第２章「集合と命題」１　集合

「１から 10 までの自然数の集まり」というと，その集まりの範囲がはっきりしている。
しかし，「大きい数の集まり」というと，その集まりの範囲がはっきりしていない。
ここでは，範囲がはっきりした「ものの集まり」の表現の方法を学ぼう。

入るか入らないかはっきりするものの集まりを集合という
「1年C組の生徒の集まり」←集合
「美味しいものの集まり」←集合ではない

集合は大文字，要素は小文字の
アルファベットをよく使います

＜集合と要素＞

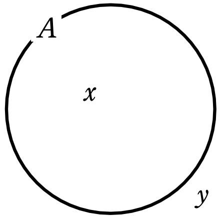
数学では，「１から 10 までの自然数の集まり」のように，範囲がはっきりしたものの集まりを **集合** といい，集合を構成している１つ１つのものを，その集合の **要素** という。

x が集合 A の要素であるとき，x は集合 A に **属する** という。

また，集合とその要素について，

x が集合 A の要素であることを　$x \in A$，
y が集合 A の要素でないことを　$y \notin A$

と表す。要素を英語でelement というので，記号 ∈ はeからきている。



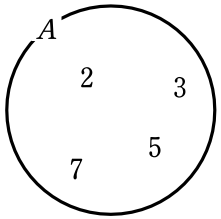
例１　集合の要素

2 以上の自然数で，正の約数が 1 とその数自身のみである数を素数という。

10 以下の素数全体の集合を A とすると，
A の要素は 2，3，5，7 である。
このとき，集合 A について，たとえば

$$2 \in A, \quad 1 \notin A$$

である。　1は素数ではない　終



練習１　正の奇数全体の集合を A とする。次の $\boxed{}$ に適する記号 ∈ または ∉ を入れよ。

(1)　$5 \boxed{} A$　　(2)　$6 \boxed{} A$　　(3)　$-3 \boxed{} A$

解答　(1)　$5 \in A$　　(2)　$6 \notin A$　　(3)　$-3 \notin A$

＜集合の表し方＞

集合の表し方には，{　} の中に要素を書き並べて表す方法がある。

例２　要素を書き並べて表す方法(列記法という)

「必ず中括弧を使うこと。丸括弧ではダメ」
「…を用いてもいいが，規則性がわかるように3つくらいは書く」
「小さい順に書くと良い」

(1)　18 の正の約数全体の集合 A は

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$$

(2)　20 以下の正の偶数全体の集合 B は

$$B = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 20\}$$

(3)　自然数全体の集合 C は

$$C = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$$

終

補足　(2)，(3) のように，規則性が明らかであるとき，要素の個数が多い場合や無限に多くの要素がある場合は，省略記号 …… を用いて表すことがある。

練習２　次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1)　12 の正の約数全体の集合 A
(2)　30 以下の正の奇数全体の集合 B

解答　(1)　$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$　　(2)　$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots,\ 29\}$

要素の満たす条件を書いて，集合を表す方法もある。例2の集合 A，B は，たとえば，それぞれ次のようにも表される。

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 20\}$

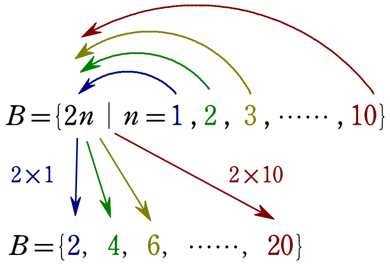
例3　要素の満たす条件を書いて表す方法(説明法という)

(1)　$A=\{x \mid x$ は18の正の約数$\}$
(2)　$B=\{2n \mid n$ は10以下の自然数$\}$

終

中括弧　縦棒
$\{\ x \mid \boxed{}\ \}$
要素の代表
x の満たす条件

補足　(2)では，$2n$ の n に 1，2，3，……，10 を代入して得られる数が B の各要素であることを表している。



練習3　次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(1)　$A=\{x \mid x$ は20以下の3の正の倍数$\}$
(2)　$B=\{3n+1 \mid n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}$

