

第1章「数と式」章末問題

1 次の式を展開し、 x について降べきの順に整理せよ。

- (1) $(x^3+4-3x)(1-2x)$ (2) $(x-a)(x-b)(x-c)$
 (3) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

【解答】 (1) $-2x^4+x^3+6x^2-11x+4$ (2) $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$
 (3) x^4-5x^2+4

【解説】

(1) $(x^3+4-3x)(1-2x) = (x^3+4-3x) \cdot 1 + (x^3+4-3x) \cdot (-2x)$
 $= x^3+4-3x-2x^4-8x+6x^2$
 $= -2x^4+x^3+6x^2-11x+4$
 同類項はまとめておく
 降べきの順にしておいた方がよい

(2) $(x-a)(x-b)(x-c) = (x^2-ax-bx+ab)(x-c)$
 先にここを展開する
 $= \{x^2-(a+b)x+ab\}(x-c)$
 $= \{x^2-(a+b)x+ab\} \cdot x + \{x^2-(a+b)x+ab\} \cdot (-c)$
 $= x^3-(a+b)x^2+abx -cx^2+(a+b)cx-abc$
 同類項をまとめる
 $= x^3+\{-(a+b)-c\}x^2+\{ab+(a+b)c\}x-abc$
 $= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

(3) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = (x-1)(x+1) \times (x-2)(x+2)$
 工夫して展開する 2個と2個に分けて、その2個を先に展開する
 $= (x^2-1^2)(x^2-2^2)$
 $= (x^2-1)(x^2-4)$
 $= (x^2)^2-5x^2+4$
 $= x^4-5x^2+4$
 $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$
 $x^2=X$ とおくと、
 $(x^2-1)(x^2-4) = (X-1)(X-4) = X^2-5X+4$
 X を x^2 に戻す -1と-4の積 -1と-4の和

2 次の式を因数分解せよ。

- (1) $6x^2+(3a-2b)x-ab$ (2) $3x^2+ax-2a^2+4x-a+1$
 (3) $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2$

【解答】 (1) $(2x+a)(3x-b)$ (2) $(x+a+1)(3x-2a+1)$
 (3) $(x^2-x+1)(x+1)(x-2)$

【解説】

(1) $6x^2+(3a-2b)x-ab = (2x+a)(3x-b)$
 たすき掛けの因数分解

(2) x についても2次式、
 y についても2次式である。
 x^2 の係数が正であるから
 x についての降べきの順に並べる。

		$3x^2$	$+ax$	$-2a^2$	$+4x$	$-a$	$+1$	
x の次数	②	1	0	1	0	0	→ x の2次式	
a の次数	0	1	②	0	1	0	→ a の2次式	

同じならどちらの文字で整理してもいい。
 ただし係数(小さい方)を見て決める。
 係数が正のものを選ぶこと。

$3x^2+ax-2a^2+4x-a+1$
 x について降べきの順に並べる
 $= 3x^2+ax+4x-2a^2-a+1$
 $= 3x^2+(a+4)x-(2a^2+a-1)$
 $= 3x^2+(a+4)x-(a+1)(2a-1)$
 $= \{x+(a+1)\}\{3x-(2a-1)\}$
 $= (x+a+1)(3x-2a+1)$
 たすき掛け
 $2a^2+a-1 = (a+1)(2a-1)$
 $1 \times 1 \rightarrow 1$
 $2 \times -1 \rightarrow -1$
 $2 \times 1 \rightarrow 2$
 $-1 \times -1 \rightarrow 1$
 $3x^2+(a+4)x-(a+1)(2a-1)$
 $1 \times 1 \rightarrow 1$
 $3 \times -1 \rightarrow -3$
 $1 \times -1 \rightarrow -1$
 $-1 \times -1 \rightarrow 1$
 $3x^2+(a+4)x-(a+1)(2a-1)$
 $1 \times 1 \rightarrow 1$
 $3 \times -1 \rightarrow -3$
 $1 \times -1 \rightarrow -1$
 $-1 \times -1 \rightarrow 1$
 $3x^2+(a+4)x-(a+1)(2a-1)$

(3) $x^2-x=A$ とおく。
 和 積
 $(x^2-x)^2-(x^2-x)-2 = A^2-A-2 = (A+1)(A-2)$
 $= \{(x^2-x)+1\}\{(x^2-x)-2\}$ A を戻す
 $= (x^2-x+1)(x^2-x-2)$
 $= (x^2-x+1)(x+1)(x-2)$ $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$

