

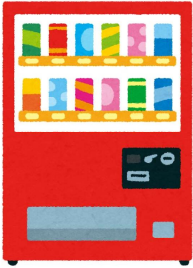
第1章「数と式」第3節 1次不等式 研究 絶対値と場合分け

絶対値の定義より、次のことが成り立つ。

$A \geq 0$ のとき $|A| = A$, $A < 0$ のとき $|A| = -A$

このことを利用して、 $|x-2|$ などの絶対値記号をはずしてみよう。
「絶対値記号をはずす」とは、絶対値記号を用いずに式を表すことである。

絶対値
つまり、0以上
中身が正の数または0のとき $|中身| = 中身$
中身が正なら、中身がそのまま出てくる
中身が負の数
中身が正なら、中身の(-1)倍が出てくる



例1 $|x-2|$ の絶対値記号をはずす。

6か所の青丸を $x-2$ に変える

$x-2 \geq 0$ のとき $|x-2| = x-2$
 $x-2 < 0$ のとき $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

すなわち $x \geq 2$ のとき $|x-2| = x-2$
 $x < 2$ のとき $|x-2| = -x+2$

$x-2 \geq 0$ を解いて $x \geq 2$

$-(x-2) = -x+2$

この中身すべてが答え
 $|x-2| = x-2, -x+2$
などを書く者がいるが、 x の範囲とセットで書くこと。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$ x-2 $	$ -6 $	$ -5 $	$ -4 $	$ -3 $	$ -2 $	$ -1 $	$ 0 $	$ 1 $	$ 2 $	$ 3 $	$ 4 $
計算結果	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$x-2$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-x+2$	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

中身が0になる x が境界

練習1 例1にならって、次の式の絶対値記号をはずせ。

(1) $|x-3|$ (2) $|x+2|$

解答

6か所の青丸を $x-3$ に変える

(1) $x-3 \geq 0$ のとき $|x-3| = x-3$
 $x-3 < 0$ のとき $|x-3| = -(x-3) = -x+3$

すなわち $x \geq 3$ のとき $|x-3| = x-3$
 $x < 3$ のとき $|x-3| = -x+3$

$x-3 \geq 0$ を解いて $x \geq 3$

$-(x-3) = -x+3$

(2) $x+2 \geq 0$ のとき $|x+2| = x+2$
 $x+2 < 0$ のとき $|x+2| = -(x+2) = -x-2$

すなわち $x \geq -2$ のとき $|x+2| = x+2$
 $x < -2$ のとき $|x+2| = -x-2$

$x+2 \geq 0$ を解いて $x \geq -2$

$-(x+2) = -x-2$

例2 次の方程式、不等式を解け。絶対値の外にも文字が入っているときは場合分け

(1) $|x-2|=3x$

(2) $|x-2|\leq 3x$

解答 (1) [1] $x-2\geq 0$ すなわち $x\geq 2$ のとき
 中身が0以上 $|x-2|=x-2$ であるから
 問題文の方程式は $x-2=3x$
 よって $x-3x=2$ より $-2x=2$
 つまり $x=-1$
 これは、 $x\geq 2$ を満たさない
 範囲外

[2] $x-2<0$ すなわち $x<2$ のとき
 中身が負 $|x-2|=-(x-2)$ であるから
 問題文の方程式は $-(x-2)=3x$
 よって $-x+2=3x$ より $-4x=-2$
 ゆえに $x=\frac{1}{2}$
 これは、 $x<2$ を満たす。
 範囲内

[1], [2] から、求める解は $x=\frac{1}{2}$

(2) [1] $x\geq 2$ のとき
 中身が0以上 $|x-2|=x-2$ であるから
 問題文の不等式は $x-2\leq 3x$
 よって $-2x\leq 2$ より $x\geq -1$
 これと $x\geq 2$ との共通範囲は $x\geq 2$ ①

[2] $x<2$ のとき
 中身が負 $|x-2|=-(x-2)$ であるから
 問題文の不等式は $-(x-2)\leq 3x$
 よって $-x+2\leq 3x$ より $-4x\leq -2$
 したがって $x\geq \frac{1}{2}$
 これと $x<2$ との共通範囲は $\frac{1}{2}\leq x<2$ ②

