

第1章「数と式」第3節 1次不等式 7 1次不等式

x のとるべき値を決める条件を表した不等式を、 x についての不等式という。
 x についての不等式において、不等式を成り立たせる x の値を、
その不等式の **解** という。
ここでは、不等式の解の求め方について学ぼう。

< 1 次不等式とその解き方 >

例 28 不等式 $3x - 5 < 10$ の解 3×1-5=-2
 $x=1$ とすると、不等式の左辺は -2 であり、 10 より小さい。
よって、 $x=1$ のとき不等式 $3x - 5 < 10$ は成り立つから、 $x=1$
はこの不等式の解である。 -2<10 は正しい
 $x=6$ とすると、不等式の左辺は 13 であり、 10 より大きい。
よって、 $x=6$ のとき不等式 $3x - 5 < 10$ は成り立たないから、
 $x=6$ はこの不等式の解ではない。 13<10 は正しくない 終

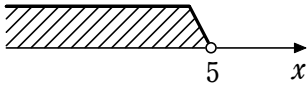
不等式のすべての解を求めることを、その不等式を **解く** という。
例 28 の不等式 $3x - 5 < 10$ を解くには、前ページの「不等式の性質」を使う。

例28のように、1つ1つ代入していたら大変である。
そもそも整数以外にも小数や分数も解になるかもしれない。
→ 式変形によって機械的に答えの範囲が出るようにしたい。

例 29 不等式 $3x - 5 < 10$ を解く。
 $3x - 5 + 5 < 10 + 5$ ← 両辺に 5 を足す。◀性質 1
 $3x < 15$ (左辺を x の項だけにする)
 $\frac{3x}{3} < \frac{15}{3}$ ← 両辺を 3 で割る。◀性質 3
 $x < 5$ (左辺の x の係数を 1 にする) 終

例 29 で求めた x の値の範囲 $x < 5$ を、不等式 $3x - 5 < 10$ の **解** ということがある。

例 29 の不等式の解 $x < 5$ を、数直線を用いて図示すると、右の図ようになる。



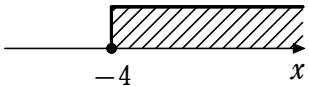
5より小さい x は5より左側

注意 図中の白丸はその数が範囲に含まれないことを表している。

例 30 不等式 $-2x + 1 \leq 9$ を解く。
 $-2x + 1 - 1 \leq 9 - 1$ ← 両辺から 1 を引く。◀性質 2
 $-2x \leq 8$
 $\frac{-2x}{-2} \geq \frac{8}{-2}$ ← 両辺を -2 で割る。◀性質 4
 $x \geq -4$ 終
不等号の向きが変わる。

注意(以下の間違い多い)
 $-2x \leq 8$
両辺 (-2) で割って
 $\frac{-2x}{-2} \leq \frac{8}{-2}$ ここがダメ
 $x \leq -4$
よって
 $x \geq -4$
マイナスで割った瞬間に
向きを変えること

例 30 の不等式の解 $x \geq -4$ を数直線を用いて図示すると、右の図ようになる。



-4より大きい x は-4より右側

注意 図中の黒丸はその数が範囲に含まれることを表している。

「不等式の性質」の 1 と 2 により、不等式でも方程式の場合と同じように **移項** による式の変形ができる。

$3x - 5 < 10$
移項 符号が変わる
 $3x < 10 + 5$

不等式の項を移項して、 $(x \text{ の } 1 \text{ 次式}) > 0$ 、 $(x \text{ の } 1 \text{ 次式}) \leq 0$ などのような形に表される不等式を、 x についての **1 次不等式** という。

- 1 次不等式の解き方**
- ① 不等式を $ax > b$ 、 $ax \leq b$ などの形に整理する。
 - ② 整理された不等式の両辺を x の係数 a で割る。ただし、 a が負の数のときは、不等号の向きが変わることに注意する。