解答　(1)　$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$　　(2)　$B=\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots\cdots\}$

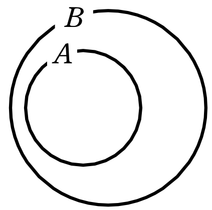
研究　集合 $C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$ を，例3のように，要素の満たす条件を書いて表す方法で表してみよう。

解答　$C=\{x \mid x$ は15以下の正の奇数$\}$
$C=\{2n+1 \mid n=0,1,2,\cdots\cdots,7\}$
$C=\{2n-1 \mid n=1,2,3,\cdots\cdots,8\}$　など

<部分集合>

2つの集合 A，B について，A のすべての要素が B の要素でもあるとき，A を B の **部分集合** という。
このとき，A は B に **含まれる**，または B は A を **含む** といい，$A\subset B$，または $B\supset A$ で表す。
集合 A 自身も A の部分集合である。すなわち，$A\subset A$ である。
また，A と B の要素がすべて一致しているとき，A と B は **等しい** といい，$A=B$ で表す。

集合の書き方が異なっていても，袋の中身が同じならば「等しい」という。
不等号と同じで，⊂の方をよく使うイメージがあります
$A\subset B$ は $A<B$ と同じで，B の方が A よりも大きいので，
B が A を包んでいるイメージを持ちましょう。



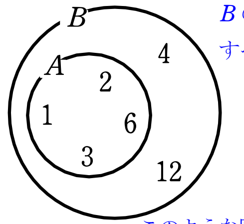
$A\subset B$

A が B にすっぽり入っている

注意 ∈と⊂に注意
あつし∈先生
3年C組⊂中学3年

例4　2つの集合の関係

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ と $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ については，$A\subset B$ である。
また，6の正の約数全体の集合を C とすると，$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ であるから，$A=C$ である。



B の中に A がすっぽり入っている

このような図をベン図という

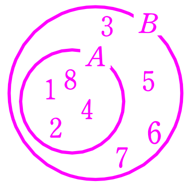
終

練習4　次の2つの集合の関係を，⊂，＝ を使って表せ。

(1)　$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$
(2)　$C=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$，10の正の約数全体の集合 D
(3)　$P=\{x \mid x$ は12以下の自然数$\}$，$Q=\{x \mid x$ は12の正の約数$\}$

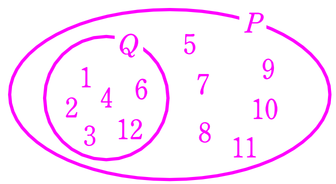
解答

(1)　$A\subset B$



(2)　10の正の約数をすべて書き出すと　1，2，5，10
したがって　$D=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$
よって　$C=D$

(3)　$P=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 12\}$，
$Q=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$
よって　$P\supset Q$
(もしくは $Q\subset P$)

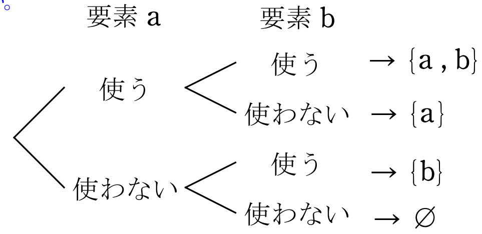


要素が 1 つもない集合も考える。これを **空集合** といい，$\varnothing$ で表す。
空集合 $\varnothing$ は，どんな集合に対しても，その部分集合であると約束する。
昔は「ファイ」と読みました。$\{\varnothing\}$ と書くのは間違いです。

