

第1章「数と式」第3節 1次不等式 補充問題

8 $-1 < x < 2$, $1 < y < 3$ のとき、次の式のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) $2x + 3y$ (2) $5x - 3y$

解答 (1) $1 < 2x + 3y < 13$ (2) $-14 < 5x - 3y < 7$

解説

(1) $-1 < x < 2$ より各辺に2をかけて $-1 \times 2 < x \times 2 < 2 \times 2$ より $-2 < 2x < 4$
 $1 < y < 3$ より各辺に3をかけて $1 \times 3 < y \times 3 < 3 \times 3$ より $3 < 3y < 9$
したがって $-2 + 3 < 2x + 3y < 4 + 9$
すなわち $1 < 2x + 3y < 13$

(2) $-1 < x < 2$ より各辺に5をかけて $-1 \times 5 < x \times 5 < 2 \times 5$ より $-5 < 5x < 10$
 $1 < y < 3$ より各辺に(-3)をかけて $1 \times (-3) > y \times (-3) > 3 \times (-3)$
より $-3 > -3y > -9$
すなわち $-9 < -3y < -3$
したがって $-5 + (-9) < 5x - 3y < 10 + (-3)$
すなわち $-14 < 5x - 3y < 7$

参考

体重をイメージしましょう。A, B, C, P, Q, R の6人がいて、
A, B, C の3人だとAが一番軽くてCが一番重い
P, Q, R の3人だとPが一番軽くてRが一番重い
とします。AとP, BとQ, CとRが乗ったエレベーターを考えると



AとPが乗ったエレベーターが一番軽くなり, CとRが乗ったエレベーターが一番重くなります。つまり

$A < B < C$ かつ $P < Q < R$ ならば $A + P < B + Q < C + R$

が成り立ちます。

これは不等号が同じ向きならば、

各項を足すことができると考えましょう。

$$\begin{array}{r} A < B < C \\ +) P < Q < R \\ \hline A + P < B + Q < C + R \end{array}$$

9 次の不等式を解け。

(1) $3x \leq x + 12 < 2x + 8$ (2) $0.05 \leq 0.2 - \frac{x}{100} \leq 0.1$

両サイドが数字のパターン→簡単に解けるテクニック

解答 (1) $4 < x \leq 6$ (2) $10 \leq x \leq 15$

解説

(1) $\begin{cases} 3x \leq x + 12 & \dots\dots ① \\ x + 12 < 2x + 8 & \dots\dots ② \end{cases}$
① から $3x - x \leq 12$ より $2x \leq 12$
よって $x \leq 6$ ③
② から $x - 2x < 8 - 12$ より $-x < -4$
よって $x > 4$ ④
③ と ④ の共通範囲を求めて $4 < x \leq 6$

(2) 各辺に100を掛けると
 $100 \times 0.05 \leq 100 \left(0.2 - \frac{x}{100} \right) \leq 100 \times 0.1$
すなわち $5 \leq 20 - x \leq 10$
各辺から20を引くと
 $5 - 20 \leq 20 - x - 20 \leq 10 - 20$
 $-15 \leq -x \leq -10$
各辺に-1を掛けると
 $-15 \times (-1) \geq -x \times (-1) \geq -10 \times (-1)$
 $15 \geq x \geq 10$
よって $10 \leq x \leq 15$

10 次の方程式，不等式を解け。

(1) $|2x-1|=3$ (2) $|2x-1|<3$ (3) $|2x-1|\geq 3$

【解答】 (1) $x=2, -1$ (2) $-1<x<2$ (3) $x\leq -1, 2\leq x$

【解説】

$|x|$ =数字, $|x|$ <数字, $|x|$ >数字 というタイプの問題はこの公式を用いる。

c が正の定数のとき	方程式 $ x =c$ の解は	$x=\pm c$
	不等式 $ x <c$ の解は	$-c<x<c$
	不等式 $ x >c$ の解は	$x<-c, c<x$

