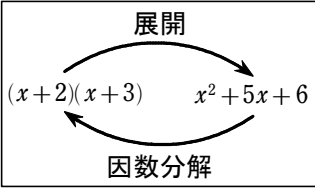


第1章「数と式」第1節 式の計算 3 因数分解

$(x+2)(x+3)$ を展開した式から、次の等式が成り立つことがわかる。

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

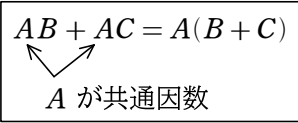
このように、1つの多項式を1次以上の多項式の積の形に表すことを、もとの式を **因数分解** するといひ、積を作っている各式をもとの式の **因数** という。
ここでは、因数分解について学ぼう。



$x^2+5x+6=x(x+5)+6$
これは因数分解ではありません。
式全体を積の形にします。

＜共通因数による因数分解＞

多項式の各項に共通な因数があれば、その共通因数を かっこの外にくくり出して、式を因数分解することができます。 **因数分解では、外に出すことを「くくり出す」と言ひます。**



$$\underline{A} \times B + \underline{A} \times C = \underline{A} \times (B + C)$$

$$\underline{A} \times C + B \times \underline{C} = (A + B) \times \underline{C}$$

例 14 係数がどっちも2の倍数→2がくくり出せる
 $2ax^2+6axy$ の因数分解

$$2ax^2+6axy=2ax \cdot x+2ax \cdot 3y=2ax(x+3y)$$

↑ 共通因数 ↑
例えば $x(2ax+6ay)$ はまだ括弧の外に出せるものがあるので不十分です。

注意 共通因数はすべてかっこの外にくくり出す。
因数分解は共通で掛けられているものを最大限外に出すので、とは最大公約数を求めるイメージを持ってください。

練習 17 次の式を因数分解せよ。

(1) $3ab-2ac$ (2) $20x^3-8x^2y^2$ (3) $3a^2x+6ax^2+ax$

解答

(1) $3ab-2ac=\underline{a} \cdot 3b-\underline{a} \cdot 2c=\underline{a}(3b-2c)$
(2) $20x^3-8x^2y^2=\underline{4x^2} \cdot 5x-\underline{4x^2} \cdot 2y^2=\underline{4x^2}(5x-2y^2)$
(3) $3a^2x+6ax^2+ax=\underline{ax} \cdot 3a+\underline{ax} \cdot 6x+\underline{ax} \cdot 1=\underline{ax}(3a+6x+1)$

例題 3 次の式を因数分解せよ。

$$(a-b)x+(b-a)y$$

$A-B$ と $B-A$ があつたら、
 $B-A=-A+B=-(A-B)$ とする。

符号注意

解答 $(a-b)x+(b-a)y=(a-b)x-(a-b)y$
$$=(a-b)(x-y)$$

苦手な人は同じ括弧を文字でおきましよう。
 $(a-b)x-(a-b)y \leftarrow (a-b)$ を M とおく
 $=Mx-My \leftarrow$ 因数分解
 $=M(x-y) \leftarrow M$ を戻す
$$=(a-b)(x-y)$$

練習 18 次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)c+d(a+b)$ (2) $(x-2y)a+(2y-x)b$

解答

(1) $(a+b)c+d(a+b)=Mc+dM$
$$=Mc+Md$$

$$=M(c+d)$$

$$=(a+b)(c+d)$$

できる人は一気にここまで行ってよい

$Mc+dM$
 $=cM+dM$
 $=(c+d)M$
 $=(c+d)(a+b)$
でもよい。

(2) $(x-2y)a+(2y-x)b=(x-2y)a-(x-2y)b$
$$=Ma-Mb$$

$$=M(a-b)$$

$$=(x-2y)(a-b)$$

できる人は一気にここまで行ってよい

$2y-x$
 $=-x+2y$
 $=(x-2y)$

＜ 2 次式の因数分解＞

展開の公式を逆に利用すると、因数分解の公式が得られる。
因数分解は試行錯誤の繰り返しです。展開のように機械的にはできません。

因数分解の公式

1 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ 2乗が2つ出てきたらこの公式を疑う

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

2 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (2乗)-(2乗) ならこの公式

3 $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ $x^2 + (和)x + (積)$ の形

因数分解の公式 1， 2 を利用して因数分解をしてみよう。

例 15 (1) $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x + 4)^2$ 和 積

(2) $9x^2 - 6xy + y^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = (3x - y)^2$

(3) $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$ 終

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4)$ は不十分です。

練習 19 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 10x + 25$
- (2) $x^2 - 12x + 36$
- (3) $x^2 + 6xy + 9y^2$
- (4) $4a^2 - 4ab + b^2$
- (5) $x^2 - 9$
- (6) $16a^2 - 25b^2$

