

第1章「数と式」第2節 実数 4 実数

自然数 1, 2, 3, …… に, 0 と −1, −2, −3, …… とを合わせて **整数** という。

また, 整数 m と 0 でない整数 n を用いて分数 $\frac{m}{n}$ の形に表される数を **有理数** という。

たとえば, $\frac{1}{3}$ や $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5}$ は有理数である。整数 m は $\frac{m}{1}$ と表されるから,

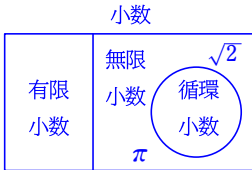
有理数である。ここでは, 数についてまとめよう。
有理数は英語で rational number といいます。ratio が比という意味で, 比で表される数、つまり分数で表される数という意味です。

<有理数>

整数以外の有理数を小数で表すと, たとえば次のようになる。

① $\frac{1}{4} = 0.25$ ② $\frac{2}{3} = 0.666\cdots$ ③ $\frac{7}{27} = 0.259259259\cdots$

① のように小数第何位かで終わる小数を **有限小数** という。これに対し, 小数点以下の数字が限りなく続く小数を **無限小数** という。
無限小数のうち, ②, ③ のように, ある位以下では数字の同じ並びが繰り返される小数を **循環小数** という。



循環小数を次のように書き表すことがある。

$0.666\cdots = 0.\dot{6}$ 読み方「れい、てん、ドットろく」 循環部分の始まりと終わりの上にドットを書く

$0.\overline{666}\cdots = 0.\overline{6}$

$0.3181818\cdots = 0.3\dot{1}\dot{8}$ 読み方「れい、てん、さん、ドットろく、ドットはち」

$0.3\overline{181818}\cdots = 0.3\overline{18}$

$2.452452452\cdots = 2.\dot{4}\dot{5}\dot{2}$ 読み方「に、てん、ドットよん、ご、ドットに」

$2.\overline{452452452}\cdots = 2.\overline{452}$

練習 26 次の分数を循環小数で表せ。ただし, 上のような表し方で書け。

(1) $\frac{8}{9}$ (2) $\frac{6}{11}$ (3) $\frac{10}{27}$ (4) $\frac{25}{22}$

解答 割り算は筆算で各自ミスのないように頑張りましょう

(1) $\frac{8}{9} = 0.\overline{888}\cdots = 0.\dot{8}$

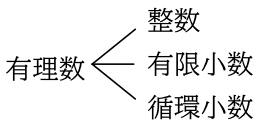
(2) $\frac{6}{11} = 0.\overline{545454}\cdots = 0.\dot{5}\dot{4}$

(3) $\frac{10}{27} = 0.\overline{370370370}\cdots = 0.\dot{3}\dot{7}\dot{0}$

(4) $\frac{25}{22} = 1.1\overline{363636}\cdots = 1.1\dot{3}\dot{6}$

有理数について、次のことが知られている。

整数以外の有理数は、有限小数か循環小数のいずれかで表される。逆に、有限小数と循環小数は必ず分数で表され、有理数である。



ここでは、 m, n が正の整数のとき、分数 $\frac{m}{n}$ が整数、有限小数、循環小数のいずれかで表されることを、数の割り算の仕組みから確かめてみよう。

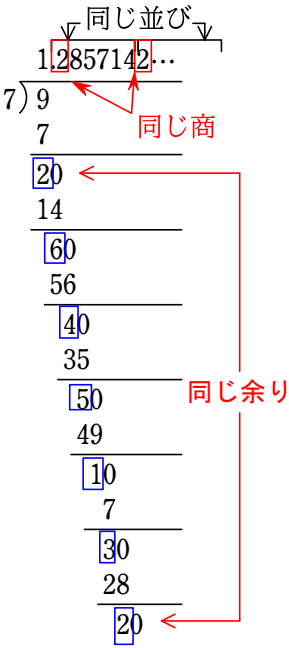
たとえば、 $\frac{9}{7}$ を小数で表すには、次のような割り算を行う。

- ① 9 を 7 で割ると 商 1, 余り 2
- ② 2 の横に 0 を書いて 20 にする。
- ③ 20 を 7 で割ると 商 2, 余り 6
- ④ 6 の横に 0 を書いて 60 にする。

以下、同じ手順を繰り返す。
上の手順で、①、③ はいずれも「7 で割ったときの商と余りを求める」

計算である。整数を 7 で割った余りは 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである。
右の割り算はいつまでも続くが、割り算を続けると同じ余りが出てくる。