$2x-1=X$ とおくと $|X|=3$ となるので公式より

$X=\pm 3$ となる。 X を戻して $2x-1=\pm 3$

(1) $|2x-1|=3$ から $2x-1=\pm 3$

$2x-1=3$ より $2x=4$ 両辺2で割って $x=2$

$2x-1=-3$ より $2x=-2$ 両辺2で割って $x=-1$

よって $x=2, -1$

$2x-1=X$ とおくと $|X|<3$ となるので公式より

$-3<X<3$ となる。 X を戻して $-3<2x-1<3$

(2) $|2x-1|<3$ から $-3<2x-1<3$ ← 両サイドが数字のパターン → 簡単に解けるテクニック

各辺に1を足して $-3+1<2x-1+1<3+1$ よって $-2<2x<4$

各辺を2で割って $\frac{-2}{2}<\frac{2x}{2}<\frac{4}{2}$ よって $-1<x<2$ 正の数で割っているので不等号の向きは変わらない

$2x-1=X$ とおくと $|X|\geq 3$ となるので公式より $X\leq -3, 3\leq X$

X を戻して $2x-1\leq -3, 3\leq 2x-1$

(3) $|2x-1|\geq 3$ から $2x-1\leq -3, 3\leq 2x-1$

すなわち $2x\leq -3+1, 3+1\leq 2x$

よって $x\leq -1, 2\leq x$ 正の数で割っているので不等号の向きは変わらない

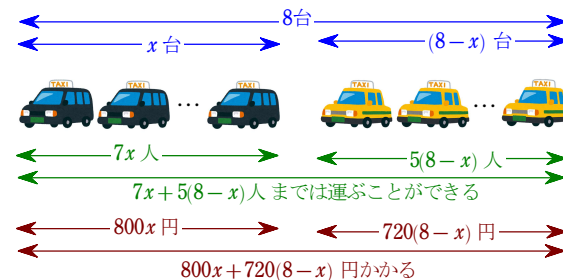
11 客7人乗りのタクシーと客5人乗りのタクシーを合わせて8台使って、47人の客を運ぶたい。1台の料金は、7人乗りが800円、5人乗りが720円である。全体の料金が6100円を超えないようにするには、7人乗りと5人乗りのタクシーを、それぞれ何台使えばよいか。

「6100円以下」と同じ意味

このやり方はなかなか思いつかないので、しっかり復習しておきましょう。

【解答】 7人乗り4台、5人乗り4台

【解説】



7人乗りのタクシーを x 台使うとすると、5人乗りのタクシーは $(8-x)$ 台使うことになる。それぞれのタクシーで、47人の客を運ぶから

$7x + 5(8-x) \geq 47$ ①

実際の乗客数が
最大で乗れる人数以下ならいい

また、全体の料金は $800x + 720(8-x)$ (円)

これが6100円を超えないから

$800x + 720(8-x) \leq 6100$ ②

かかる料金が6100円以下にならばいい

①より $7x + 40 - 5x \geq 47$

$2x + 40 \geq 47$

$2x \geq 7$

両辺2で割る
向きはそのまま

これを解いて $x \geq \frac{7}{2}$ ③

$7 \div 2 = \frac{7}{2}$

②より $800x + 5760 - 720x \leq 6100$

$80x + 5760 \leq 6100$

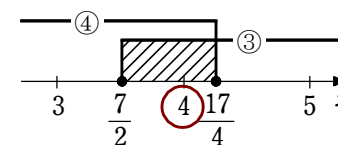
$80x \leq 340$

両辺80で割る
向きはそのまま

$340 \div 80 = \frac{340}{80} = \frac{17}{4}$

これを解いて $x \leq \frac{17}{4}$ ④

③と④の共通範囲を求めて $\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{17}{4}$



$\frac{7}{2} = 3.5$, $\frac{17}{4} = 4.25$ であるから、これを満たす整数は $x=4$

よって、7人乗りを4台、5人乗りを4台使えばよい。