1 $A = x + y + z$，$B = 2x - y - z$，$C = x - y - 3z$ とする。次の式を計算せよ。
(1)　$2(A - B) - (B - C)$
(2)　$3(A + C) - 2(2B - A)$

解答　(1)　$-3x + 4y + 2z$　　(2)　$6y$

解説

A, B, C のまま計算して式を簡単にする

(1)　$2(A - B) - (B - C) = 2A - 2B - B + C = 2A - 3B + C$ 　ここで代入する。
　必ずかっこをつけること。
$= 2(x + y + z) - 3(2x - y - z) + (x - y - 3z)$
　ここは中身がそのまま出てくる
$= 2(x + y + z) + (-3) \cdot (2x - y - z) + (x - y - 3z)$
$= 2x + 2y + 2z - 6x + 3y + 3z + x - y - 3z$
$= -3x + 4y + 2z$

(2)　$3(A + C) - 2(2B - A) = 3(A + C) + (-2) \cdot (2B - A)$ 　ここで代入する。
　必ずかっこをつけること。
$= 3A + 3C - 4B + 2A = 5A - 4B + 3C$
$= 5(x + y + z) - 4(2x - y - z) + 3(x - y - 3z)$
$= 5(x + y + z) + (-4) \cdot (2x - y - z) + 3(x - y - 3z)$
$= 5x + 5y + 5z - 8x + 4y + 4z + 3x - 3y - 9z$
$= 6y$

2 次の式を展開せよ。
(1)　$(2m + 5)(m - 2)$
(2)　$(4x - 5a)(4x + 5a)$
(3)　$(-x - 2)^2$
(4)　$(x - a)(a + x)$
(5)　$(x - a + 1)^2$
(6)　$(a + b - c)(a - b + c)$

解答　(1)　$2m^2 + m - 10$　　(2)　$16x^2 - 25a^2$　　(3)　$x^2 + 4x + 4$　　(4)　$x^2 - a^2$
　　(5)　$x^2 - 2ax + a^2 + 2x - 2a + 1$　　(6)　$a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

解説

(1)　$(2m + 5)(m - 2) = 2 \cdot 1m^2 + \{2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1\}m + 5 \cdot (-2) = 2m^2 + m - 10$
(2)　$(4x - 5a)(4x + 5a) = (4x)^2 - (5a)^2 = 16x^2 - 25a^2$ 　　$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
(3)　$(-x - 2)^2 = \{(-x) + (-2)\}^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot (-2) + (-2)^2 = x^2 + 4x + 4$

別解　$(-x - 2)^2 = \{-(x + 2)\}^2 = \{(-1) \cdot (x + 2)\}^2 = (-1)^2 \cdot (x + 2)^2$ 　　$(-1)^2 = 1$
$= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$
$= x^2 + 4x + 4$

(4)　$(x - a)(a + x) = (x - a)(x + a) = x^2 - a^2$
(5)　$(x - a + 1)^2 = \{(x - a) + 1\}^2$ 　　$x - a = M$ とおくと
$\{(x - a) + 1\}^2$
$= (M + 1)^2$
$= M^2 + 2M + 1$
M を戻す
$= (x - a)^2 + 2(x - a) + 1^2$
$= x^2 - 2ax + a^2 + 2x - 2a + 1$

(6)　$(a + b - c)(a - b + c) = \{a + (b - c)\}\{a - (b - c)\}$ 　　$b - c = M$ とおくと
$\{a + (b - c)\}\{a - (b - c)\}$
$= (a + M)(a - M)$
$= a^2 - M^2$
M を戻す
$-b + c = -(b - c)$ とする
$= a^2 - (b - c)^2$
$= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$
$= a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

$\boxed{3}$ 次の式を因数分解せよ。

(1) $2ax^2-8a$

(2) $ax^2+by^2-ay^2-bx^2$

(3) $(x-4)(3x+1)+10$

(4) $4n^3+6n^2+2n$

(5) $x^3+x^2y-x^2-y$

(6) $4x^2-y^2-2y-1$

(7) $x^2+2ax-3a^2+4x+8a+3$

(8) $2x^2-xy-3y^2-3x+7y-2$

[解答] (1) $2a(x+2)(x-2)$ (2) $(a-b)(x+y)(x-y)$ (3) $(x-3)(3x-2)$

(4) $2n(n+1)(2n+1)$ (5) $(x-1)(x^2+xy+y)$ (6) $(2x+y+1)(2x-y-1)$

(7) $(x-a+3)(x+3a+1)$ (8) $(x+y-2)(2x-3y+1)$

[解説]

(1) $2ax^2-8a=2a\cdot x^2-2a\cdot 4=2a(x^2-4)=2a(x^2-2^2)=2a(x+2)(x-2)$

(2) x や y について2次式であり

a や b について1次式である。

よって a について降べきの順に並べると

$ax^2+by^2-ay^2-bx^2$

$=ax^2-ay^2+by^2-bx^2$

$=(x^2-y^2)a+(y^2-x^2)b$ ← $y^2-x^2=-x^2+y^2=-(x^2-y^2)$ とする

$=(x^2-y^2)a-(x^2-y^2)b$ $x^2-y^2=M$ とおくと

$=(x^2-y^2)(a-b)$ $(x^2-y^2)a-(x^2-y^2)b$

$=(x+y)(x-y)(a-b)$ $=Ma-Mb$

                       $=M(a-b)$

                       M を戻す

$ax^2+b\cancel{y^2}-ay^2-bx^2$
- x の次数 : ②, 0, 0, ② → x の2次式
- y の次数 : 0, ②, ②, 0 → y の2次式
- a の次数 : ①, 0, ①, 0 → a の1次式
- b の次数 : 0, ①, 0, ① → b の1次式