余りが 0 になったら割り切れたということなので、そこで商は止まる。
同じ余りが出てきたらまた同じ操作の繰り返しになるので、商も同じ数字が並ぶことになる。



一般の場合について考えてみよう。 m, n は正の整数とする。 m を n で割ることを考えると、各段階の割り算の余りは n 個の整数

$$0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

のいずれかである。割り算の途中で余りに 0 が出てきたら、分数 $\frac{m}{n}$ は整数か有限小数で表される。余りに 0 が出てこない場合、余りの種類は

$(n-1)$ 個しかないから、割り算を続けると必ず同じ余りが出てくる。

そこから先は、その間の計算の繰り返しになり、分数 $\frac{m}{n}$ は循環小数で表される。

Column 循環小数を分数で表す

循環小数は必ず分数で表されます。

たとえば、循環小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$ を

分数で表す方法を紹介しましょう。

まず、循環小数をドットを使わずに表し、それを x とおきます。

$$x = 0.123123123\cdots \quad 1000x \text{ を上を書く}$$

とすると、右の筆算の計算により

$$999x = 123$$

$$\text{よって両辺} 999 \text{ で割って } x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

$0.\dot{1}2\dot{3}$ のように、小数点以下で 3 個の数字の並びが繰り返される循環小数を分数で表したとき、分母にはどのような数が現れるでしょうか。

見ればわかるように、分母は 999 になるが約分される可能性もある。

よって、分母は 999 の約数となる。

$$0.\underline{123}\underline{123}\underline{123}\cdots$$

3 個ずつ同じ数が循環している。

小数点の位置を 3 つずらしたいので 1000 倍する。

$$\begin{array}{r} 1000x = 123.\underline{123}\underline{123}\underline{123}\cdots \\ -) \quad x = 0.\underline{123}\underline{123}\underline{123}\cdots \\ \hline 999x = 123 \end{array}$$

小数点以下は上下で同じなので、引けばなくなる

【問題】次の循環小数を分数で表せ。

- (1) $0.\dot{4}$ (2) $3.9\dot{7}$ (3) $0.7\dot{9}$ (4) $0.\dot{4}5\dot{6}$

【解答】

- (1) $x = 0.\dot{4}$ とおく。

$$x = 0.444\ldots$$

$$10x = 4.444\ldots$$

$10x$ と x の差を考えると、右の計算から $9x = 4$

$$\text{よって } x = \frac{4}{9}$$

- (2) $x = 3.9\dot{7}$ とおく。

$$10x = 39.777\ldots$$

$$100x = 397.777\ldots$$

$100x$ と $10x$ の差を考えると、右の計算から

$$90x = 358$$

$$\text{よって } x = \frac{358}{90} = \frac{179}{45}$$

- (3) $x = 0.\dot{7}9$ とおく。

$$x = 0.7979\ldots$$

$$100x = 79.7979\ldots$$

$100x$ と x の差を考えると、右の計算から

$$99x = 79$$

$$\text{よって } x = \frac{79}{99}$$

- (4) $x = 0.\dot{4}5\dot{6}$ とおく。

$$x = 0.456456\ldots$$

$$1000x = 456.456456\ldots$$

$1000x$ と x の差を考えると、右の計算から

$$999x = 456$$

$$\text{よって } x = \frac{456}{999} = \frac{152}{333}$$

$$0.\overline{444}\ldots$$

1個ずつ同じ数が循環している。

小数点の位置を1つずらしたい

ので10倍する。

$$\begin{array}{r} 10x = 4.\overline{444}\ldots \\ -) \quad x = 0.\overline{444}\ldots \\ \hline 9x = 4 \end{array}$$

$$3.9\overline{777}\ldots$$

1個ずつ同じ数が循環している。

小数点の位置を1つずらしたい

ので10倍するが、小数点以下が同

じになるように工夫している。

$$\begin{array}{r} 100x = 397.\overline{777}\ldots \\ -) \quad 10x = 39.\overline{777}\ldots \\ \hline 90x = 358 \end{array}$$

$$0.\overline{797979}\ldots$$

2個ずつ同じ数が循環している。

小数点の位置を2つずらしたいので100倍する。

$$\begin{array}{r} 100x = 79.\overline{7979}\ldots \\ -) \quad x = 0.\overline{7979}\ldots \\ \hline 99x = 79 \end{array}$$

$$0.\overline{123123123}\ldots$$

3個ずつ同じ数が循環している。

小数点の位置を3つずらしたいので1000倍する。

$$\begin{array}{r} 1000x = 456.\overline{456456}\ldots \\ -) \quad x = 0.\overline{456456}\ldots \\ \hline 999x = 456 \end{array}$$