3 次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{32}}$$

$$(2) \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

解答 (1) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ (2) 14

解説

$$(1) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{32}} = \frac{1 \times \sqrt{32}}{\sqrt{32} \times \sqrt{32}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} - \frac{1 \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} + \frac{1 \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

のように、いきなり有理化するのではなく、ルートの中を軽くしてから有理化する。

通分

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$(2) \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \frac{(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + \frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{2^2 - (\sqrt{3})^2} + \frac{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{2^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{4 - 4\sqrt{3} + 3}{4 - 3} + \frac{4 + 4\sqrt{3} + 3}{4 - 3}$$

$$= \frac{7 - 4\sqrt{3}}{1} + \frac{7 + 4\sqrt{3}}{1}$$

$$= 14$$

4 次の計算は誤りである。① から ⑥ の等号の中で誤っているものをすべてあげ、誤りと判断した理由を述べよ。

$$8 = \sqrt{64} = \sqrt{2^6} = \sqrt{(-2)^6} = \sqrt{\{(-2)^3\}^2} = (-2)^3 = -8$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥

解答 ⑤

解説

①は正しい。8も $\sqrt{64}$ も両方正の数であり、 $\sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$ である。

②は正しい。 $64 = 2^6$ である。

③は正しい。 2^6 も $(-2)^6$ もどちらも64になるので、 $2^6 = (-2)^6$ である。

④は正しい。 $\{(-2)^3\}^2 = (-2)^3 \times (-2)^3 = (-2)^6$ である。

⑤は誤りである。 $(-2)^3 = -8 < 0$ であるから

$\sqrt{A^2} = |A|$ の公式

$A < 0$ ならば $|A| = -A$ となるので

$\sqrt{A^2} = |A| = -A$

$$\sqrt{\{(-2)^3\}^2} = |(-2)^3| = -(-2)^3$$

とするのが正しい。

A のところに $(-2)^3$ が入っていると考える。

そもそも、 $\sqrt{\{(-2)^3\}^2}$ はルートの前に何もついていないので

正の数であり、 $(-2)^3$ は負の数であるから $\sqrt{\{(-2)^3\}^2} \neq (-2)^3$ である。

正の数

負の数

⑥は正しい。 $(-2)^3 = -8$ である。

- 5 4 km の道のりを、歩くか走るかして行くことにした。ただし、歩くときの速さは分速 80 m で、走るときの速さは分速 200 m である。目的地に着くまでにかかる時間を 32 分以上 35 分以下にすると、歩く道のりを何 m 以上何 m 以下にすればよいか。

【解答】 1600 m 以上 2000 m 以下

【解説】

歩く道のりを x m とすると、
走る道のりは $(4000 - x)$ m となる。
このとき、

目的地に着くまでにかかる時間は
$$\frac{x}{80} + \frac{4000 - x}{200} \quad (\text{分})$$

これが 32 分以上 35 分以下であるから

$$32 \leq \frac{x}{80} + \frac{4000 - x}{200} \leq 35$$

両サイドが数字のパターン → 簡単に解けるテクニック

各辺に 400 を掛けると 80 と 400 の最小公倍数が 400

$$32 \times 400 \leq \frac{x}{80} \times 400 + \frac{4000 - x}{200} \times 400 \leq 35 \times 400$$

