

第1章「数と式」第1節 式の計算 発展 3次式の展開と因数分解(数学Ⅱの内容です)

$(a+b)^3$ を展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\ &= (a^2+2ab+b^2)a + (a^2+2ab+b^2)b \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

よって  $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$(a-b)^3$ を上のように展開してもいいが、こっちの方が早い  
また、 $\textcircled{1}$ において、 $b$ を $-b$ でおき換えると

$$\{a+(-b)\}^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$$

よって  $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

したがって、次の展開の公式が成り立つ。

展開の公式 3乗だから係数が3と覚えましょう

5  $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

符号は+-+-と交互になる

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ \times) a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$a$ の次数    3        2        1        0
$b$ の次数    0        1        2        3

練習1 次の式を展開せよ。

- (1)  $(x+2)^3$
- (2)  $(x-1)^3$
- (3)  $(3a+b)^3$
- (4)  $(x-2y)^3$

【解答】  $(a+b)^3$ の公式で  $a \leftarrow x, b \leftarrow 2$

(1)  $(x+2)^3 = x^3+3 \cdot x^2 \cdot 2+3 \cdot x \cdot 2^2+2^3$

$= x^3+6x^2+12x+8$

$(a-b)^3$ の公式で  $a \leftarrow x, b \leftarrow 1$

(2)  $(x-1)^3 = x^3-3 \cdot x^2 \cdot 1+3 \cdot x \cdot 1^2-1^3$

$= x^3-3x^2+3x-1$

$(a+b)^3$ の公式で  $a \leftarrow 3a, b \leftarrow b$

(3)  $(3a+b)^3 = (3a)^3+3 \cdot (3a)^2 \cdot b+3 \cdot 3a \cdot b^2+b^3$

$= 27a^3+27a^2b+9ab^2+b^3$

$(a-b)^3$ の公式で  $a \leftarrow x, b \leftarrow 2y$

(4)  $(x-2y)^3 = x^3-3 \cdot x^2 \cdot 2y+3 \cdot x \cdot (2y)^2-(2y)^3$

$= x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

例1 (1)  $(x+1)^3 = x^3+3 \cdot x^2 \cdot 1+3 \cdot x \cdot 1^2+1^3$  ← この式を書く癖を付けた方がミスは減ります。  
 $= x^3+3x^2+3x+1$  特に3を掛けるのを忘れる人が多いです。

$(a-b)^3$ の公式で  $a \leftarrow 2x, b \leftarrow y$

(2)  $(2x-y)^3 = (2x)^3-3 \cdot (2x)^2 \cdot y+3 \cdot 2x \cdot y^2-y^3$

$= 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$  終

$(a+b)^3$ の公式で  $a \leftarrow 2x, b \leftarrow -y$  と考えてもよい。

$(2x-y)^3$

$= \{2x+(-y)\}^3$

$= (2x)^3+3 \cdot (2x)^2 \cdot (-y)+3 \cdot (2x) \cdot (-y)^2+(-y)^3$

$= 8x^3+3 \cdot 4x^2 \cdot (-y)+3 \cdot 2x \cdot y^2+(-y^3)$

$= 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

次の式の展開の結果も、公式として利用できる。

この公式はよく因数分解で使われます

### 展開の公式

$$6 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

同じ符号

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$

$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

$$=a^3+b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \text{ において,}$$

$b$  を  $-b$  に置き換えると

$$[a+(-b)][a^2-a \cdot (-b)+(-b)^2]=a^3+(-b)^3$$

つまり

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

が成り立つ。

注意 展開の公式 6 が成り立つことは、左辺を展開して確かめることができる。

$$a^3+b^3 \text{ の公式で } a \leftarrow x, b \leftarrow 1$$

$$\text{例 2 (1) } (x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x \cdot 1+1^2)$$

$$a^3-b^3 \text{ の公式で } a \leftarrow x, b \leftarrow 2y \Rightarrow x^3+1^3=x^3+1$$

$$(2) (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=(x-2y)\{x^2+x \cdot 2y+(2y)^2\}$$

$$=x^3-(2y)^3=x^3-8y^3$$

終

公式が使えるか確かめている。

頭の中でできるなら、

この式は書かなくてもよい。

公式に気がつかなくて

そのまま分配法則で展開してもよい。

ただ、公式に気がつけば少しだけ早い。

練習 2 次の式を展開せよ。

$$(1) (x+2)(x^2-2x+4)$$

$$(2) (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$$

解答

$$a^3+b^3 \text{ の公式で } a \leftarrow x, b \leftarrow 2$$

$$(1) (x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x \cdot 2+2^2)$$

$$=x^3+2^3=x^3+8$$

$$a^3-b^3 \text{ の公式で } a \leftarrow x, b \leftarrow 3y$$

$$(2) (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)=(x-3y)\{x^2+x \cdot 3y+(3y)^2\}$$

$$=x^3-(3y)^3=x^3-27y^3$$

展開の公式 6 を逆に利用する因数分解は、次のようになる。

### 因数分解の公式

$$5 \quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

後ろの括弧はこれ以上因数分解できません。

(できるなら、それが公式になっています)

逆の符号

最後はプラス

同じ符号

注意 よくある間違い

展開すると4項が出ます

$$a^3+b^3=(a+b)^3$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$$

気持ちは分かるが、2がついてしまう

$$\text{例 3 (1) } x^3+64=x^3+4^3=(x+4)(x^2-x \cdot 4+4^2)$$

$$=(x+4)(x^2-4x+16)$$

$$a^3-b^3 \text{ の公式で } a \leftarrow 2x, b \leftarrow a$$

$$(2) 8x^3-a^3=(2x)^3-a^3=(2x-a)\{(2x)^2+2x \cdot a+a^2\}$$

$$=(2x-a)(4x^2+2ax+a^2)$$

終

練習 3 次の式を因数分解せよ。

$$(1) x^3+27$$

$$(2) x^3-1$$

$$(3) 125x^3+a^3$$

解答

$$a^3+b^3 \text{ の公式で } a \leftarrow x, b \leftarrow 3$$

$$(1) x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x \cdot 3+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$$

$$a^3-b^3 \text{ の公式で } a \leftarrow x, b \leftarrow 1$$

$$(2) x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x \cdot 1+1^2)=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$a^3+b^3 \text{ の公式で } a \leftarrow 5x, b \leftarrow a$$

$$(3) 125x^3+a^3=(5x)^3+a^3=(5x+a)\{(5x)^2-5x \cdot a+a^2\}$$

$$=(5x+a)(25x^2-5ax+a^2)$$