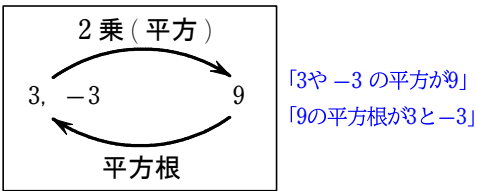


第1章「数と式」第2節 実数 5 根号を含む式の計算

2乗すると a になる数を a の **平方根** という。
2乗して負になる実数はないから、ここでは負でない数の平方根を考えよう。
2乗して負になる数はないので、負の平方根はここでは考えません。



<平方根>
正の数 a の平方根は2つあり、それらは絶対値が等しく符号が異なる。
その正の平方根を $\sqrt{a}$ と書く。負の平方根は $-\sqrt{a}$ である。
0の平方根は0だけであるから、 $\sqrt{0}=0$ とする。記号 $\sqrt{\quad}$ を **根号** といい、 $\sqrt{a}$ を「ルート a 」と読む。平方根を英語で square root という。 $\sqrt{\quad}$ の記号は r の変形である。

「3の平方根は？」→「2乗して3になる数は？」を考える。
例 21 (1) 3の平方根は $\sqrt{3}$ と $-\sqrt{3}$ ，すなわち $\pm\sqrt{3}$ である。
(2) $\sqrt{25}$ は25の正の平方根で、 $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$ である。 終
 $\sqrt{25}=\pm 5$ という間違いが多い。 説明のためにこの変形をしているだけなので、
大前提として、 $\sqrt{\quad}$ はルートの前に何もついていないから正の数である。 解答では $\sqrt{25}=5$ と書いてよい。

補足 記号 $\pm$ を **複号** といい、「プラスマイナス」と読む。

練習 32 次の問いに答えよ。

(1) 6の平方根は何か。 (2) $\sqrt{16}$ ， $-\sqrt{\frac{9}{25}}$ の値を、それぞれ求めよ。

【解答】
(1) 2乗して6になる数であるから、 $\sqrt{6}$ と $-\sqrt{6}$ ，すなわち $\pm\sqrt{6}$
(2) $\sqrt{16}$ は16の正の平方根であるから $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$ ，
 $-\sqrt{\frac{9}{25}}$ は $\frac{9}{25}$ の負の平方根であるから $-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$
 $\sqrt{16}$ はルートの前に何もついていないから正の数
 $-\sqrt{\frac{9}{25}}$ はルートの前にマイナスがついているから負の数

例 22 実数 a について、 $\sqrt{a^2}$ の値
 $a=3$ のとき $\sqrt{a^2}=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$
 $a=-3$ のとき $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$ 終
これを見て、 $\sqrt{a^2}=a$ と言ってはいけません。これが言えるのは a が正の数か0のときだけです。

くどいようですが、 $\sqrt{a^2}$ はルートの前になにもついていないから正の数です。
もし、 $\sqrt{a^2}=a$ が成り立つなら、 $a=-3$ とすると $\sqrt{(-3)^2}=-3$ となっておかしな式になります。
↑正の数 ↑負の数
 $(-\sqrt{a})^2=(-1\times\sqrt{a})^2=(-1)^2\times(\sqrt{a})^2=1\times a=a$

一般に、次のことがいえる。

平方根の性質

ルートを2乗すればルートがとれて中身が出てきます。

1 a が正の数のとき $(\sqrt{a})^2=(-\sqrt{a})^2=a$
2 a が正の数または0のとき $\sqrt{a^2}=a$
 a が負の数のとき $\sqrt{a^2}=-a$ } $\sqrt{a^2}=|a|$

【参考】

a	-2	-1
$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$	$\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$
$ a $	$ -2 =-(-2)=2$	$ -1 =-(-1)=1$

絶対値
 a が正の数または0のとき $|a|=a$
中身が正なら、中身がそのまま出てくる
 a が負の数のとき $|a|=-a$
中身が正なら、中身の (-1) 倍が出てくる

a	0	1	2
$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{0^2}=\sqrt{0}=0$	$\sqrt{1^2}=\sqrt{1}=1$	$\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2$
$ a $	$ 0 =0$	$ 1 =1$	$ 2 =2$

a がいくつであっても $\sqrt{a^2}$ と $|a|$ の計算結果が同じになる。
よって $\sqrt{a^2}=|a|$

<根号を含む式の計算>

平方根の積と商について、次のことが成り立つ。

a, b が正の数のとき ルート同士の計算は中身をまとめてよい

$$1 \quad \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad 2 \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