例 5　集合 {a，b} の部分集合は，次の 4 個である。
　$\varnothing$，{a}，{b}，{a，b}　終

部分集合とは「もともとの集合の要素を使ってできる集合」のこと。表や樹形図などを用いて「使う･使わない」を考えるとよい。

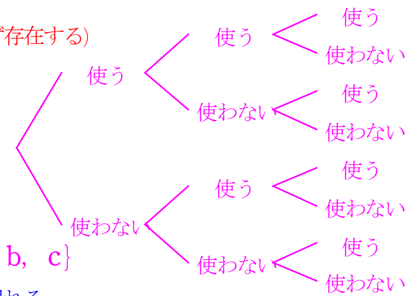
集合	a	b
$\varnothing$	使わない	使わない
{a}	使う	使わない
{b}	使わない	使う
{a , b}	使う	使う



空集合 $\varnothing$ および{a，b} 自身も部分集合である。
(部分集合と言われたら，「空っぽの袋」「自分自身」の２つは必ず存在する)

練習 5　次の集合の部分集合をすべてあげよ。
(1)　{1，2}　　　(2)　{a，b，c}

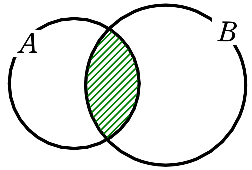
解答
(1)　$\varnothing$，{1}，{2}，{1，2}
(2)　$\varnothing$，{a}，{b}，{c}，{a，b}，{a，c}，{b，c}，{a，b，c}
右のような樹形図を考えるとよい。2×2×2=8個の部分集合が現れる。



＜共通部分と和集合＞

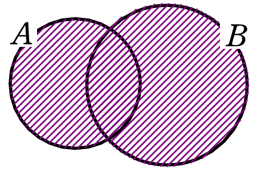
集合 A，B のどちらにも属する要素全体の集合を A と B の **共通部分** といい，英語で「intersection」
$A\cap B$ で表す。また，A，B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を
「A cap B」と読む。帽子みたいだから。
A と B の **和集合** といい，$A\cup B$ で表す。
英語で「union」　「A cup B」と読む。カップみたいだから。
union のUがこの記号の由来です。

共通部分 $A\cap B$



$A\cap B=\{x\mid x\in A$ かつ $x\in B\}$

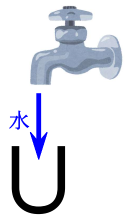
和集合 $A\cup B$



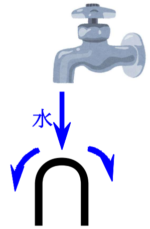
$A\cup B=\{x\mid x\in A$ または $x\in B\}$

両方の袋に登場するのが共通部分　　袋の中にいるもの全てを集めたのが和集合

参考 (覚え方 https://note.com/suupen/n/ne8cecd820dce)



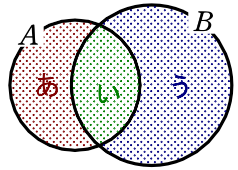
形からして水がいっぱい溜まる
→　多い　→　和集合



形からして水が余り溜まらない
→　少ない　→　共通部分

参考

A ……　あ，い
B ……　う，い



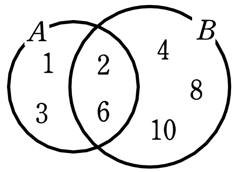
A と B の両方に共通して現れる場所が「共通部分」
(最大公約数のイメージ)

A ……　あ，い
B ……　う，い
→ あ，い，う

6 ＝ 2×3
10 ＝ 2×5
最小公倍数 30
2×3×5
最大公約数 2

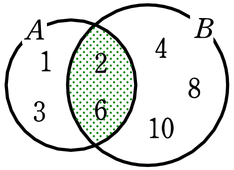
A と B において，登場する部分をすべて合体させた場所が「和集合」
(最小公倍数のイメージ)
和 ＝ 合体
お互いに足りない部分を補って 同じ場所を作る

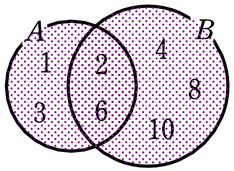
例 6　(1)　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ について