分子の見えない括弧に注意

$$12800 \leq 5x + 2(4000 - x) \leq 14000$$

$$5x + 2(4000 - x) = 5x + 8000 - 2x = 3x + 8000$$

よって $12800 \leq 3x + 8000 \leq 14000$

各辺から 8000 を引くと

$$12800 - 8000 \leq 3x + 8000 - 8000 \leq 14000 - 8000$$

$$4800 \leq 3x \leq 6000$$

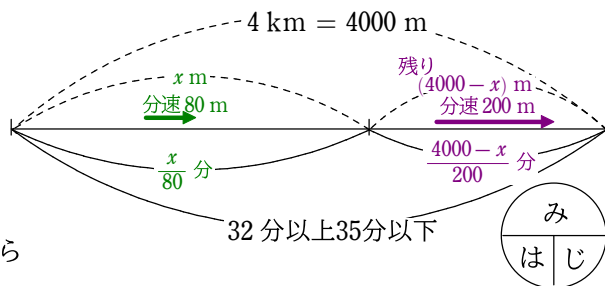
各辺を 3 で割ると

$$\frac{4800}{3} \leq \frac{3x}{3} \leq \frac{6000}{3}$$

正の数で割っているので
不等号の向きは変わらない

$$1600 \leq x \leq 2000$$

図 1600 m 以上 2000 m 以下



- 6 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|3x - 2| = 4$

(2) $|2x + 5| > 2$

(3) $|1 - x| < 3$

【解答】 (1) $x = 2, -\frac{2}{3}$ (2) $x < -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2} < x$ (3) $-2 < x < 4$

【解説】

$|x| = \text{数字}$, $|x| < \text{数字}$, $|x| > \text{数字}$ というタイプの問題はこの公式を用いる。

c が正の定数のとき	方程式 $ x = c$ の解は	$x = \pm c$
	不等式 $ x < c$ の解は	$-c < x < c$
	不等式 $ x > c$ の解は	$x < -c, c < x$

$3x - 2 = X$ とおくと $|X| = 4$ となるので公式より

$X = \pm 4$ となる。X を戻して $3x - 2 = \pm 4$

(1) $|3x - 2| = 4$ から $3x - 2 = \pm 4$

$3x - 2 = 4$ より $3x = 6$ 両辺3で割って $x = 2$

$3x - 2 = -4$ より $3x = -2$ 両辺3で割って $x = -\frac{2}{3}$

よって $x = 2, -\frac{2}{3}$

$2x + 5 = X$ とおくと $|X| > 2$ となるので公式より $X < -2, 2 < X$

X を戻して $2x + 5 < -2, 2 < 2x + 5$

(2) $|2x + 5| > 2$ から $2x + 5 < -2, 2 < 2x + 5$

$2x + 5 < -2$ より $2x < -7$ すなわち $x < -\frac{7}{2}$

$2 < 2x + 5$ より $-3 < 2x$ すなわち $-\frac{3}{2} < x$ 両辺2で割る 向きはそのまま

よって $x < -\frac{7}{2}, -\frac{3}{2} < x$

$1 - x = X$ とおくと $|X| < 3$ となるので公式より

$-3 < X < 3$ となる。X を戻して $-3 < 1 - x < 3$

(3) $|1 - x| < 3$ から $-3 < 1 - x < 3$

両サイドが数字のパターン → 簡単に解けるテクニック

各辺から 1 を引いて $-3 - 1 < 1 - x - 1 < 3 - 1$ よって $-4 < -x < 2$

各辺に -1 をかけて $-4 \times (-1) > -x \times (-1) > 2 \times (-1)$

したがって $4 > x > -2$

ゆえに $-2 < x < 4$

$4 > x > -2$ でも正解であるが、
「小なり」の不等号を使うことが多いので書き直す

別解

公式 $|A| = |-A|$ より

$|1-x| = |-(1-x)|$ が成り立つ。

つまり $|1-x| = |x-1|$ であるから、

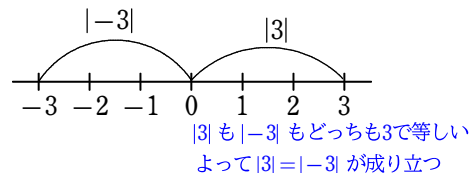
この問題の不等式 $|1-x| < 3$ は

$|x-1| < 3$ と同じである。

したがって

$-3 < x-1 < 3$ と変形できるので

各辺に 1 を足すと $-3+1 < x-1+1 < 3+1$ よって $-2 < x < 4$



7 不等式 $|4x+2| < 11$ を満たす整数 x の個数を求めよ。

解答 6 個

解説

$4x+2=X$ とおくと $|X| < 11$ となるので公式より

$-11 < X < 11$ となる。 X を戻して $-11 < 4x+2 < 11$

$|4x+2| < 11$ から $-11 < 4x+2 < 11$

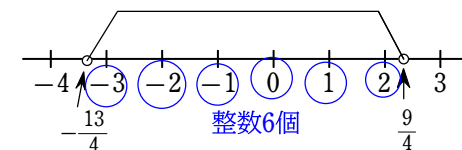
各辺から 2 を引いて $-11-2 < 4x+2-2 < 11-2$ よって $-13 < 4x < 9$

