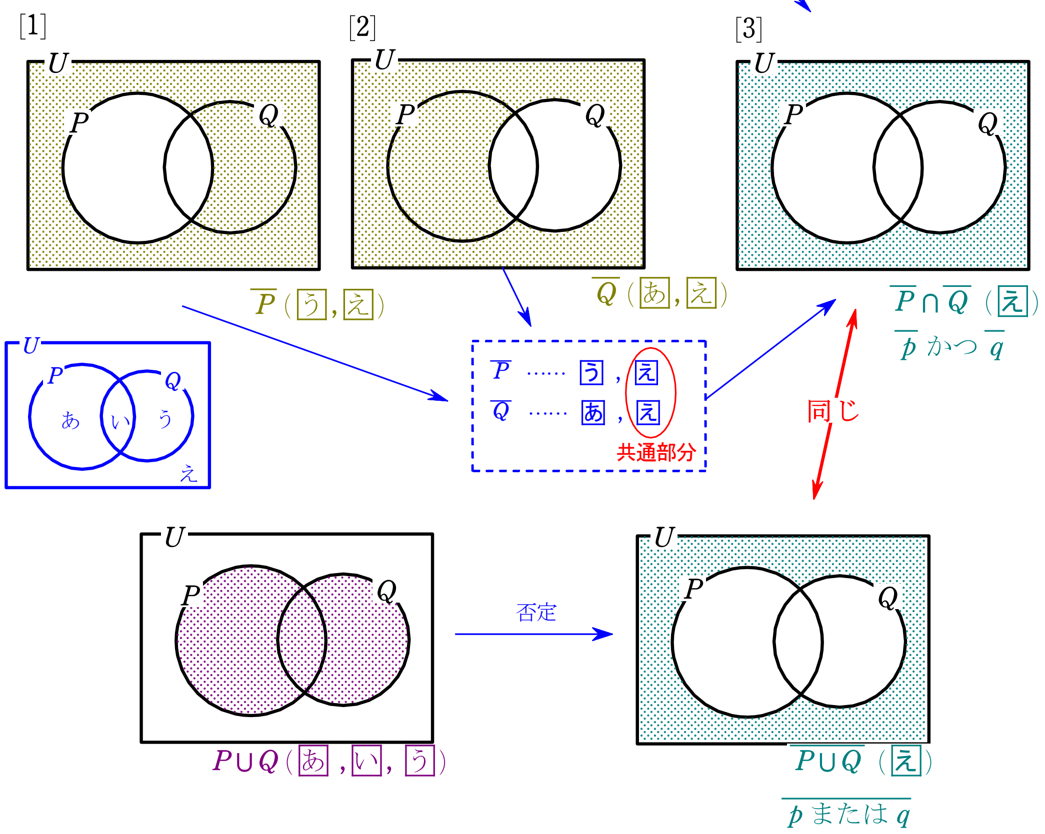
まゆげが切れると鼻がひっくり返る

が成り立つ。したがって，条件 p, q に対して，次が成り立つ。

「かつ」の否定，「または」の否定　　まゆげが切れると「かつ」⟷「または」

$\overline{p\ \text{かつ}\ q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$　　こっちは自分でやってみよう

$\overline{p\ \text{または}\ q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$



例 13　a, b は実数とする。　　$a=0$ ⟷ $a\neq0$

(1) 「$a=0$ かつ $b=0$」の否定は　　「$a\neq0$ または $b\neq0$」

$\overline{a=0\ \text{かつ}\ b=0}$ → $\overline{a=0}$ または $\overline{b=0}$ → $a\neq0$ または $b\neq0$

(2) 「$a>0$ または $b>0$」の否定は　　「$a\leqq0$ かつ $b\leqq0$」 終

$\overline{a>0\ \text{または}\ b>0}$ → $\overline{a>0}$ かつ $\overline{b>0}$ → $a\leqq0$ かつ $b\leqq0$

参考

「$a=0$ かつ $b=0$」の否定は「$a\neq0$ かつ $b\neq0$」ではありません

例えばデートの待ち合わせを考えてみましょう。

２人とも待ち合わせ時間に間に合えばいいですが，

それが起こらなかった(つまり否定)を考えてみましょう。

両方とも遅刻してきたということですか？

それ以外にも，片方が待たされた可能性もありますよね。

つまり

「彼氏は時間に間に合った」かつ「彼女は時間に間に合った」

の否定は

「彼氏は時間に間に合わない」かつ「彼女は時間に間に合わない」

ではなく

「彼氏は時間に間に合わない」または「彼女は時間に間に合わない」

となります。

練習 18　a，b は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)　$a>0$ かつ $b>0$　　　　(2)　$a=0$ または $b=0$