①も②もどちらも答えであるが、今回の問題はたまたま接続できる
 求める解は、①と②を合わせた範囲で $x\geq \frac{1}{2}$

ここで白丸と黒丸の接続ができる

参考 絶対値の方程式 → 場合分けで最後に適・不適
 絶対値の不等式 → 場合分けで最後に共通範囲 (適・不適ではない)

練習2 次の方程式、不等式を解け。

(1) $|x-3|=2x$

(2) $|x-4|\leq 2x+1$

(3) $|x+1|>5x$

解答 (1) [1] $x-3\geq 0$ すなわち $x\geq 3$ のとき
 中身が0以上 $|x-3|=x-3$ であるから
 問題文の方程式は $x-3=2x$
 よって $x-2x=3$ より $-x=3$
 つまり $x=-3$
 これは、 $x\geq 3$ を満たさない。
 範囲外

[2] $x-3<0$ すなわち $x<3$ のとき
 中身が負 $|x-3|=-(x-3)$ であるから
 問題文の方程式は $-(x-3)=2x$
 よって $-x+3=2x$ より $-3x=-3$
 ゆえに $x=1$
 これは、 $x<3$ を満たす。
 範囲内

[1], [2] から、求める解は $x=1$

(2) [1] $x-4\geq 0$ すなわち $x\geq 4$ のとき
 中身が0以上 $|x-4|=x-4$ であるから
 問題文の不等式は $x-4\leq 2x+1$
 よって $x-2x\leq 1+4$ より $-x\leq 5$
 したがって $x\geq -5$
 これと $x\geq 4$ との共通範囲は $x\geq 4$ ①

[2] $x-4<0$ すなわち $x<4$ のとき
 中身が負 $|x-4|=-(x-4)$ であるから
 問題文の不等式は $-(x-4)\leq 2x+1$
 よって $-x+4\leq 2x+1$ より $-3x\leq -3$
 したがって $x\geq 1$
 これと $x<4$ との共通範囲は $1\leq x<4$ ②

求める解は、①と②を合わせた範囲で $x\geq 1$

ここで白丸と黒丸の接続ができる

(3) [1] $x+1 \geq 0$ すなわち $x \geq -1$ のとき
 中身が0以上 $|x+1| = x+1$ であるから

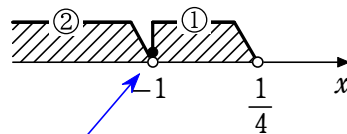
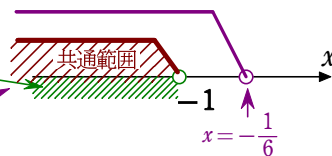
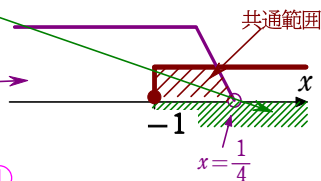
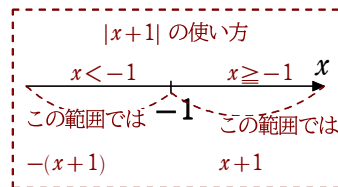
問題文の不等式は $x+1 > 5x$
 $x-5x > -1$ より $-4x > -1$
 不等式を解く
 よって $x < \frac{1}{4}$

これと $x \geq -1$ との共通範囲は $-1 \leq x < \frac{1}{4}$ ①

[2] $x+1 < 0$ すなわち $x < -1$ のとき
 中身が負 $|x+1| = -(x+1)$ であるから
 中身を(-1)倍
 問題文の不等式は $-(x+1) > 5x$
 $-x-1 > 5x$ より $-x-5x > 1$
 不等式を解く
 $-6x > 1$ よって $x < -\frac{1}{6}$

これと $x < -1$ との共通範囲は $x < -1$ ②

求める解は、①と②を合わせた範囲で $x < \frac{1}{4}$



ここで白丸と黒丸の接続ができる