練習 44 次の1次不等式を解け。

(1) $5x - 9 > 1$

(2) $2x + 3 \leq 5$

(3) $-4x - 5 < 7$

解答

(1) $5x - 9 > 1$

$$5x > 1 + 9$$

$$5x > 10$$

$$x > 2$$

両辺5で割る
向きはそのまま
 $10 \div 5 = 2$

(2) $2x + 3 \leq 5$

$$2x \leq 5 - 3$$

$$2x \leq 2$$

$$x \leq 1$$

両辺2で割る
向きはそのまま
 $2 \div 2 = 1$

(3) $-4x - 5 < 7$

$$-4x < 7 + 5$$

$$-4x < 12$$

$$x > -3$$

両辺(-4)で割る
向きは逆になる
 $12 \div (-4) = -3$

例題 7 次の1次不等式を解け。

$$2x - 7 \leq 5x - 1$$

解答

移項すると

$$2x - 5x \leq -1 + 7$$

整理すると

$$-3x \leq 6$$

両辺を -3 で割って

$$x \geq -2$$

両辺(-3)で割る
向きは逆になる
 $6 \div (-3) = -2$

練習 45 次の1次不等式を解け。

(1) $5x - 2 < 2x + 4$

(2) $6x - 3 \geq 8x + 7$

(3) $2(4x - 1) \geq 5x - 11$

(4) $3(3 - 2x) < 4 - 3x$

解答

(1) 移項すると

$$5x - 2x < 4 + 2$$

整理すると

$$3x < 6$$

両辺を 3 で割って

$$x < 2$$

両辺3で割る
向きはそのまま
 $6 \div 3 = 2$

(2) 移項すると

$$6x - 8x \geq 7 + 3$$

整理すると

$$-2x \geq 10$$

両辺を -2 で割って

$$x \leq -5$$

両辺(-2)で割る
向きは逆になる
 $10 \div (-2) = -5$

(3) $2(4x - 1) \geq 5x - 11$ より

$$8x - 2 \geq 5x - 11$$

移項すると

$$8x - 5x \geq -11 + 2$$

整理すると

$$3x \geq -9$$

両辺を 3 で割って

$$x \geq -3$$

両辺3で割る
向きはそのまま
 $-9 \div 3 = -3$

(4) $3(3 - 2x) < 4 - 3x$ より

$$9 - 6x < 4 - 3x$$

移項すると

$$-6x + 3x < 4 - 9$$

整理すると

$$-3x < -5$$

両辺を -3 で割って

$$x > \frac{5}{3}$$

両辺(-3)で割る
向きは逆になる
 $(-5) \div (-3) = +\frac{5}{3}$

例題 8 次の1次不等式を解け。

$$\frac{4}{3}x + 1 \geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

解答

両辺に6を掛けると

すなわち

よって

$$6\left(\frac{4}{3}x + 1\right) \geq 6\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)$$
$$8x + 6 \geq 3x - 2$$
$$8x - 3x \geq -2 - 6$$
$$5x \geq -8$$
$$x \geq -\frac{8}{5}$$

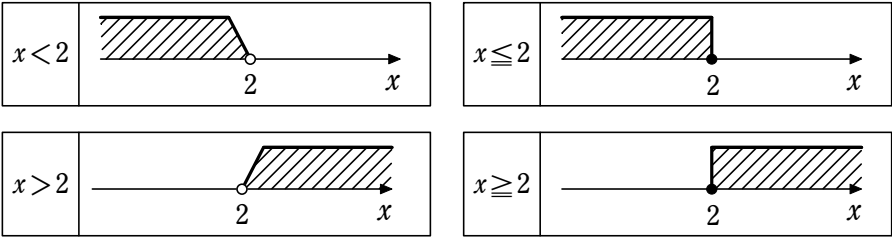
分母をはらうために2と3の
最小公倍数の6を掛ける。

この式は書かなくてもいい

両辺5で割る
向きはそのまま

$-8 \div 5 = -\frac{8}{5}$

■不等式の数直線での表し方のまとめ



イコールが入らない → 境界の点は白丸で表し、範囲はちょっと斜めに表す
イコールが入る → 境界の点は黒丸で表し、範囲は垂直に表す

練習 46 次の1次不等式を解け。

(1) $\frac{1}{2}x - 1 \leq \frac{2}{7}x + \frac{1}{2}$

(2) $\frac{1}{3}x + 1 < \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

解答

(1) 両辺に14を掛けると

すなわち

よって

$$14\left(\frac{1}{2}x - 1\right) \leq 14\left(\frac{2}{7}x + \frac{1}{2}\right)$$
$$7x - 14 \leq 4x + 7$$
$$7x - 4x \leq 7 + 14$$
$$3x \leq 21$$
$$x \leq 7$$

