

第1章「数と式」第2節 実数 補充問題

4 次の x の値に対して、 $\sqrt{(x+1)^2}$ の値をそれぞれ求めよ。

- (1) $x=3$ (2) $x=-1$ (3) $x=-3$

解答 (1) 4 (2) 0 (3) 2

解説

(1) $x=3$ のとき

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(3+1)^2} = \sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4$$

(2) $x=-1$ のとき

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(-1+1)^2} = \sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$$

(3) $x=-3$ のとき

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(-3+1)^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

別解 $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ ← $\sqrt{A^2} = |A|$ の公式

(1) $x=3$ のとき

$$|x+1| = |3+1| = |4| = 4$$

(2) $x=-1$ のとき

$$|x+1| = |-1+1| = |0| = 0$$

(3) $x=-3$ のとき

$$|x+1| = |-3+1| = |-2| = -(-2) = 2$$

$\sqrt{(x+1)^2}$ はルートの前に
何もついていないので正の数
 $\sqrt{16} = \pm 4$ ではない

中身が正なのでそのまま外に出る

中身が0なのでそのまま外に出る

中身が負なので中身を (-1) 倍されて外に出る

5 $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $x+y$ (2) xy (3) x^2+y^2 (4) x^3y+xy^3

解答 (1) $\sqrt{3}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 4 (4) -2

解説

$$(1) \quad x+y = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$(2) \quad xy = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{2 \cdot 2} \\ = \frac{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2}{4} = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 + 1 = 4$$

$$(4) \quad x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

(3) の結果より

公式

(2) の結果より $xy = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (x+y)^2 - 2xy \\ = (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy \\ = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

公式 (以下の公式は覚えましょう)

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$x^2y + xy^2 = xy(x+y)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy}$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$$

6 $\sqrt{2}$ の値として 1.4142 を使うとき、分母の有理化を利用して $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ の値を求めよ。

解答 3.4142

解説

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2-1} = 2 + \sqrt{2}$$

$$= 2 + 1.4142 = 3.4142$$

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

参考

そのまま代入すると

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{1.4142}{1.4142-1} = \frac{1.4142}{0.4142} = 3.4142\ldots$$

ここの筆算が大変

$$\begin{array}{r} 3.41 \\ 4142 \overline{) 14142} \\ \underline{12426} \\ 17160 \\ \underline{16568} \\ 5920 \\ \underline{4142} \\ 1778 \end{array}$$

7 次の (1), (2) の式を計算せよ。また、(3) ~ (6) の式の分母を有理化せよ。

(1) $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{54}$

(2) $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$

(3) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$

(4) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

(5) $\frac{3}{2-\sqrt{7}}$

(6) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$

解答 (1) $3\sqrt{6}$ (2) $9+6\sqrt{2}$ (3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (4) $4-\sqrt{6}$ (5) $-2-\sqrt{7}$ (6) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{54} = 2 \times 3\sqrt{3} - 3 \times 2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$
 $= 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

(2) $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2$ $\leftarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $= 3 + 2 \times 3\sqrt{2} + 6 = 9 + 6\sqrt{2}$

(3) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1) \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2 \times (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(4) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ $\leftarrow$ このまま有理化すると分母が $(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2$ になってマイナスになるので、それを避けるための工夫。
 $= \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$ $\leftarrow (A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
 $= \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3} - (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$
 $= \frac{2 \times 3 - 2\sqrt{6} + \sqrt{6} - 2}{3 - 2}$
 $= \frac{6 - 2\sqrt{6} + \sqrt{6} - 2}{1} = 4 - \sqrt{6}$

(5) $\frac{3}{2-\sqrt{7}} = \frac{3(2+\sqrt{7})}{(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})} = \frac{3(2+\sqrt{7})}{2^2 - (\sqrt{7})^2}$ $\leftarrow (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$
 $= \frac{3(2+\sqrt{7})}{4-7} = \frac{3(2+\sqrt{7})}{-3} = \frac{2+\sqrt{7}}{-1} = -(2+\sqrt{7}) = -2-\sqrt{7}$ $\leftarrow$ マイナスを分配

この3を分配してもいいが、分母に3が出てくることを見越して残しておく。(3で約分できるから)

この変形に気が付くとあっという間に答えが出るが、まず気が付かない。

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} &= \frac{(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} && \sqrt{3}=A \text{ とすると} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} && (\sqrt{3})^2+\sqrt{3} \\
 &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} && \sqrt{3}+1 \text{ で約分できる} \\
 & && = A^2+A \\
 & && = \frac{A \times A + A \times 1}{A \times (A+1)} \\
 & && = \frac{A \times (A+1)}{\sqrt{3} \times (\sqrt{3}+1)}
 \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
 \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})} &= \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}} \\
 &= \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}} && \text{分母が負にならない工夫} \\
 &= \frac{(3+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(3\sqrt{2}+\sqrt{6})(3\sqrt{2}-\sqrt{6})} && (A+B)(A-B)=A^2-B^2 \\
 &= \frac{3 \times 3\sqrt{2} - 3 \times \sqrt{6} + \sqrt{3} \times 3\sqrt{2} - \sqrt{3} \sqrt{6}}{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} \\
 &= \frac{9\sqrt{2} - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{18-6} \\
 &= \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &&& \text{約分}
 \end{aligned}$$