

第1章「数と式」第3節 1次不等式 6 不等式の性質

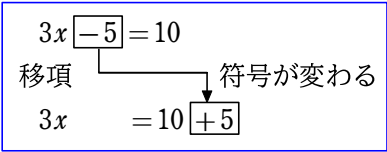
ここでは、不等式の性質を学ぶ。そこで、まず $(x \text{ の } 1 \text{ 次式}) = 0$ の形に表される方程式、すなわち x についての1次方程式を通して、等式の性質を復習しよう。

< 1次方程式 >

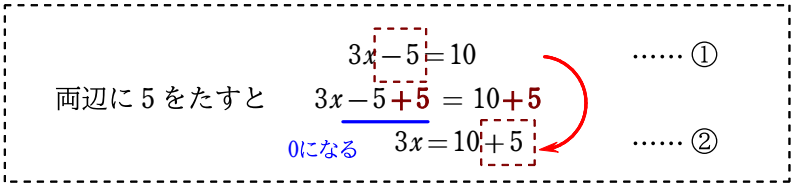
x についての方程式を成り立たせる x の値を、その方程式の **解** という。
また、方程式のすべての解を求めることを、方程式を **解く** という。

例 25 1次方程式 $3x - 5 = 10$ を解く。

移項すると $3x = 10 + 5$
すなわち $3x = 15$
両辺を3で割って $x = 5$



イコールという橋を越えると符号が変わる



x の1次方程式は、 $ax = b$ の形に整理して解く。このとき、次に示す「等式の性質」を使う。移項は、性質1, 2を使った式の変形である。

等式の性質			等式の両辺に同じ操作をしても 等しい関係は保たれる
1	$A = B$ ならば	$A + C = B + C$	
2	$A = B$ ならば	$A - C = B - C$	
3	$A = B$ ならば	$AC = BC$	
4	$A = B$ ならば	$\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$	(ただし、 $C \neq 0$)

注意 $C \neq 0$ は C が0に等しくないことを表す。

練習 40 次の1次方程式を解け。

(1) $5x + 2 = 2x + 7$ (2) $0.5x = 0.2x - 6$ (3) $\frac{2}{3}x - 4 = \frac{1}{2}x - 3$

解答

(1) 移項すると $5x - 2x = 7 - 2$
すなわち $3x = 5$ ← 両辺3で割る
両辺を3で割って $x = \frac{5}{3}$ $5 \div 3 = \frac{5}{3}$

(2) 両辺に10を掛ける $0.5x \times 10 = 0.2x \times 10 - 6 \times 10$
よって $5x = 2x - 60$
移項すると $5x - 2x = -60$
すなわち $3x = -60$ ← 両辺3で割る
両辺を3で割って $x = -20$ $(-60) \div 3 = -20$

(3) 両辺に6を掛けると $\frac{2}{3}x \times 6 - 4 \times 6 = \frac{1}{2}x \times 6 - 3 \times 6$ ← 分母の最小公倍数が6
よって $4x - 24 = 3x - 18$
移項すると $4x - 3x = -18 + 24$
すなわち $x = 6$

＜不等号と不等式＞

まず、不等号の種類と意味についてまとめておこう。

不等号	読み方	使い方の例	意 味
<	小なり	$x < 2$	x は 2 より小さい
>	大なり	$x > 0$	x は 0 より大きい
$\leq$	小なりイコール	$x \leq 3$	x は 3 以下
$\geq$	大なりイコール	$x \geq -1$	x は -1 以上

数の大小は「小なり」と「大なり」のそれぞれの記号で表すことができるが、できれば数直線の正の方向で並んでいた方がいい。つまり「小なり」を使った方がいい。

「～より小さい」は「～未満」ともいう。

$x > 0$ は「 x は正の数」、 $x < 0$ は「 x は負の数」の意味でもある。

補足 $0 < x < 2$ は「 x は 0 より大きく、かつ 2 より小さい」の意味である。

不等号を複数使うときは、同じ種類の不等号を用いる。
 $2 > x < 0$ などと表さない。

数量の間の大小関係を不等号を使って表した式を **不等式** という。

以下、本書では、不等式で使う文字が表す数は、断りがなければ実数の範囲で考えるものとする。

数量の大小関係を述べた事柄を不等式で表してみよう。

例 26 (1) ある数 x の 3 倍から 5 を引いた数は 10 より小さい。

このことを不等式で表すと $3x - 5 < 10$

(2) 2 つの数 a, b の和は正で、かつ 5 以下である。

このことを不等式で表すと $0 < a + b \leq 5$

$a + b$

0より大きい

同時に2個の不等号を用いる

終

練習 41 次の数量の大小関係を不等式で表せ。

- (1) ある数 x の 2 倍に 3 を足した数は 5 以上である。
- (2) 2 つの数 a, b の和は負で、かつ -2 より大きい。
- (3) 1 個 80 円の品物を x 個買って 100 円の箱に詰めてもらったところ、品物代と箱代の合計金額は 2000 円以下になった。

