

第1章 「数と式」 第1節 式の計算 発展 3次式の展開と因数分解(数学IIの内容です)

$(a+b)^3$ を展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) \\&= \underline{(a^2+2ab+b^2)}(a+b) \\&= (a^2+2ab+b^2)a + (a^2+2ab+b^2)b \\&= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 \\&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ \times) \quad a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

よって $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \dots\dots \textcircled{1}$

$(a-b)^3$ を上のように展開してもいいが、こっちの方が早い

また、①において、 b を $-b$ でおき換えると

$$\{a+(-b)\}^3 = a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$$

よって $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

したがって、次の展開の公式が成り立つ。

展開の公式		3乗だから係数が3と覚えましょう
5	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	
	$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	符号は $+-+-$ と交互になる

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$a \text{ の次数 } \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$b \text{ の次数 } \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

練習 1 次の式を展開せよ。

$$(1) (x+2)^3 \qquad (2) (x-1)^3$$

$$(3) (3a+b)^3 \qquad (4) (x-2y)^3$$

解答 $(a+b)^3$ の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 2$

$$(1) (x+2)^3 = x^3+3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$$

$$= x^3+6x^2+12x+8$$

$(a-b)^3$ の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 1$

$$(2) (x-1)^3 = x^3-3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3$$

$$= x^3-3x^2+3x-1$$

$(a+b)^3$ の公式で $a \leftarrow 3a, b \leftarrow b$

$$\begin{aligned}(3) (3a+b)^3 &= (3a)^3+3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot 3a \cdot b^2 + b^3 \\&= 27a^3+27a^2b+9ab^2+b^3\end{aligned}$$

$(a-b)^3$ の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 2y$

$$\begin{aligned}(4) (x-2y)^3 &= x^3-3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3 \\&= x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3\end{aligned}$$

例 1 (1) $(x+1)^3 = x^3+3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 \leftarrow$ この式を書く癖を付けた方がミスは減ります。
 $= x^3+3x^2+3x+1$

特に3を掛けるのを忘れる人が多いです。

$(a-b)^3$ の公式で $a \leftarrow 2x, b \leftarrow y$

$$\begin{aligned}(2) (2x-y)^3 &= (2x)^3-3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3 \\&= 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3 \quad \text{終}\end{aligned}$$

$(a+b)^3$ の公式で $a \leftarrow -2x, b \leftarrow -y$ と考えてもよい。

$$\begin{aligned}(2x-y)^3 &= [2x+(-y)]^3 \\&= (2x)^3+3 \cdot (2x)^2 \cdot (-y) + 3 \cdot (2x) \cdot (-y)^2 + (-y)^3 \\&= 8x^3+3 \cdot 4x^2 \cdot (-y) + 3 \cdot 2x \cdot y^2 + (-y^3) \\&= 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3\end{aligned}$$

次の式の展開の結果も、公式として利用できる。

この公式はよく因数分解で使われます

展開の公式

$$6 \quad (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

同じ符号

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ において、
bを $-b$ に置き換えると

$$\{a+(-b)\}[a^2-a\cdot(-b)+(-b)^2]=a^3+(-b)^3$$

つまり

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

が成り立つ。

注意 展開の公式6が成り立つことは、左辺を展開して確かめることができる。

a^3+b^3 の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 1$

$$\text{例 2} \quad (1) \quad (x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)$$

公式が使えるか確かめている。

頭の中でできるなら、
この式は書かなくてもよい。

a^3-b^3 の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 2y$

$$(2) \quad (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=(x-2y)\{x^2+x\cdot 2y+(2y)^2\}$$

$$=x^3-(2y)^3=x^3-8y^3 \quad \text{終}$$

公式に気がつかなくて
そのまま分配法則で展開してもよい。
ただ、公式に気がつけば少しだけ早い。

練習 2 次の式を展開せよ。

$$(1) \quad (x+2)(x^2-2x+4)$$

$$(2) \quad (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$$

解答 a^3+b^3 の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 2$

$$(1) \quad (x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$$

$$=x^3+2^3=x^3+8$$

a^3-b^3 の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 3y$

$$(2) \quad (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)=(x-3y)\{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}$$

$$=x^3-(3y)^3=x^3-27y^3$$

展開の公式6を逆に利用する因数分解は、次のようになる。

因数分解の公式

$$5 \quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

最後はプラス
逆の符号
同じ符号

後ろの括弧はこれ以上因数分解できません。
(できるなら、それが公式になっています)

注意 よくある間違い 展開すると4つ項が出ます

$$a^3+b^3=(a+b)^3$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$$

気持ちは分かるが、2がついてしまう

$$\text{例 3} \quad (1) \quad x^3+64=x^3+4^3=(x+4)(x^2-x\cdot 4+4^2)$$

$$=(x+4)(x^2-4x+16)$$

$$(2) \quad 8x^3-a^3=(2x)^3-a^3=(2x-a)[(2x)^2+2x\cdot a+a^2]$$

$$=(2x-a)(4x^2+2ax+a^2)$$

終

練習 3 次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad x^3+27$$

$$(2) \quad x^3-1$$

$$(3) \quad 125x^3+a^3$$

解答

a^3+b^3 の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 3$

$$(1) \quad x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$$

a^3-b^3 の公式で $a \leftarrow x, b \leftarrow 1$

$$(2) \quad x^3-1=x^3-1^3=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)=(x-1)(x^2+x+1)$$

a^3+b^3 の公式で $a \leftarrow 5x, b \leftarrow a$

$$(3) \quad 125x^3+a^3=(5x)^3+a^3=(5x+a)[(5x)^2-5x\cdot a+a^2]$$

$$=(5x+a)(25x^2-5ax+a^2)$$