両辺3で割る
向きはそのまま

$21 \div 3 = 7$

(2) 両辺に12を掛けると

すなわち

よって

$$12\left(\frac{1}{3}x + 1\right) < 12\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$$
$$4x + 12 < 9x - 6$$
$$4x - 9x < -6 - 12$$
$$-5x < -18$$
$$x > \frac{18}{5}$$

両辺(-5)で割る
向きは逆になる

$(-18) \div (-5) = +\frac{18}{5}$

＜連立不等式＞

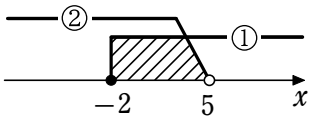
いくつかの不等式があるとき、それらの不等式の解に共通する範囲について考えてみよう。

数直線上でかぶっている部分

例 31 (1) 2つの不等式

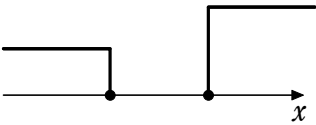
$x \geq -2$ ①
 $x < 5$ ②

の共通範囲は
番号をつけて
ずらして書く
 $-2 \leq x < 5$

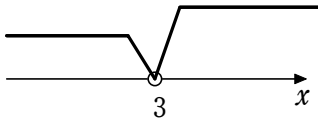


いくつかの不等式を組み合わせたものを **連立不等式** といい、それらの不等式の解に **共通する範囲**を、その連立不等式の **解** という。また、連立不等式の解を求めることを、その連立不等式を **解く** という。

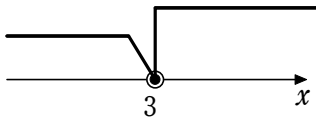
参考(こんなものもあります)



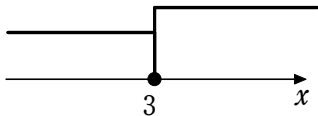
解なし



解なし



解なし



$x = 3$ のみ

例題 9 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 5x + 3 > 3x + 1 \\ -x + 4 \geq 2(x - 1) \end{cases}$$

それぞれの不等式を解いて範囲を出し、
1本の数直線上に同時に書き込む

解答

$5x + 3 > 3x + 1$ から $5x - 3x > 1 - 3$

よって $2x > -2$

ゆえに $x > -1$ ①

$-x + 4 \geq 2(x - 1)$ から $-x + 4 \geq 2x - 2$

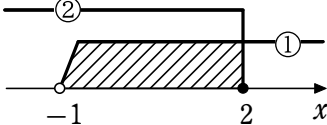
よって $-x - 2x \geq -2 - 4$ より $-3x \geq -6$

ゆえに $x \leq 2$ ②

①と②の共通範囲を求めて $-1 < x \leq 2$

両辺(-3)で割る
向きは逆になる

$(-6) \div (-3) = +2$



練習 47 次の連立不等式を解け。

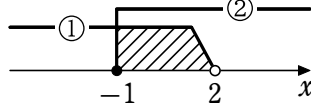
$$(1) \begin{cases} 6x-9 < 2x-1 \\ 3x+7 \leq 4(2x+3) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x+1 \geq 7x-5 \\ -x+6 < 3(1-2x) \end{cases}$$

【解答】

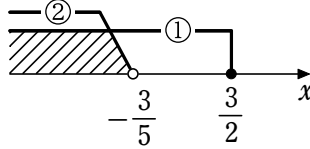
(1) $6x-9 < 2x-1$ から $6x-2x < -1+9$ より $4x < 8$
よって $x < 2$ …… ①

$3x+7 \leq 4(2x+3)$ から $3x+7 \leq 8x+12$ よって $3x-8x \leq 12-7$
ゆえに $-5x \leq 5$ ← 両辺(-5)で割る
よって $x \geq -1$ …… ②
向きは逆になる
 $5 \div (-5) = -1$
①と②の共通範囲を求めて $-1 \leq x < 2$



(2) $3x+1 \geq 7x-5$ から $3x-7x \geq -5-1$ より $-4x \geq -6$
よって $x \leq \frac{3}{2}$ …… ①
両辺(-4)で割る
向きは逆になる