解答

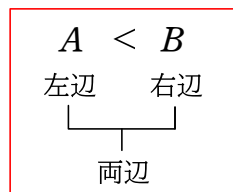
- (1) ある数 x の 2 倍に 3 を足した数は $x \times 2 + 3$ より $2x + 3$ と表される。よって $2x + 3 \geq 5$
- (2) $-2 < a + b < 0$
- (3) 1 個 80 円の品物を x 個買って 100 円の箱につめると、代金の合計は $80 \times x + 100$ 円となる。これが 2000 円以下より $80x + 100 \leq 2000$

同時に2個の不等号を用いる

以下や以上はイコールがつく

<不等式の性質>

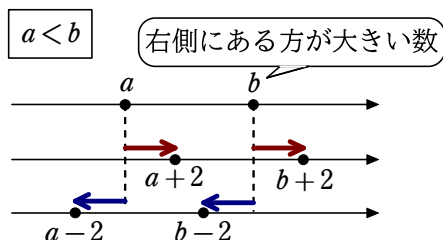
不等式でも等式の場合と同様に、不等号の左側の部分を **左辺**、右側の部分を **右辺** といい、左辺と右辺とを合わせて **両辺** という。



不等式の両辺に同じ数を足したり、掛けたりした場合、38 ページで示した「等式の性質」と同じようなことが成り立つかどうかを調べよう。

2つの実数 a, b の大小関係
 $a < b$ は、数直線上の位置関係として、右の図のように表される。

実数を数直線上の点で表して考えると、次のことがいえる。



「 $a < b$ のとき $a + 2 < b + 2, a - 2 < b - 2$ 」

数直線上で、もともと b の方が a よりも右側にある。

両方の点を右側に2目盛ずつ動かしても位置関係は変わらない。

同じく、両方の点を左側に2目盛ずつ動かしても位置関係は変わらない。

次に、 $a < b$ のとき、 $2a$ と $2b$ や $\frac{a}{2}$ と $\frac{b}{2}$ などの大小関係について調べてみよう。

例 27 $a > 0, b > 0$ とする。

$a < b$ のとき、 $2a$ と $2b$,

$\frac{a}{2}$ と $\frac{b}{2}$ の位置関係は右の

ようになる。よって

「 $a < b$ のとき

$$2a < 2b, \quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2}$$

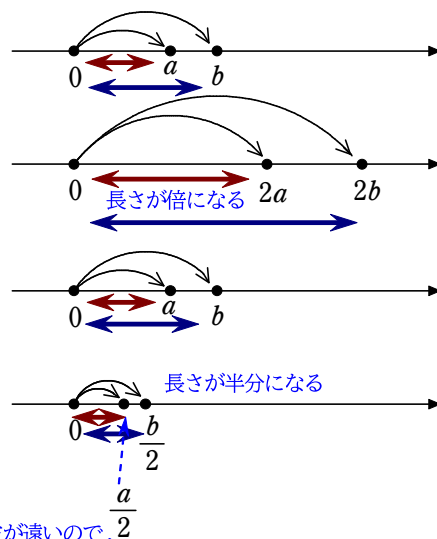
数直線上で、もともと b の方が a よりも右側にある。

a が正の数より、 $2a$ も正の数になる。

よって、 $2a$ は原点から a までの距離の2倍だけ正の方向に

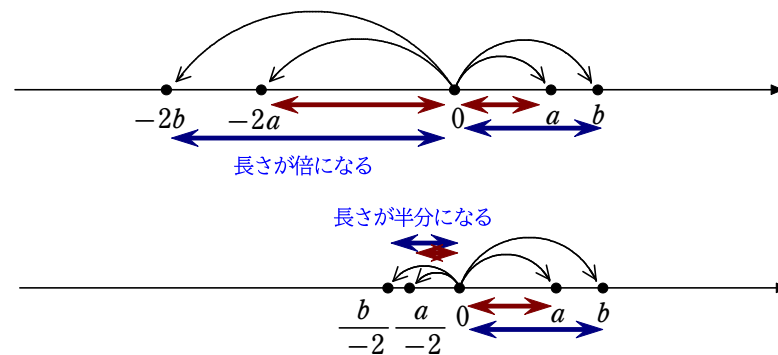
原点から離れた点となる。原点から a までより原点から b までの方が遠いので、

