

第1章「数と式」第2節 実数 発展 2重根号

$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ のように、根号を2重に含む式について考えてみよう。

たとえば、 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ は正の数であるから

$$\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} + \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2},$$
$$\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

ここで、
 $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$
 $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$
である。よって、次のことが成り立つ。

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(3+2)+2\sqrt{3\cdot 2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$
$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\cdot 2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

このように、根号を2重に含む式を簡単な形にできる場合がある。

一般に、次のことが成り立つ。ただし、 a, b は正の数とする。

2重根号

$\sqrt{和+2\sqrt{積}}$ の形

符号が同じになる

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

a が b より大きいとき
$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

注意

$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ について、 $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ としてはいけない。

$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ は一番外側のルートの前になにもついていないので正の数。

一方で $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ は(小さい数)-(大きい数)より負の数であるからおかしいことになってしまう。

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

↑ 正の数 ↑ 負の数

$\sqrt{\Delta+2\sqrt{\star}}$ の形なので、もし「足して Δ , 掛けて $\star$ 」となる2つの数が見つかるなら、この $\sqrt{\Delta+2\sqrt{\star}}$ の外側のルートははずせる。

例1 (1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = |\sqrt{5} + \sqrt{3}| = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

足して8, 掛けて15→5と3

実際の解答では、このあたりは書かずに $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ だけでOK

(2) $\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{8-2\cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{8-2\cdot \sqrt{2^2\cdot 3}} = \sqrt{8-2\sqrt{12}}$

ここを2にする $= \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{6} - \sqrt{2}| = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

足して8, 掛けて12→6と2

(3) $\sqrt{4+\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}$

ここを2にする

(2)のようにできないので 無理矢理2を出す

足して8, 掛けて15→5と3

$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$

有理化

終

練習 1 例 1 にならって，次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ (2) $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ (3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

解答

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(5+2)+2\sqrt{5\cdot 2}} = \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{5}+\sqrt{2}| = \sqrt{5}+\sqrt{2}$

足して 7, 掛けて 10 → 5 と 2
が分かったら, ここまで飛んで OK
足して 7, 掛けて 10 → 5 と 2
 $\sqrt{A^2} = |A|$ 中身は正よりそのまま出る

(2) $\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\cdot 3\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\cdot \sqrt{3^2\cdot 3}} = \sqrt{12-2\sqrt{27}}$

ここを 2 にする 足して 12, 掛けて 27 → 9 と 3
 $= \sqrt{(9+3)-2\sqrt{9\cdot 3}}$
 $= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{3})^2}$
 $= |\sqrt{9}-\sqrt{3}| = \sqrt{9}-\sqrt{3} = 3-\sqrt{3}$

$\sqrt{9}=3$ に気が付かない人は意外に多い
 $\sqrt{3}-\sqrt{9}$ としてはいけない

(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

ここを 2 にする 足して 4, 掛けて 3 → 3 と 1
 $= \frac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}}$
 $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

(2) のようにできないので
無理矢理 2 を出す $= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{1})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{3}+\sqrt{1}|}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{1})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 有理化