各辺を 4 で割って $-\frac{13}{4} < \frac{4x}{4} < \frac{9}{4}$ よって $-\frac{13}{4} < x < \frac{9}{4}$

$-\frac{13}{4} = -3.25$, $\frac{9}{4} = 2.25$ であるから、

数直線より不等式を満たす

整数 x の個数は 6 個



正の数で割っているので
不等号の向きは変わらない

8 次の式を展開せよ。

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$$

【解答】 $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

【解説】

そのまま展開したら計算が大変なので、先を見越して工夫します。

$$\begin{aligned} (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) &= (x-1)(x+2) \times (x-3)(x+4) \\ &\text{2個ずつ分けて、それぞれ展開} \quad = (x^2+x-2)(x^2+x-12) \\ &\text{すると } x^2+x \text{ という同じ部} \quad = [(x^2+x)-2][(x^2+x)-12] \\ &\text{分が現れる。} \quad = (x^2+x)^2 - 14(x^2+x) + 24 \\ &(-1)+2=1, \quad = (x^2+x)^2 - 14(x^2+x) + 24 \\ &(-3)+4=1 \text{ より} \quad = x^4 + 2x^3 + x^2 - 14x^2 - 14x + 24 \\ & \quad \quad \quad = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 \end{aligned}$$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $(x^2+x)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x + (x)^2$

$x^2+x=X$ とおくと $(X-2)(X-12)$
 $= X^2 + (-2-12)X + (-2) \times (-12)$
 $= X^2 - 14X + 24$
 X 戻す

9 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

(2) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

【解答】 (1) $x(x+5)(x^2+5x+10)$ (2) $(a-b)(b-c)(c-a)$

【解説】

そのまますべて展開してしまうと、とても因数分解できなさそうな式になってしまいます。
 先を見越して同じ塊が出てくるように2つに分けます。

$$\begin{aligned} (1) \quad (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 &= (x+1)(x+4) \times (x+2)(x+3) - 24 \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 24 \\ &= (x^2+5x)[(x^2+5x)+10] - 24 \\ &= x(x+5)(x^2+5x+10) - 24 \\ &= x(x+5)(x^2+5x+10) \end{aligned}$$

$x^2+5x=X$ とおくと $(X+4)(X+6)-24$
 $= X^2 + 10X + 24 - 24$
 $= X^2 + 10X$
 $= X(X+10)$
 X 戻す $= x(x+5)(x^2+5x+10)$

(2)

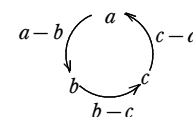
	a の次数	1	1	0	2	2	0	→ 2次式
	b の次数	2	0	1	1	0	2	→ 2次式
	c の次数	0	2	2	0	1	1	→ 2次式

そこで、たとえば、 a について降べきの順に整理してみる。 ← b でも c でも同じ解答になる

$$\begin{aligned} &a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \\ &= ab^2 - ac^2 + bc^2 - ba^2 + ca^2 - cb^2 \\ &= ca^2 - ba^2 + ab^2 - ac^2 + bc^2 - cb^2 \\ &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + (bc^2 - cb^2) \\ &= (c-b)a^2 - (c^2 - b^2)a + bc(c-b) \\ &= (c-b)a^2 - (c-b)(c+b)a + bc(c-b) \\ &= (c-b)[a^2 - (c+b)a + bc] \\ &= (c-b)(a-b)(a-c) \\ &= \{-(b-c)\} \times (a-b) \times \{-(c-a)\} \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \quad \text{【終】} \end{aligned}$$

並べ直すため、一度すべて展開する
 a について降べきの順に並べる
 (この問題に関してのポイント)
 $c-b$ が見えてくるので、中央の $b^2 - c^2$ も
 $b^2 - c^2 = -c^2 + b^2 = -(c^2 - b^2)$
 とすることがポイント!
 $(c-b)a^2 - (c-b)(c+b)a + bc(c-b)$
 $c-b=M$ とおくと
 $Ma^2 - M(c+b)a + bcM$
 $= M \cdot a^2 - M \cdot (c+b)a + M \cdot bc$
 $= M[a^2 - (c+b)a + bc]$
 ここで M を戻す。中括弧に注意。