正の方向であることを考えると $2b$ の方が $2a$ よりも遠くなる。したがって、 $2b$ の方が $2a$ よりも右側にある。



$a < b$ のとき、 $-2a$ と $-2b$, $\frac{a}{-2}$ と $\frac{b}{-2}$ の位置関係は下のよう

になる。よって「 $a < b$ のとき $-2a > -2b, \frac{a}{-2} > \frac{b}{-2}$ 」



数直線上で、もともと b の方が a よりも右側にある。

a が正の数より、 $-2a$ は負の数になる。

よって、 $-2a$ は原点から a までの距離の2倍だけ、負の方向に原点から離れた点となる。

原点から a までより原点から b までの方が遠いので、 $2b$ の方が $2a$ よりも遠くなる。

負の方向であることを考えると、 $-2a$ の方が $-2b$ よりも右側にある。

練習 42 次の に適する不等号 $>$ または $<$ を入れよ。

(1) $a = -4, b = -2$ のとき、 $a < b$ が成り立つ。この a, b に対して

$$2a \quad \square \quad 2b, \quad \frac{a}{2} \quad \square \quad \frac{b}{2}, \quad -2a \quad \square \quad -2b, \quad \frac{a}{-2} \quad \square \quad \frac{b}{-2}$$

(2) $a = -4, b = 2$ のとき、 $a < b$ が成り立つ。この a, b に対して

$$2a \quad \square \quad 2b, \quad \frac{a}{2} \quad \square \quad \frac{b}{2}, \quad -2a \quad \square \quad -2b, \quad \frac{a}{-2} \quad \square \quad \frac{b}{-2}$$

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad a = -4, b = -2 \text{ のとき} \quad & -8 < -4 \quad -2 < -1 \quad 8 > 4 \quad 2 > 1 \\ & 2a < 2b, \quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2}, \quad -2a > -2b, \quad \frac{a}{-2} > \frac{b}{-2} \\ (2) \quad a = -4, b = 2 \text{ のとき} \quad & -8 < 4 \quad -2 < 1 \quad 8 > -4 \quad 2 > -1 \\ & 2a < 2b, \quad \frac{a}{2} < \frac{b}{2}, \quad -2a > -2b, \quad \frac{a}{-2} > \frac{b}{-2} \end{aligned}$$

不等式の性質についてまとめると、次のようになる。

不等式の性質

1 $A < B$ ならば $A + C < B + C$

2 $A < B$ ならば $A - C < B - C$

3 $A < B, C > 0$ ならば $AC < BC, \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

4 $A < B, C < 0$ ならば $AC > BC, \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$

「不等式の性質」の1～3は、「等式の性質」の1～4での等号 = を
不等号 < にそのまま変えただけである。しかし、4はそうではないので、注意しよう。

不等式では、

両辺に同じ負の数を掛けたり、

両辺を同じ負の数で割ったりすると、

両辺の大小関係が入れかわる。

「不等号の向きが変わる」と表現することもある。

$$A < B$$



負の数 -2 を掛けると
不等号の向きが変わる

$$-2A > -2B$$

練習 43 $a < b$ のとき、次の に適する不等号 $>$ または $<$ を入れよ。

(1) $a + 4$ $b + 4$ (2) $a - 6$ $b - 6$ (3) $11a$ $11b$

(4) $-a$ $-b$ (5) $\frac{a}{5}$ $\frac{b}{5}$ (6) $-\frac{a}{3}$ $-\frac{b}{3}$

解答

(1) $a + 4 < b + 4$ 両辺に4を足しているから不等号の向きはそのまま

(2) $a - 6 < b - 6$ 両辺から6を引いているから不等号の向きはそのまま

(3) $11a < 11b$ 両辺に正の数の11を掛けているから不等号の向きはそのまま

(4) $-a > -b$ 両辺に負の数の (-1) をかけているから不等号の向きが変わる

(5) $\frac{a}{5} < \frac{b}{5}$ 両辺に正の数の5で割っているから不等号の向きはそのまま

(6) $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$ 両辺に負の数の (-3) で割っているから不等号の向きが変わる