$-x+6 < 3(1-2x)$ から $-x+6 < 3-6x$
 $-x+6x < 3-6$ より $5x < -3$ ← 両辺5で割る
よって $x < -\frac{3}{5}$ …… ②
向きはそのまま
 $(-3) \div 5 = -\frac{3}{5}$
①と②の共通範囲を求めて $x < -\frac{3}{5}$



$A < B < C$ は、 $A < B$ と $B < C$ が同時に成り立つことと同じである。

$$A < B < C \rightarrow \begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$$

両サイドが数字のときは簡単に解けるテクニックがあります。

例題 10 次の不等式を解け。

$$(1) 0 < x < 10-x$$

$$(2) -1 \leq 2x-3 \leq 8$$

【解答】

$$(1) \begin{cases} 0 < x & \dots\dots ① \\ x < 10-x & \dots\dots ② \end{cases}$$

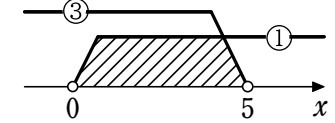
②から $x+x < 10$ より $2x < 10$
よって $x < 5$ …… ③

①と③の共通範囲を求めて $0 < x < 5$

(2) 各辺に3を足して $-1+3 \leq 2x-3+3 \leq 8+3$
すなわち $2 \leq 2x \leq 11$

各辺を2で割って $\frac{2}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{11}{2}$

よって $1 \leq x \leq \frac{11}{2}$



【参考】

$$(2) \begin{cases} -1 \leq 2x-3 & \dots\dots ① \\ 2x-3 \leq 8 & \dots\dots ② \end{cases}$$

①から、 $-2x \leq -3+1$ より $-2x \leq -2$

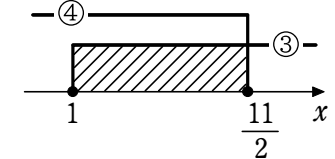
ゆえに $x \geq 1$ …… ③

②から $2x \leq 8+3$ より $2x \leq 11$

よって $x \leq \frac{11}{2}$ …… ④

③と④の共通範囲を求めて $1 \leq x \leq \frac{11}{2}$

$$-1 \leq 2x-3 \leq 8$$



練習 48 次の不等式を解け。

(1) $1 \leq x \leq 15 - 2x$

(2) $-2 < 3x + 1 < 5$

解答

(1) $\begin{cases} 1 \leq x & \dots\dots ① \\ x \leq 15 - 2x & \dots\dots ② \end{cases}$

② から $x + 2x \leq 15$ より $3x \leq 15$

よって $x \leq 5$ $\dots\dots ③$

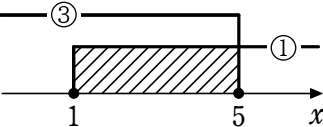
① と ③ の共通範囲を求めて $1 \leq x \leq 5$

(2) 各辺から 1 を引いて $-2 - 1 < 3x + 1 - 1 < 5 - 1$

すなわち $-3 < 3x < 4$

各辺を 3 で割って $-\frac{3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{4}{3}$

よって $-1 < x < \frac{4}{3}$



< 1 次不等式の応用 >

応用例題 5

次の不等式を満たす最小の自然数 n を求めよ。

$$200 + 12(n - 10) \leq 15n$$

考え方 まず、 n についての不等式を解く。次に、 n が自然数であることに

注意して、最小となる n の値を求める。

n は自然数であるが、とりあえずそれは置いておいて
不等式を解く。出てきた範囲の中で、自然数を考える。

解答 不等式を解く。

$$\begin{aligned} 200 + 12(n - 10) &\leq 15n \\ 200 + 12n - 120 &\leq 15n \\ 12n - 15n &\leq -200 + 120 \\ -3n &\leq -80 \end{aligned}$$