まず，円を２つ重ねた図を書いて，その中に要素を書き込んでいくこと。

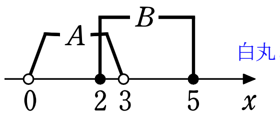
$A\cap B=\{2,\ 6\}$
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$





(2)　$A=\{x \mid 0<x<3,\ x$ は実数$\}$，
$B=\{x \mid 2\leqq x\leqq 5,\ x$ は実数$\}$
について

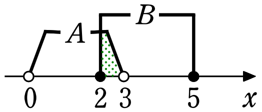
集合が x の範囲で表されているときは数直線を書くこと

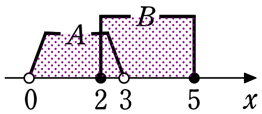


白丸と黒丸に注意

$A\cap B=\{x \mid 2\leqq x<3,\ x$ は実数$\}$
$A\cup B=\{x \mid 0<x\leqq 5,\ x$ は実数$\}$

「x は実数」と書くこと　終





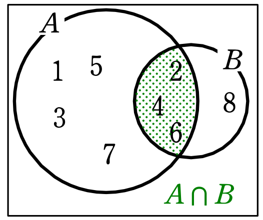
練習 6　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$C=\{1,\ 3\}$ について，
次の集合を求めよ。

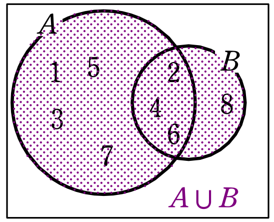
(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$B\cap C$　　(4)　$B\cup C$

解答

(1)　$A\cap B=\{2,\ 4,\ 6\}$

(2)　$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

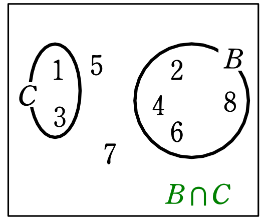




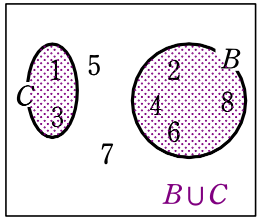
(3)　$B\cap C=\varnothing$

共通部分がないからといって「答えなし」ではない。
要素がないなら空っぽの袋と考える。

(4)　$B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$



袋がかぶってなければ
共通部分は空っぽ
→　空集合$\varnothing$



袋がかぶってなければ
和集合は２つの袋を
合体しただけ

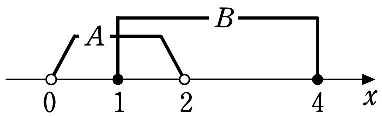
練習 7　$A=\{x \mid 0<x<2,\ x$ は実数$\}$，$B=\{x \mid 1\leqq x\leqq 4,\ x$ は実数$\}$ について，
次の集合を求めよ。

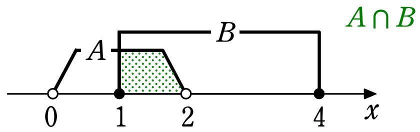
(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$

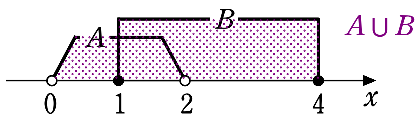
解答

(1)　$A\cap B=\{x \mid 1\leqq x<2,\ x$ は実数$\}$

(2)　$A\cup B=\{x \mid 0<x\leqq 4,\ x$ は実数$\}$







＜補集合＞

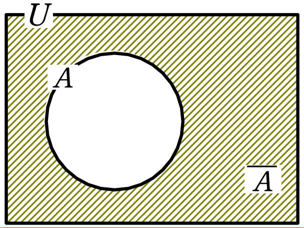
　集合を考えるときは，1 つの集合 U を決めて，その部分集合について考えることが多い。
このとき，U を **全体集合** という。