解答

(1)　$a \leqq 0$ または $b \leqq 0$　　$\overline{a>0 \text{ かつ } b>0} \to \overline{a>0}$ または $\overline{b>0} \to a \leqq 0$ または $b \leqq 0$

(2)　$a \fallingdotseq 0$ かつ $b \fallingdotseq 0$　　$\overline{a=0 \text{ または } b=0} \to \overline{a=0}$ かつ $\overline{b=0} \to a \fallingdotseq 0$ かつ $b \fallingdotseq 0$

参考 あるクラスで宿題を回収しました。

いつもは全員提出しますが、今日は違いました。

さて、「全員提出」が起こらなかった(つまり否定)とすると

何が起こったか考えてみましょう。

全員提出しなかったのでしょうか？先生泣いてしまいますね。

誰か提出しなかった者がいるので，全員提出にならなかったのですね。

つまり「全員提出した」の否定は

「全員提出しなかった」　　えんぴつ　＜Σ三三三三三三三∃

all　(·∀·)[笑]

ではなく

exist

「ある生徒について提出しなかった」「提出しなかった生徒が存在する」

「少なくとも１人提出しなかった」

などとなります。

例 14

文字が2個の場合

「m，nの少なくとも一方は」⟷「m，n はともに」

m，n は自然数とする。条件

「m，n の少なくとも一方は偶数である」

の否定は

「m，n はともに奇数である」　終

m	偶	偶	奇	奇
n	偶	奇	偶	奇

少なくとも一方は偶数

(片方だけ偶数かもしれないし，

両方偶数かもしれない)

「偶数であるものが存在する」

と言ってもよい

$\overline{m, n \text{ の少なくとも一方は偶数である}} \to m, n$ はともに $\overline{\text{偶数である}} \to m, n$ はともに 奇数である

練習 19　a，b は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1)　a，b の少なくとも一方は有理数である

(2)　a，b はともに有理数である

解答

(1)　a，b はともに無理数である

$\overline{a, b \text{ の少なくとも一方は有理数である}} \to a, b$ はともに $\overline{\text{有理数である}} \to a, b$ はともに 無理数である

(2)　a，b の少なくとも一方は無理数である

$\overline{a, b \text{ はともに有理数である}} \to a, b$ の少なくとも一方は $\overline{\text{有理数である}}$

$\to a, b$ の少なくとも一方は 無理数である

研究　次の命題の否定を述べよ。

(1)　すべての実数 x について　$x^2>0$

(2)　ある素数は偶数である。

(3)　任意の実数 x，y に対して　$x^2-4xy+4y^2>0$

(4)　$x^2-3x-10=0$ である自然数 x が存在する。

注意　「すべての x に対して p である」の否定は「ある x に対して $\overline{p}$ である」

「ある x に対して p である」の否定は「すべての x に対して $\overline{p}$ である」

解答

(1)　ある実数 x について　$x^2 \leqq 0$

$\overline{\text{すべての実数 } x \text{ について } x^2>0} \to$ ある実数 x について $\overline{x^2>0}$

$\to$ ある実数 x について $x^2 \leqq 0$

(2)　すべての素数は奇数である。

$\overline{\text{ある素数は偶数である。}} \to$ すべての素数は $\overline{\text{偶数である。}}$

$\to$　すべての素数は 奇数である。

(3)　ある実数 x，y に対して　$x^2-4xy+4y^2 \leqq 0$　　　任意 ＝ すべて

$\overline{\text{任意の実数 } x, y \text{ に対して } x^2-4xy+4y^2>0} \to$ ある実数 x, y に対して $\overline{x^2-4xy+4y^2>0}$

$\to$ ある実数 x, y に対して $x^2-4xy+4y^2 \leqq 0$

〇〇である自然数 x が存在する ＝ ある自然数 x に対して〇〇である。

(4)　すべての自然数 x に対して　$x^2-3x-10 \fallingdotseq 0$

$\overline{x^2-3x-10=0 \text{ である自然数 } x \text{ が存在する}} \to$ すべての自然数 x に対して $\overline{x^2-3x-10=0}$

$\to$ すべての自然数 x に対して $x^2-3x-10 \fallingdotseq 0$