よって $n \geq \frac{80}{3}$

すなわち $n \geq 26.6\dots$

不等式を満たす最小の自然数 n は $n = 27$

両辺 (-3) で割る
向きは逆になる
 $(-80) \div (-3) = +\frac{80}{3} = 26.6\dots$

練習 49 次の不等式を満たす最小の自然数 n を求めよ。

$$600 + 25(n - 20) \leq 32n$$

解答

不等式を解く

$$600 + 25(n - 20) \leq 32n$$

$$600 + 25n - 500 \leq 32n$$

$$25n - 32n \leq -600 + 500$$

$$-7n \leq -100$$

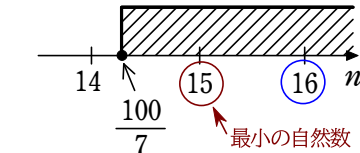
よって

$$n \geq \frac{100}{7}$$

すなわち

$$n \geq 14.2\cdots$$

不等式を満たす最小の自然数 n は $n = 15$



練習 50 次の不等式を満たす最大の自然数 n を求めよ。

$$4 + \frac{1}{5}(n - 4) > \frac{1}{2}n$$

解答

不等式を解く

分母の5と2の最小公倍数が10

$$4 + \frac{1}{5}(n - 4) > \frac{1}{2}n$$

$$4 \times 10 + \frac{1}{5}(n - 4) \times 10 > \frac{1}{2}n \times 10$$

両辺に10をかけて

$$40 + 2(n - 4) > 5n$$

$$40 + 2n - 8 > 5n$$

$$2n - 5n > -40 + 8$$

$$-3n > -32$$

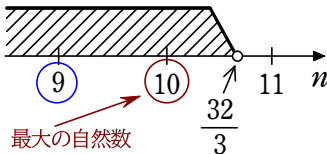
よって

$$n < \frac{32}{3}$$

すなわち

$$n < 10.6\cdots$$

不等式を満たす最大の自然数 n は $n = 10$



応用例題 6

1 個 60 円の品物 A と 1 個 100 円の品物 B を合わせて 50 個買い、
100 円の箱に詰めてもらう。品物代と箱代の合計金額を 4000 円
以下にすると、品物 B は最大で何個買えるか。

考え方 品物 B を x 個買うとして、条件から不等式を作る。
 x は整数であることに注意する。

何を x とおくかは、
問題文の最後に書いてある
(簡単な式ができそうなら
そっちを x としてもよい)

解答

品物 B を x 個買うとすると、

品物 A は $(50 - x)$ 個買うことになる。

このとき、品物代と箱代の合計金額は

$$60(50 - x) + 100x + 100 \quad (\text{円})$$

これが 4000 円以下であるから

$$60(50 - x) + 100x + 100 \leq 4000$$

両辺を 20 で割ると

$$3(50 - x) + 5x + 5 \leq 200$$

$$150 - 3x + 5x + 5 \leq 200$$

$$-3x + 5x \leq 200 - 150 - 5$$

$$2x \leq 45$$

よって

$$x \leq \frac{45}{2}$$

すなわち

$$x \leq 22.5$$

不等式を満たす最大の整数 x は $x = 22$

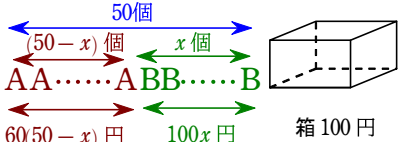
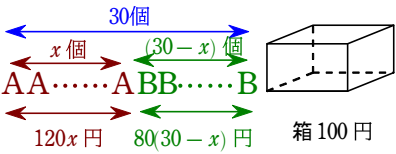


図 22 個

練習 51 1 個 120 円の菓子 A と 1 個 80 円の菓子 B を合わせて 30 個買い、
 100 円の箱に詰めてもらう。菓子代と箱代の合計金額を 3000 円以下
 にするとき、菓子 A は最大で何個買えるか。

解答

菓子 A を x 個買うとすると、
 菓子 B は $(30 - x)$ 個買うことになる。
 このとき、品物代と箱代の合計金額は



$120x + 80(30 - x) + 100$ (円)
 これが 3000 円以下であるから

$$120x + 80(30 - x) + 100 \leq 3000$$

両辺を 20 で割ると

$$6x + 4(30 - x) + 5 \leq 150$$

$$6x + 120 - 4x + 5 \leq 150$$

$$6x - 4x \leq 150 - 120 - 5$$

$$2x \leq 25$$

よって

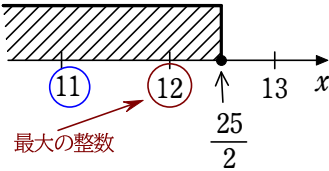
$$x \leq \frac{25}{2}$$

すなわち

$$25 \div 2 = \frac{25}{2} = 12.5$$

$$x \leq 12.5$$

不等式を満たす最大の整数 x は $x = 12$



答 12 個