ここまでできれば正解だが、
 輪環の順にしたいので
 以下の変形をしている



和 積
 $a^2 + (\bigcirc + \triangle)a + \bigcirc \triangle = (a + \bigcirc)(a + \triangle)$
 $a^2 + (-c-b)a + (-b)(-c) = (a-b)(a-c)$

10 次の問いに答えよ。

(1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$ を計算せよ。

(2) $\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。

【解答】 (1) $2\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$

【解説】

$$\begin{aligned} (1) \quad & (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \\ &= \{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\} \\ &= (1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= \{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2\} - 3 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$1+\sqrt{2}=A$ とおくと
 $(A+\sqrt{3})(A-\sqrt{3})=A^2-(\sqrt{3})^2$
 の展開の公式が使える。
 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}{4} = (1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

(1)の結果を使います。分母が $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ であり、
 (1)より $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ に $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ をかけると $2\sqrt{2}$ になることがわかったので、 $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ を分子分母にかけます。

【参考】

分母が3個のときの有理化は、どれかの符号を変えたものを分子分母にかければうまく行きます。ただし、どの符号を変えるかについては、選び方によって計算量が大きく変わるときがあります。

$$\begin{aligned} \frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{4(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})} \\ &= \frac{4(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}\}\{(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}\}} \\ &= \frac{4(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{4(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 2} \\ &= \frac{4(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1+2\sqrt{3}+3-2} \\ &= \frac{4(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2+2\sqrt{3}} = \frac{4(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2(1+\sqrt{3})} \end{aligned}$$

分母の計算について
 $1+\sqrt{3}=A$ とおくと
 $(A+\sqrt{2})(A-\sqrt{2})=A^2-(\sqrt{2})^2$
 の展開の公式が使える。

$$\begin{aligned} &= \frac{2(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{2(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) \cdot (\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{2(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} \\ &= \frac{2\{\sqrt{3}-\sqrt{6}+(\sqrt{3})^2-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\}}{3-1} \\ &= \frac{2\{\sqrt{3}-\sqrt{6}+3-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\}}{2} \\ &= \sqrt{2}+2-\sqrt{6} \end{aligned}$$

$1+\sqrt{3}$ を $\sqrt{3}+1$ にしておくと
 マイナスが登場しないので有理化がちょっと楽になる

このように、分子分母に $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ をかけると計算量が多くなる。その原因を考えてみると、(1)において

$$1+2\sqrt{2}+2-3=2\sqrt{2}$$

となってルート以外の部分が消えてしまっているの、 $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ を分子分母にかけの方が2回目の有理化が楽になっている。

そうなることを見越して最初の有理化を行うと計算量は抑えられる。

$1+2=3$ だから、 $(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2$
 となればルートしか残らない

11 $\sqrt{5}$ の整数部分を a 、小数部分を b とする。

- (1) a と b を求めよ。 (2) $\frac{a}{b}$ の整数部分を求めよ。

解答 (1) $a=2, b=\sqrt{5}-2$ (2) 8

解説

(1) $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ であるから $2 < \sqrt{5} < 3$

よって $a=2$

$a+b=\sqrt{5}$ より $b=\sqrt{5}-a=\sqrt{5}-2$

$b=0.23\dots$ と答えてはいけない

$\sqrt{5} \approx 2.23\dots$ 整数部分

公式
(整数部分)+(小数部分)=元の数

(2) まず、 $\frac{a}{b}$ を計算する。

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-2} = \frac{2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{2\sqrt{5}+4}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{2\sqrt{5}+4}{5-4} = 2\sqrt{5}+4$$

$2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$

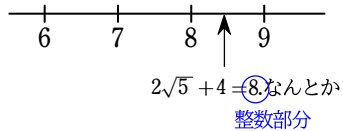
$\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$ であるから $4 < 2\sqrt{5} < 5$

よって各辺に4を足すと

$$4+4 < 2\sqrt{5}+4 < 5+4$$

すなわち $8 < 2\sqrt{5}+4 < 9$

したがって、 $\frac{a}{b}$ の整数の部分は 8



ここがポイント！
 $2\sqrt{5}$ くらいならば $2 \times 2.23\dots = 4.46\dots$ となって整数部分が4と分かる。しかし、例えば $3\sqrt{7}$ の整数部分と言われると $\sqrt{7}$ が分からないので何もできない。このとき、 $3\sqrt{7} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{63}$ とすると、 $\sqrt{63}$ は $\sqrt{64}$ (つまり8)の少し手前なので、 $\sqrt{49} < \sqrt{63} < \sqrt{64}$ つまり $7 < \sqrt{63} < 8$ から $3\sqrt{7} = \sqrt{63} = 7\dots$ より整数部分は7と分かる。