以下、 $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ をこうやって書きます。

【1の証明】 $\sqrt{a}\sqrt{b}$ を2乗すると $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$
 ここで、 $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は正であるから、 $\sqrt{a}\sqrt{b}$ を2乗すると ab になることより
 $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の正の平方根である。 ab の正の平方根は $\sqrt{ab}$ と書けるので
 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ が成り立つ。 終

【2の証明】 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ を2乗すると $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$
 ここで、 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は正であるから、 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ を2乗すると $\frac{a}{b}$ になることより
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ は $\frac{a}{b}$ の正の平方根である。 $\frac{a}{b}$ の正の平方根は $\sqrt{\frac{a}{b}}$ と書けるので
 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ が成り立つ。 終

例 23 (1) $\sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

(2) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$

(3) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{45}$ 終

練習 33 次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt{2}\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2}\sqrt{5}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

解答

(1) $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$

(2) $\sqrt{2}\sqrt{5} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{10}$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$

(4) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ ± 2 ではありません。
 ルートの前になにもついていないので正の数です。

練習 34 次の式を $\sqrt{a}$ の形に表せ。

(1) $3\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{3}$ (3) $5\sqrt{5}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解答

(1) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2}\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{18}$

(2) $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2}\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \times 3} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{48}$

(3) $5\sqrt{5} = \sqrt{5^2}\sqrt{5} = \sqrt{5^2 \times 5} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{125}$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2}} = \sqrt{\frac{3}{2^2}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

例 23 (3) の計算を逆に行うと、次のようになる。

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

一般に、次のことが成り立つ。

ルートの中はできるだけ小さい数にすること

$$a, k \text{ が正の数のとき } \sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$$

練習 35 次の式を $k\sqrt{a}$ の形に表せ。

(1) $\sqrt{8}$

(2) $\sqrt{12}$

(3) $\sqrt{50}$

(4) $\sqrt{54}$

解答

$\sqrt{\quad}$ の中を素因数分解して、
同じものが2個あれば外に出せる。

(1) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{2^2} \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{2^2} \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(3) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2} \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(4) $\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{3^2 \times 6} = \sqrt{3^2} \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

根号を含む式の加法、減法は、次のように行う。

例 24 (1) $6\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (6+1-3)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

同じルート同士で足し算する。
同類項をまとめるイメージ。

(2) $4\sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{27} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$
 $= (4-2+3)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

(3) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (\sqrt{2} - 4\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 4\sqrt{3}$
 $= (3-1)\sqrt{2} + (1+4)\sqrt{3}$
 $= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ 終

練習 36 次の式を計算せよ。

(1) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72}$

(3) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})$

(4) $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}) - (\sqrt{96} - \sqrt{45})$

解答

(1) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = (5-2+1)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{32} - \sqrt{72} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$
 $= (1+4-6)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

(3) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$
 $= (5-2)\sqrt{2} + (-3-1)\sqrt{3}$
 $= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$

(4) $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{6}) - (\sqrt{96} - \sqrt{45}) = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - \sqrt{96} + \sqrt{45}$
 $= 2\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} + 3\sqrt{5}$
 $= (2+3)\sqrt{5} + (3-4)\sqrt{6}$
 $= 5\sqrt{5} - \sqrt{6}$

根号を含む式の乗法は、次のように行う。

例題 5 次の式を計算せよ。

- (1) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 4\sqrt{5})$ (2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$
 (3) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$

解答

(1) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 4\sqrt{5})$

$$= \underline{2\sqrt{3}\sqrt{3}} + \underline{2\sqrt{3} \times 4\sqrt{5}} - \underline{\sqrt{5}\sqrt{3}} - \underline{\sqrt{5} \times 4\sqrt{5}}$$

$$= 2 \times 3 + 8\sqrt{15} - \sqrt{15} - 4 \times 5 = -14 + 7\sqrt{15}$$

(2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \leftarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

(3) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 \leftarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= 5 - 2 = 3$$