[別解]

$ax^2+by^2-ay^2-bx^2=ax^2-bx^2+by^2-ay^2$

$=(a-b)x^2+(b-a)y^2$ ← $a-b$ のかたまりが見えたら、こんな解答もあります

$=(a-b)x^2-(a-b)y^2$ $b-a=-a+b=-(a-b)$ とする

$=(a-b)(x^2-y^2)$ $a-b=M$ とおくと

$=(a-b)(x+y)(x-y)$ $(a-b)x^2-(a-b)y^2$

                       $=Mx^2-My^2$

                       $=M(x^2-y^2)$

                       M を戻す

まとまりが見えないときは展開するしかない

(3) $(x-4)(3x+1)+10=3x^2+\{1\cdot 1+(-4)\cdot 3\}x-4+10$

$=3x^2-11x-4+10$

$=3x^2-11x+6$ たすき掛け

$=(x-3)(3x-2)$

たすき掛け表:
$$1 \diagup -3 \longrightarrow -9$$
$$3 \diagup -2 \longrightarrow -2$$
$$\overline{3 \qquad 6 \qquad -11}$$

(4) $4n^3+6n^2+2n=2n\cdot 2n^2+2n\cdot 3n+2n\cdot 1$

$=2n(2n^2+3n+1)$

$=2n(n+1)(2n+1)$

たすき掛け:
$$1 \diagup 1 \longrightarrow 2$$
$$2 \diagup 1 \longrightarrow 1$$
$$\overline{2 \qquad 1 \qquad 3}$$

(5) x について3次式、

y について1次式 であるから

次数の低い y についての降べきの順に並べる。

$x^3+x^2y-x^2-y=x^2y-y+x^3-x^2$

$=(x^2-1)y+(x^3-x^2)$

$=(x+1)(x-1)y+x^2(x-1)$

$=(x-1)\{(x+1)y+x^2\}$

$=(x-1)(x^2+xy+y)$

$x^3+x^2y-x^2-y$
- x の次数 : ③, 2, 2, 0 → x の3次式
- y の次数 : 0, ①, 0, ① → y の1次式

文字によって次数に違いがあるときは、低い方で降べきの順

$x-1=M$ とおくと

$(x+1)(x-1)y+x^2(x-1)$

$=(x+1)My+x^2M$

$=M\cdot(x+1)y+M\cdot x^2$

$=M\cdot\{(x+1)y+x^2\}$

M を戻す

(6) x についても2次式、

y についても2次式 であるから x についての降べきの順に並べる。

$4x^2-y^2-2y-1=4x^2-(y^2+2y+1)$

$=(2x)^2-(y+1)^2$

$=\{2x+(y+1)\}\{2x-(y+1)\}$

$=(2x+y+1)(2x-y-1)$

$2x-(y+1)$

$y+1=M$ とおくと

$(2x)^2-(y+1)^2$

$=(2x)^2-M^2$

$=(2x+M)(2x-M)$

M を戻す

(7) x についても2次式、a についても2次式 であるから x についての降べきの順に並べる。

$x^2+2ax-3a^2+4x+8a+3$

$=x^2+2ax+4x-3a^2+8a+3$

$=x^2+(2a+4)x-(3a^2-8a-3)$

$=x^2+(2a+4)x-(a-3)(3a+1)$

$=\{x-(a-3)\}\{x+(3a+1)\}$

$=(x-a+3)(x+3a+1)$

$x-(a-3)$

マイナスを前に出すのがポイント

たすき掛け:
$$1 \diagup -3 \longrightarrow -9$$
$$3 \diagup 1 \longrightarrow 1$$
$$\overline{3 \qquad -3 \qquad -8}$$

$3a^2-8a-3=(a-3)(3a+1)$ たすき掛け

$1x^2+(2a+4)x-(a-3)(3a+1)$

たすき掛け:
$$1 \diagup -(a-3) \longrightarrow -a+3$$
$$1 \diagup 3a+1 \longrightarrow 3a+1$$
$$\overline{1 \quad -(a-3)(3a+1) \quad 2a+4}$$

どっちかにマイナスが付く

(8) x についても2次式、y についても2次式 であるから x についての降べきの順に並べる。

$2x^2-xy-3y^2-3x+7y-2$

$=2x^2-xy-3x-3y^2+7y-2$

$=2x^2+(-y-3)x-(3y^2-7y+2)$

$=2x^2+(-y-3)x-(y-2)(3y-1)$

$=\{x+(y-2)\}\{2x-(3y-1)\}$

$=(x+y-2)(2x-3y+1)$

$2x-(3y-1)$

マイナスを前に出すのがポイント

たすき掛け $3y^2-7y+2=(y-2)(3y-1)$

たすき掛け:
$$1 \diagup -2 \longrightarrow -6$$
$$3 \diagup -1 \longrightarrow -1$$
$$\overline{3 \qquad 2 \qquad -7}$$

$2x^2+(-y-3)x-(y-2)(3y-1)$

たすき掛け:
$$1 \diagup y-2 \longrightarrow 2y-4$$
$$2 \diagup -(3y-1) \longrightarrow -3y+1$$
$$\overline{2 \quad -(y-2)(3y-1) \quad -y-3}$$

どっちかにマイナスが付く

$2\times(y-2)=2y-4$