全体集合を英語で universal set というので，頭文字の U が良く使われる。

体力テストについて，学校全体の中で，中学3年の記録について考えます。
この学校全体での記録が「全体集合」で，
中学3年の記録が「部分集合」になります。

　全体集合 U の部分集合 A に対して，U の要素で，A には属さない要素全体の集合を，U に関する A の **補集合** といい，$\overline{A}$ で表す。
「A バー」と読む

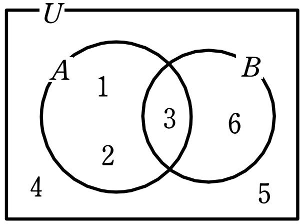
補集合 $\overline{A}$

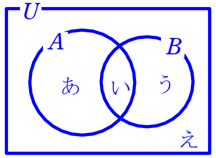


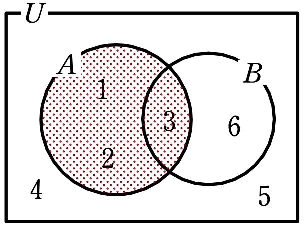
A の外側

例 7　補集合を求める。

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
を全体集合とする。
U の部分集合
$A=\{1,\ 2,\ 3\}$,　$B=\{3,\ 6\}$
について　$\overline{A}=\{4,\ 5,\ 6\}$
また，$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
であるから $\overline{A\cup B}=\{4,\ 5\}$　終

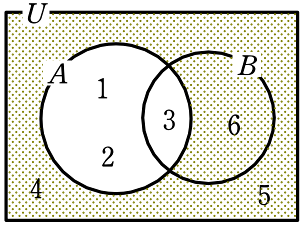




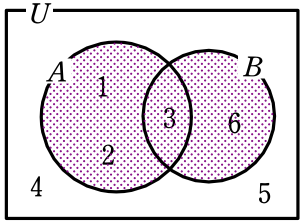


A (あ, い)

外側 →

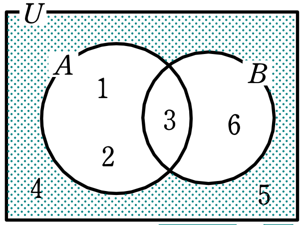


$\overline{A}$ (う, え)



$A\cup B$ (あ, い, う)

外側 →

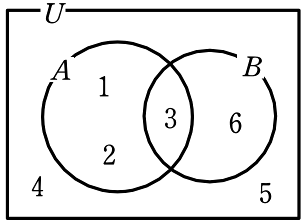


$\overline{A\cup B}$ (え)

練習 8　例 7 の集合 U と A，B について，次の集合を求めよ。

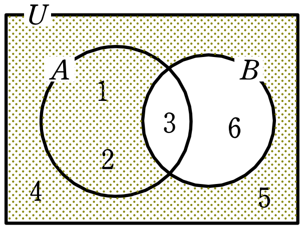
(1)　$\overline{B}$　　(2)　$\overline{A\cap B}$　　(3)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

(4)　$\overline{A}\cup\overline{B}$　　(5)　$\overline{A}\cap B$　　(6)　$A\cap\overline{B}$

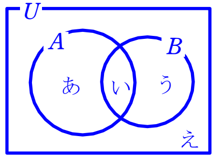


解答

(1)　$\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$

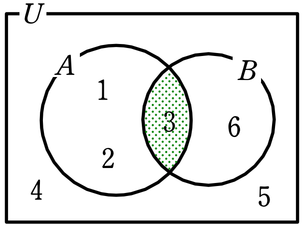


B の外側



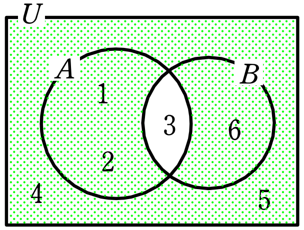
$\overline{B}$ (あ, え)

(2)　$\overline{A\cap B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6\}$



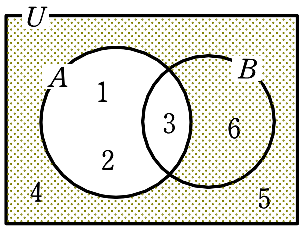
$A\cap B$ (い)