<実数>

整数と、有限小数または無限小数で表される数とを合わせて **実数** という。

実数のうち、有理数でない数を **無理数** という。

無理数は、循環しない無限小数で表される数であり、分母と分子がともに整数である分数で表すことはできない。

たとえば、 $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ 、円周率 π は、無理数であることが知られている。

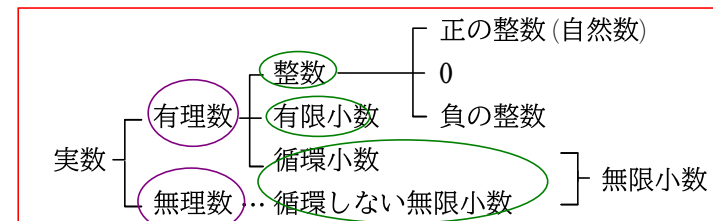
$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明は有名です。

書けるようになります。

$$\sqrt{2} = 1.4142135623 \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1.7320508075 \ldots$$

$$\pi = 3.1415926535 \ldots$$



実数を「有理数」と「無理数」で分類

実数を「整数」と「有限小数」と「無限小数」で分類

2つの数 a , b の四則計算の結果について考えてみよう。

加法、減法、乗法、除法をまとめて **四則** といい、

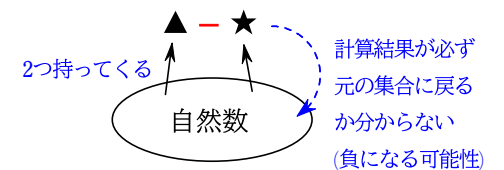
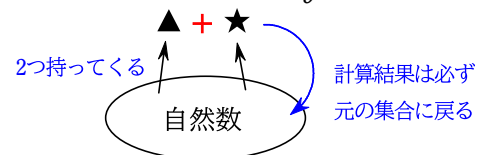
四則計算の結果が、それぞれ、和、差、積、商である。

ただし、除法において0で割ることは考えない。

例18 (1) a , b が自然数のとき

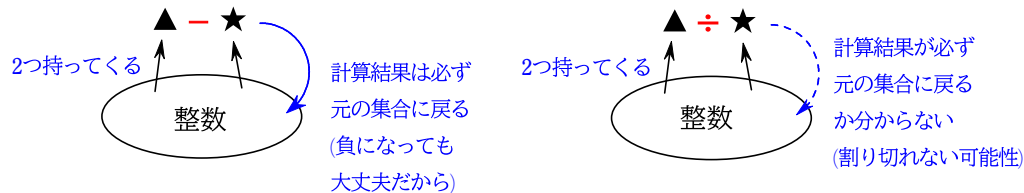
和 $a+b$ 、積 ab は常に自然数であるが、

差 $a-b$ 、商 $\frac{a}{b}$ は必ずしも自然数であるとは限らない。



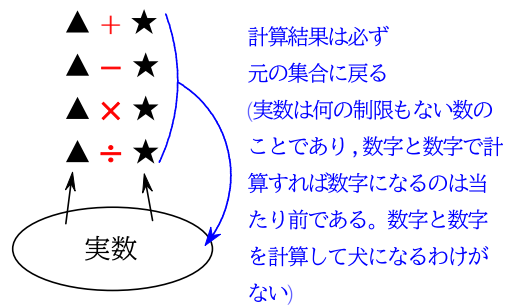
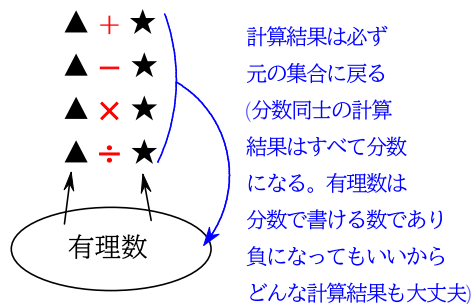
- (2) a, b が整数のとき
和 $a+b$, 差 $a-b$, 積 ab は常に整数であるが,
商 $\frac{a}{b}$ は必ずしも整数であるとは限らない。 図

例えば $a=-2, b=3$ のとき
 $a+b=(-2)+3=1$
 $a-b=(-2)-3=-5$
 $ab=(-2)\times 3=-6$
 $\frac{a}{b}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$