公式が使えるなら使う。
 使えないなら分配法則。

練習 37 次の式を計算せよ。

- (1) $(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ (2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{3} + 3\sqrt{6})$
 (3) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$ (4) $(\sqrt{6} - 2)^2$
 (5) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (6) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})$

解答

(1) $(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5}) = \underline{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} - \underline{4\sqrt{2}\sqrt{5}} + \underline{3\sqrt{5} \times 2\sqrt{2}} - \underline{3\sqrt{5}\sqrt{5}}$

$$= 8 \times 2 - 4\sqrt{10} + 6\sqrt{10} - 3 \times 5$$

$$= 1 + 2\sqrt{10}$$

(2) $(2\sqrt{3} - \sqrt{6})(\sqrt{3} + 3\sqrt{6}) = \underline{2\sqrt{3}\sqrt{3}} + \underline{2\sqrt{3} \times 3\sqrt{6}} - \underline{\sqrt{6}\sqrt{3}} - \underline{\sqrt{6} \times 3\sqrt{6}}$

$$= 2 \times 3 + 6 \times 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3 \times 6$$

$$= -12 + 15\sqrt{2}$$

(3) $(\sqrt{7} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \leftarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= 7 + 2\sqrt{21} + 3$$

$$= 10 + 2\sqrt{21}$$

(4) $(\sqrt{6} - 2)^2 = (\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6} \times 2 + 2^2 \leftarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= 6 - 4\sqrt{6} + 4$$

$$= 10 - 4\sqrt{6}$$

(5) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1 \leftarrow (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(6) $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$

<分母の有理化>

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ の分母と分子に $\sqrt{2}$ を掛けると、次のようになる。

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \leftarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{bc}{ac} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{分子と分母に同じ数を掛けるから、} \\ \text{もともとの数と値が変わらない。} \end{array}$$

このように、分母に根号を含む式を変形して、
分母に根号を含まない式にすることを、
分母を **有理化** するという。

分母の $\sqrt{}$ をなくしたいからといって、
分母だけに $\sqrt{}$ を掛ける者がいるが、
これではもともとの数と値が変わってしまう。

練習 38 次の式の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (2) \frac{4}{\sqrt{2}} \quad (3) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad (4) \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} &= \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ (2) \quad \frac{4}{\sqrt{2}} &= \frac{4 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \\ (3) \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ (4) \quad \frac{1}{2\sqrt{5}} &= \frac{1 \times \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

分母が $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ または $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ の形の場合は、次のことを利用して、
分母を有理化することができる。

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) &= (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b \\ (A+B)(A-B) &= A^2 - B^2 \end{aligned}$$

例題 6 次の式の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \quad (2) \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

【解答】

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} &= \frac{1 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3} \quad \leftarrow (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \\ (2) \quad \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} &= \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} \quad \leftarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \times 1 + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} \quad \leftarrow (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ &\quad \leftarrow \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} \\ &\quad \text{また, } \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + 1\sqrt{3}}{1} \\ &\quad \text{とV字約分してもいい。} \end{aligned}$$

【注意】

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$$

上記のように、分母と同じものを分子分母にかけても、分母にルートが残ってしまう。

練習 39 次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ (3) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} + 1}$ (4) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

解答

(1) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$
 $= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5} + \sqrt{2}\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2}$
 $= \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

(3) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} + 1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{5} - 2\sqrt{3} \cdot 1}{(\sqrt{5})^2 - 1^2}$
 $= \frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{3}}{4}$ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
 $= \frac{2(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2}$ V字約分
 $\frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1\sqrt{15} - 1\sqrt{3}}{2}$

(4) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}$
 $= \frac{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}$ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $= \frac{5 + 2\sqrt{10} + 2}{5 - 2} = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}$ $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$$(1) \quad \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5 \cdot 3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$(2) \quad \sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{8-2\sqrt{12}} = \sqrt{(6+2)-2\sqrt{6 \cdot 2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$(3) \quad \sqrt{4+\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

次の式を簡単にせよ。

$$(1) \quad \sqrt{7+2\sqrt{10}} \quad (2) \quad \sqrt{12-6\sqrt{3}} \quad (3) \quad \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

解答 (1) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ (2) $3 - \sqrt{3}$ (3) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$