外側 →

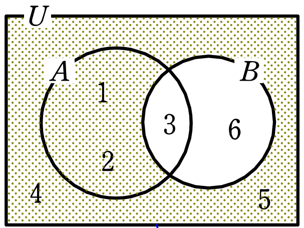


$\overline{A\cap B}$ (あ, う, え)

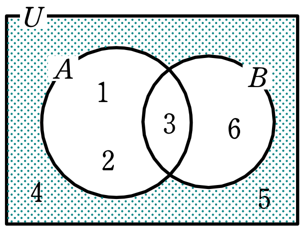
(3)　$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,\ 5\}$



$\overline{A}$ (う, え)



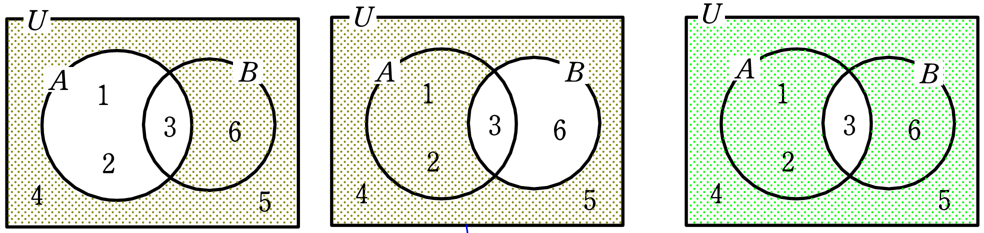
$\overline{B}$ (あ, え)



$\overline{A}\cap\overline{B}$ (え)

$\overline{A}$ …… う, え
$\overline{B}$ …… あ, え
共通部分

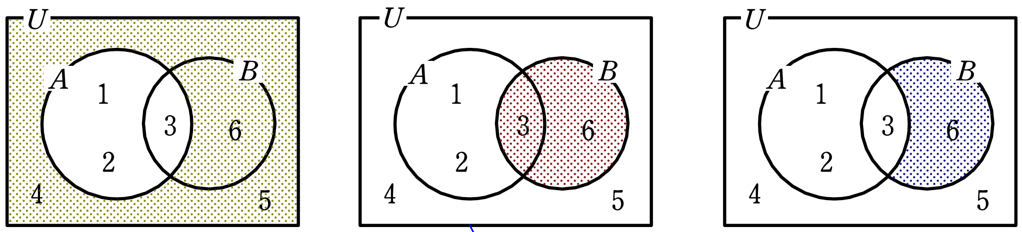
(4)　$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6\}$



$\overline{A}$ (う, え)　　$\overline{B}$ (あ, え)　　$\overline{A}\cup\overline{B}$ (あ, う, え)

$\overline{A}$ …… う，え
$\overline{B}$ …… あ，え
→ あ，う，え
和集合

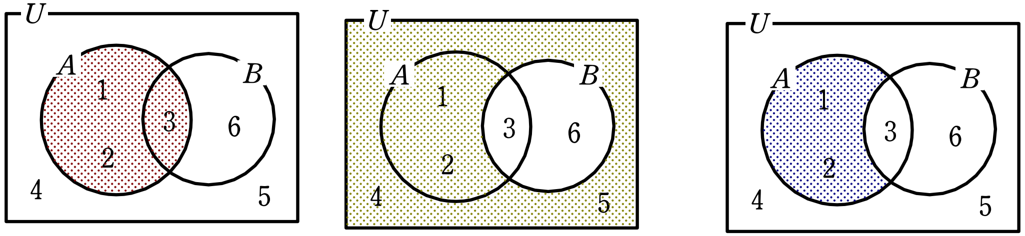
(5)　$\overline{A}\cap B=\{6\}$



$\overline{A}$ (う, え)　　B (い, う)　　$\overline{A}\cap B$ (う)