前ページの例 18 で示したように, 自然数, 整数は, それぞれの数の範囲で常に四則計算ができるとは限らない。一方, 有理数, 実数は, それぞれの数の範囲で常に四則計算ができる。すなわち, 次のことがいえる。

2 つの有理数の和, 差, 積, 商は常に有理数である。
2 つの実数の和, 差, 積, 商は常に実数である。



練習 27 下の表は数の範囲と四則計算についてまとめたものである。

表の空らんには $\bigcirc$ か $\times$ のうち適切なものを入れよ。また, $\times$ の場合は, 結果がその範囲にない計算の例を 1 つあげよ。

数の範囲	加法	減法	乗法	除法
自然数	$\bigcirc$	$\times$		
整数	$\bigcirc$	$\bigcirc$		
有理数	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
実数	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$

■表の説明■

$\bigcirc$ は計算がその範囲で常にできる場合
 $\times$ は計算がその範囲で常に行けるとは限らない場合

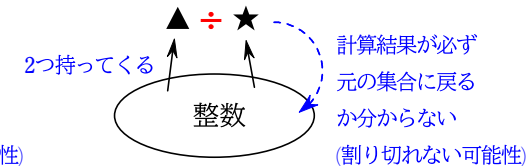
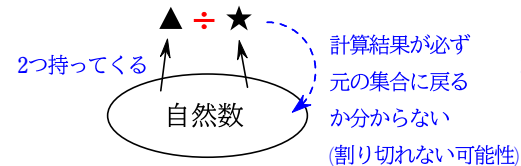
解答

数の範囲	加法	減法	乗法	除法
自然数	$\bigcirc$	$\times$	$\bigcirc$	$\times$
整数	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\times$
有理数	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
実数	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$

例 自然数の減法 $1-2=-1$

自然数の除法 $2\div 3=\frac{2}{3}$

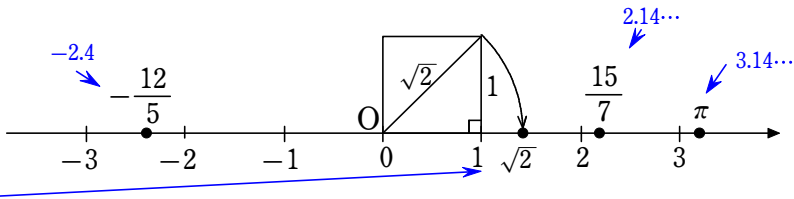
整数の除法 $-3\div 5=-\frac{3}{5}$



＜数直線と絶対値＞

直線上に基準となる点 O をとって数 0 を対応させ、その点の両側に数の目もりをつけた直線を、**数直線** という。点 O を **原点** という。
数直線上では、1つの実数に1つの点に対応している。

原点 O はゼロではなくオーです。
英語の **origin** の頭文字です。



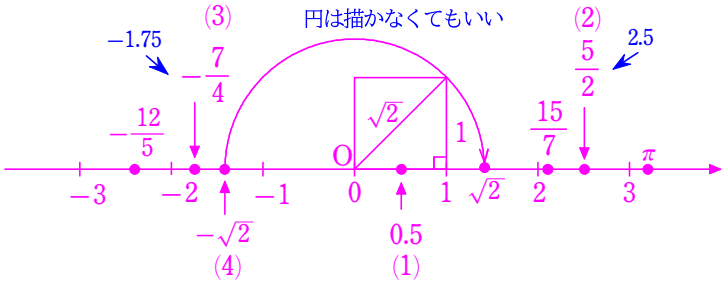
$\sqrt{2}$ は1.414...であり、小数ではすべて書ききることができない。しかし図形で考えると、この直角二等辺三角形の斜辺が $\sqrt{2}$ なので、その長さをコンパスでとると $\sqrt{2}$ という点を数直線上にとることができる。実際に書けないが存在することがわかる。

(この解答は以上のことを示すために図形を登場させているだけなので、実際の問題で図形は書かなくてもよい。)

練習 28 次の実数に対応する点を上の数直線上にしろ。

- (1) 0.5 (2) $\frac{5}{2}$ (3) $-\frac{7}{4}$ (4) $-\sqrt{2}$

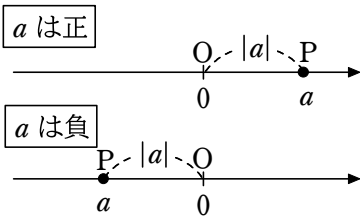
解答



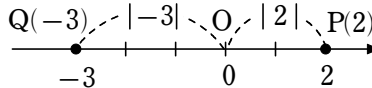
数直線上で、点 P に実数 a が対応しているとき、 a を点 P の **座標** といい、座標が a である点 P を $P(a)$ で表す。