12 定価が1個100円の商品がある。この商品を、A店では定価の12%引きで売っている。また、B店では10個までは定価であるが、10個を超える分について1個につき定価の25%引きで売っている。この商品をA店で買うよりB店で買った方が安くなるのは、何個以上買うときか。

解答 20個以上

解説

この商品を x 個買うとする。

$x \leq 10$ のとき、A店では割引で売っており、B店では定価で売っているためB店で買った方が高くなる。ゆえに $x > 10$ である。

A店ではこの商品を12%引きより

88円で売っているから、 $100 \times (1-0.12) = 100 \times 0.88 = 88$ 円

A店で買ったときの金額は

$$88x \text{ (円)}$$

B店で10個より多く買うとき、

$$100 \times (1-0.25) = 100 \times 0.75 = 75 \text{ 円}$$

10個を超える分については1個につき25%引きの75円で売っているから、

B店で買ったときの金額は

$$100 \times 10 + 75(x-10) \text{ (円)}$$

A店で買うよりB店で買った方が安くなるとすると

$$88x > 1000 + 75(x-10)$$

展開して整理すると

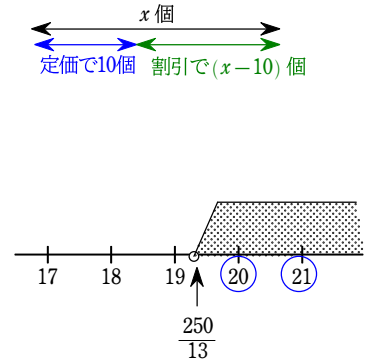
$$88x > 1000 + 75x - 750$$

$$88x - 75x > 1000 - 750$$

$$13x > 250$$

$$x > \frac{250}{13} = 19.2\dots$$

$$\begin{array}{r} 19.2 \\ 13 \overline{) 250} \\ \underline{13} \\ 120 \\ \underline{117} \\ 30 \\ \underline{26} \\ 4 \end{array}$$



B店で買った方が安くなるのは、20個以上買うときである。

図 20個以上

13 $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ を次の場合について簡単にせよ。

(1) $x < 0$

(2) $0 \leq x < 2$

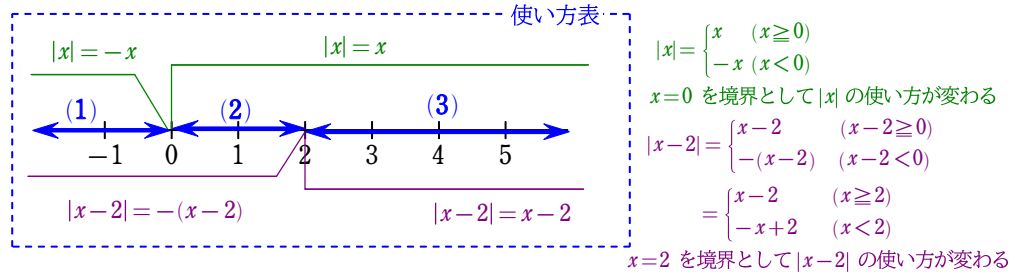
(3) $2 \leq x$

解答 (1) $-2x + 2$ (2) 2 (3) $2x - 2$

解説

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} &= \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} \\ &= |x| + |x-2|\end{aligned}$$

公式 $\sqrt{A^2} = |A|$ ← そもそもこの公式を知らないと
この問題は解けない



(1) $x < 0$ のとき, $|x| = -x$, $|x-2| = -(x-2) = -x+2$ であるから

$$|x| + |x-2| = (-x) + (-x+2) = -2x+2$$

(2) $0 \leq x < 2$ のとき, $|x| = x$, $|x-2| = -x+2$ であるから

$$|x| + |x-2| = x + (-x+2) = 2$$

(3) $2 \leq x$ のとき, $|x| = x$, $|x-2| = x-2$ であるから

$$|x| + |x-2| = x + (x-2) = 2x-2$$