$\overline{A}$ …… う，え
B …… い，う
共通部分

(6)　$A\cap\overline{B}=\{1,\ 2\}$



A (あ, い)　　$\overline{B}$ (あ, え)　　$A\cap\overline{B}$ (あ)

A …… あ，い
$\overline{B}$ …… あ，え
共通部分

補集合の定義から，次のことが成り立つ。

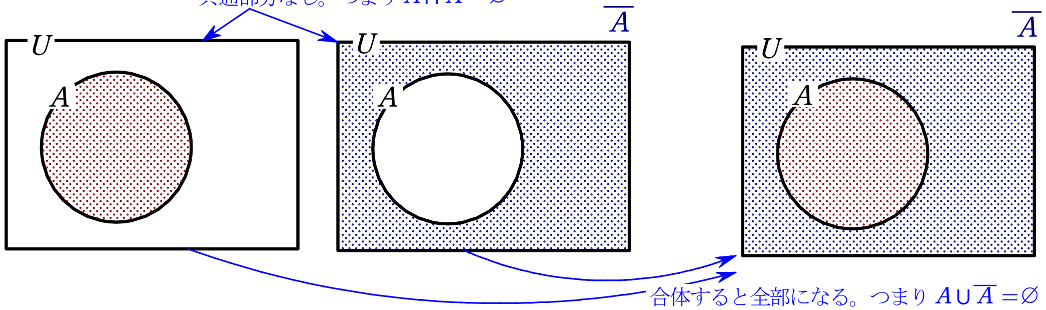
補集合の性質

U を全体集合とし，A，B をその部分集合とするとき

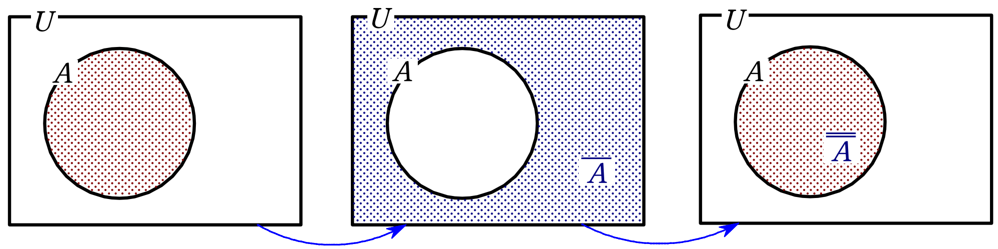
$$A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=U,\quad \overline{\overline{A}}=A\ ,\quad A\subset B\ \ \text{ならば}\ \ \overline{A}\supset\overline{B}$$

注意　$\overline{\overline{A}}$ は $\overline{A}$ の補集合を表す。← $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$の補集合

共通部分なし。つまり $A\cap\overline{A}=\varnothing$



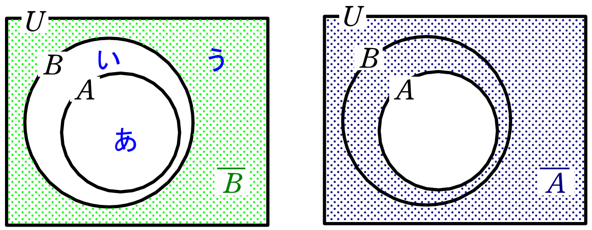
合体すると全部になる。つまり $A\cup\overline{A}=\varnothing$



外側　　外側　　$\overline{\overline{A}}$ と A は同じ場所

外側の外側なので元の場所に戻ってきます。
(マイナスとマイナスを掛けるとプラスになるイメージです)

$A\subset B$ のとき ← A よりも B の方が広い → A が B に含まれる



紫の中に緑がすっぽり入っている。
つまり $\overline{A}\supset\overline{B}$ が成り立つ。
$\overline{A}$＝い, う
$\overline{B}$＝う
いの分だけ $\overline{A}$ の方が $\overline{B}$ より広い