数直線上の原点 $O(0)$ と点 $P(a)$ の間の距離を、 a の **絶対値** といい、記号 $|a|$ で表す。
 0 の絶対値 $|0|$ は 0 である。

-3 の絶対値は ± 3 という
謎の答えを見ることがある



例 19 $P(2)$ とすると $OP=2$ である。よって
 2 の絶対値は $|2|=2$ $OP=2-0=2$
 $Q(-3)$ とすると $OQ=3$ である。よって
 -3 の絶対値は $|-3|=3$ 終
 $OQ=0-(-3)=3$



線分の長さ=(大きい座標)-(小さい座標)
右端 左端

実数 a の絶対値について、次のことが成り立つ。

絶対値

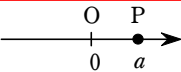
a が正の数または 0 のとき

$$|a| = a$$

a が負の数のとき

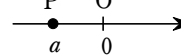
$$|a| = -a$$

この公式を使うと、図を書かなく
ても絶対値が求められる



a は 0 以上より原点より右側

$$OP = \text{右} - \text{左} = a - 0 = a$$



a は 0 未満より原点より左側

$$OP = \text{右} - \text{左} = 0 - a = -a$$

注意 実数 a の絶対値 $|a|$ は、 0 以上の数である。

参考 2 の絶対値は $|2|=2$ 、 -3 の絶対値は $|-3|=3$ であるから

「絶対値はその数字から符号をとったもの」という考え方で構わない。

しかし高校の範囲では、この考え方だとひっかかる問題がよく出題される。
また、文字が入った絶対値の問題も出題される。文字には正や負のいろいろな数
が代入されるので、場合分けをしなければならない。ゆえに上の公式を使って
考えることが多くなる。

練習 29 次の値を求めよ。

(1) $|3|$

(2) $|-4|$

(3) $\left|\frac{2}{3}\right|$

(4) $|\sqrt{2}|$

解答

(1) $|3| = 3$

(2) $|-4| = -(-4) = 4$

(3) $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

(4) $|\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

絶対値

a が正の数または0 のとき $|a| = a$

中身が正なら、中身がそのまま出てくる

a が負の数 のとき $|a| = -a$

中身が正なら、中身の (-1) 倍が出てくる

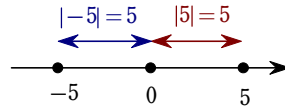
練習 30 絶対値が5である数をすべて求めよ。

解答

絶対値が5である数は 5, -5

そのまま出てきて5になっているなら、中身は5のはずなので $|5| = 5$

(-1) 倍されて出てきて5になっているなら、中身は -5 のはずなので $|-5| = 5$



例 20 (1) $|5-3| = |2| = 2$ 先に $5-3$ を計算する

(2) $|3-5| = |-2| = -(-2) = 2$ 先に $3-5$ を計算する。

(3) $1-\sqrt{2}$ は負の数であるから $\sqrt{2}$ は1.4程度の数なので1より大きい。

$|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = -1+\sqrt{2}$ 実際に $1-\sqrt{2} = 1-1.4\cdots = -0.4\cdots$

終

よくテストに出る問題です。

そして $|1-\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$ と間違える人が非常に多いです。

練習 31 次の値を求めよ。

(1) $|2-3|$

(2) $|1-(-3)|$

(3) $|2-\sqrt{2}|$

(4) $|3-\pi|$

解答

(1) $|2-3| = |-1| = -(-1) = 1$

(2) $|1-(-3)| = |1+3| = |4| = 4$

(3) $2-\sqrt{2}$ は正の数であるから

$|2-\sqrt{2}| = 2-\sqrt{2}$

(4) $3-\pi$ は負の数であるから

$|3-\pi| = -(3-\pi) = -3+\pi$

先に $2-3$ を計算する。

中身が負の数より (-1) 倍して外に出す

先に $1-(-3)$ を計算する。

中身が正の数よりそのまま外に出す

$\sqrt{2}$ は1.4程度の数なので2より小さい。

実際に $2-\sqrt{2} = 2-1.4\cdots = 0.5\cdots$

中身が正の数よりそのまま外に出す

π は3.14程度の数なので3より大きい。

実際に $3-\pi = 3-3.14\cdots = -0.14\cdots$

中身が負の数より (-1) 倍して外に出す