

第1章「数と式」第1節 式の計算 研究 複雑な式の因数分解

文字が3種類の場合です

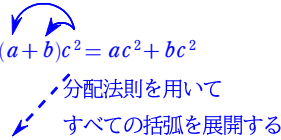
次の式を因数分解することを考えてみよう。

$(a+b)c^2+(b+c)a^2+(c+a)b^2+2abc$

この式は、 a, b, c のどの文字についても2次式である。

$ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2+ab^2+2abc$

a の次数	1	0	2	2	0	1	1	→ 2次式
b の次数	0	1	1	0	2	2	1	→ 2次式
c の次数	2	2	0	1	1	0	1	→ 2次式



そこで、たとえば、 a について降べきの順に整理してみる。← b でも c でも同じ解答になる

例1 $(a+b)c^2+(b+c)a^2+(c+a)b^2+2abc$ の因数分解

$(a+b)c^2+(b+c)a^2+(c+a)b^2+2abc$

$=ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2+ab^2+2abc$ ← 並べ直すため、一度すべて展開する

$=\overset{2}{b}a^2+\overset{2}{c}a^2+\overset{1}{b^2}a+\overset{1}{c^2}a+\overset{1}{b^2}c+\overset{0}{b^2}c+\overset{0}{bc^2}$ ← a について降べきの順に並べる

$=\underline{(b+c)a^2}+\underline{(b^2+2bc+c^2)a}+\underline{(b^2c+bc^2)}$

$=\underline{(b+c)a^2}+\underline{(b+c)^2a}+\underline{bc(b+c)}$

それぞれの場所を
因数分解
 $=\underline{(b+c)}\underline{(a^2+(b+c)a+bc)}$

$=\underline{(b+c)}\underline{(a+b)(a+c)}$

$=\underline{(a+b)}\underline{(b+c)}\underline{(c+a)}$ 終

$(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$b+c=M$ とおくと

Ma^2+M^2a+bcM

$=\underline{M}\cdot a^2+\underline{M}\cdot Ma+\underline{M}\cdot bc$

$=\underline{M}(a^2+Ma+bc)$

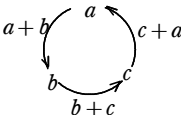
ここで M を戻す。中括弧に注意。

補足 上のような式の因数分解では、最後は $(a+b), (b+c), (c+a)$ の順に掛けた形で表すことが多い。 輪環の順という

和 積

$a^2+(\bigcirc+\triangle)a+\bigcirc\triangle=(a+\bigcirc)(a+\triangle)$

$a^2+(b+c)a+bc=(a+b)(a+c)$



参考 中括弧の中の因数分解について、和と積の公式を用いた。 $a^2+(b+c)a+bc$ は a について2次式であるが b や c については1次式であるので、次数の低い文字について並べても因数分解できる。

$$\begin{aligned} a^2+(b+c)a+bc &= a^2+ba+ca+bc \\ &= \overset{1}{b}a+\overset{1}{b}c+\overset{0}{a^2}+\overset{0}{ca} \\ &= \underline{(a+c)b}+\underline{(a^2+ca)} \\ &= \underline{(a+c)b}+\underline{a(a+c)} = Mb+aM = M(b+a) = (a+c)(b+a) \end{aligned}$$

$a+c=M$ とおく

M を戻す

練習 1 次の式を因数分解せよ。

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

解答

a について整理すると

a の次数

2	1	0	0	1	2
a^2b	$-ab^2$	$+b^2c$	$-bc^2$	$+c^2a$	$-ca^2$

それぞれの場所を因数分解

$$\begin{aligned} &= \underline{a^2b-ca^2} + \underline{c^2a-ab^2} + \underline{b^2c-bc^2} \\ &= \underline{(b-c)a^2} + \underline{(c^2-b^2)a} + \underline{bc(b-c)} \\ &= \underline{(b-c)a^2} - \underline{(b^2-c^2)a} + \underline{bc(b-c)} \\ &= \underline{(b-c)a^2} - \underline{(b+c)(b-c)a} + \underline{bc(b-c)} \\ &= \underline{(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}} \\ &= \underline{(b-c)\{a^2+(-b-c)a+bc\}} \\ &= \underline{(b-c)(a-b)(a-c)} \\ &= \underline{(b-c)(a-b)} \times \underline{\{-(-c-a)\}} \\ &= \underline{-(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

(この問題に関してのポイント)

$b-c$ が見えてくるので、中央の c^2-b^2 も $c^2-b^2 = -b^2+c^2 = -(b^2-c^2)$ とすることがポイント!

$(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$b-c=M$ とおくと

$$\begin{aligned} &Ma^2-(b+c)Ma+bcM \\ &= \underline{M \cdot a^2} - \underline{M \cdot (b+c)a} + \underline{M \cdot bc} \\ &= \underline{M\{a^2-(b+c)a+bc\}} \end{aligned}$$

ここで M を戻す。中括弧に注意。

$a-c$ を $c-a$ にしてしまうミスが多いので注意

$$\begin{aligned} a-c &= -c+a \\ &= -(c-a) \end{aligned}$$

ここまでできれば正解だが、輪環の順にしたいので以下の変形をしている

和 積

$$\begin{aligned} a^2+(\bigcirc+\triangle)a+\bigcirc\triangle &= (a+\bigcirc)(a+\triangle) \\ a^2+(-b-c)a+(-b)(-c) &= (a-b)(a-c) \end{aligned}$$