「$A\subset B$　ならば　$\overline{A}\supset\overline{B}$」についても，
「$A<B$ の両辺に (-1) を掛けると不等号の向きが逆になる」というイメージを持つといいですね。

$A \cup B$，$A \cap B$ の補集合について，次の **ド・モルガンの法則** が成り立つ。

ド・モルガンの法則　　まゆげが切れると鼻がひっくり返る

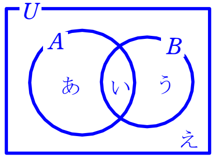
1　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$　　2　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

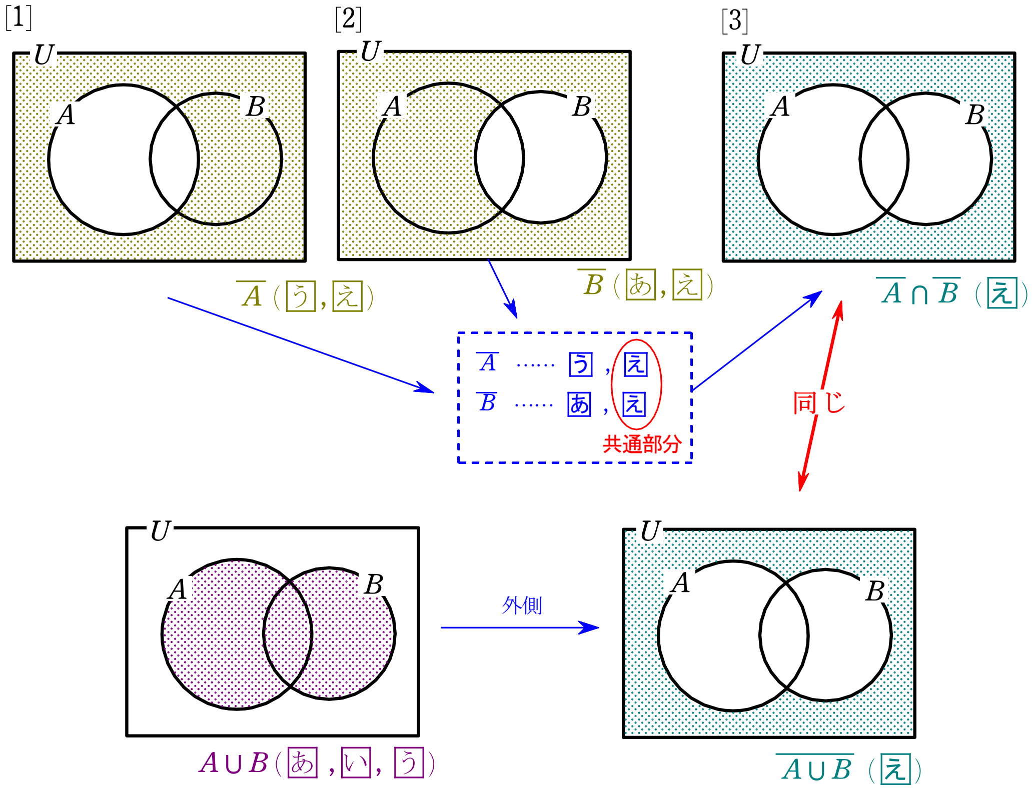
$\overline{A} \cup \overline{B}$ や $\overline{A} \cap \overline{B}$ を求めるのは苦手な者が多い。

この法則を用いて，$\overline{A \cap B}$ や $\overline{A \cup B}$ を求めた方が楽な場合がある。

$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は，それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり，その共通部分 $\overline{A} \cap \overline{B}$ は，図 [3] の斜線部分である。

図 [3] の斜線部分は $\overline{A \cup B}$ であるから，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ が成り立つ。





練習 9　$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つことを，上の方法にならって図を用いて確かめよ。

解答

$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は，それぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり，その和集合 $\overline{A} \cup \overline{B}$ は，図 [3] の斜線部分である。

図 [3] の斜線部分は $\overline{A \cap B}$ であるから，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つ。