解答

- (1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2$
- (2) $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = (x - 6)^2$
- (3) $x^2 + 6xy + 9y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = (x + 3y)^2$
- (4) $4a^2 - 4ab + b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 = (2a - b)^2$
- (5) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$
- (6) $16a^2 - 25b^2 = (4a)^2 - (5b)^2 = (4a + 5b)(4a - 5b)$

次に、因数分解の公式 3 を利用して因数分解をしてみよう。

和 積

例 16 (1) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + (2 + 4)x + 2 \cdot 4$

$= (x + 2)(x + 4)$

(2) $x^2 + 2xy - 8y^2$

$= x^2 + \{(-2y) + 4y\}x + (-2y) \cdot 4y$

$= (x - 2y)(x + 4y)$ 終

$x^2 + 2x - 8 = x^2 + (-2 + 4)x + (-2) \cdot 4 = (x - 2)(x + 4)$
この式に y がくっついたと考える。
ただし、y をつけるのを忘れる人がいるので注意

先に積から考える
その組み合わせの中で和が一
致するものを探す

積が 8	和が 6
1 と 8	×
-1 と -8	×
2 と 4	○
-2 と -4	×

練習 20 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 8x + 12$
- (2) $x^2 - 7x + 12$
- (3) $x^2 + 2x - 8$
- (4) $x^2 - 5x - 6$
- (5) $a^2 - 13a + 36$
- (6) $y^2 - y - 20$
- (7) $x^2 + 5xy + 4y^2$
- (8) $x^2 + 7xy - 18y^2$
- (9) $x^2 - ax - 12a^2$

解答

- (1) $x^2 + 8x + 12 = x^2 + (2 + 6)x + 2 \cdot 6 = (x + 2)(x + 6)$
- (2) $x^2 - 7x + 12 = x^2 + (-3 - 4)x + (-3) \cdot (-4) = (x - 3)(x - 4)$
- (3) $x^2 + 2x - 8 = x^2 + (-2 + 4)x + (-2) \cdot 4 = (x - 2)(x + 4)$
- (4) $x^2 - 5x - 6 = x^2 + (1 - 6)x + 1 \cdot (-6) = (x + 1)(x - 6)$
- (5) $a^2 - 13a + 36 = a^2 + (-4 - 9)a + (-4) \cdot (-9) = (a - 4)(a - 9)$
- (6) $y^2 - y - 20 = y^2 + (4 - 5)y + 4 \cdot (-5) = (y + 4)(y - 5)$
- (7) $x^2 + 5xy + 4y^2 = x^2 + (y + 4y)x + y \cdot 4y = (x + y)(x + 4y)$
- (8) $x^2 + 7xy - 18y^2 = x^2 + (-2y + 9y)x + (-2y) \cdot 9y = (x - 2y)(x + 9y)$
- (9) $x^2 - ax - 12a^2 = x^2 + (3a - 4a)x + 3a \cdot (-4a) = (x + 3a)(x - 4a)$

展開の公式 4 を逆に利用する因数分解は、次のようになる。

因数分解の公式

$$4 \quad acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

例 17 $3x^2 + 14x + 8$ の因数分解

因数分解の公式 4 において

$$ac = 3, \quad ad + bc = 14, \quad bd = 8$$

となる a, b, c, d をみつけばよい。

① $ac = 3$ の 3 を積に分解すると 1×3

$bd = 8$ の 8 を積に分解すると

$1 \times 8, 2 \times 4, (-1) \times (-8), (-2) \times (-4)$

② $a = 1, c = 3$ として, b, d の

候補から $ad + bc = 14$ となる

ものをさがす。このとき, 右の

ような図式を利用するとよい。

$$\begin{array}{rcccl} acx^2 + (ad + bc)x + bd & & & & \\ 3x^2 + & 14x & + & 8 & \\ \downarrow & \swarrow & \searrow & & \\ a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \end{array}$$

場所に注意

$$\begin{array}{rcccl} a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline ac = 3 & bd = 8 & ad + bc = 14 & & \end{array}$$

$b = 1, d = 8$ のとき

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \times & 1 & \rightarrow & 3 \\ 3 & & 8 & \rightarrow & 8 \\ \hline 3 & & 8 & & 11 \times \end{array}$$

失敗

$ad + bc = 14$ とならない。

$b = 4, d = 2$ のとき

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \times & 4 & \rightarrow & 12 \\ 3 & & 2 & \rightarrow & 2 \\ \hline 3 & & 8 & & 14 \circ \end{array}$$

成功

$ad + bc = 14$ となり, 適する。

$b = -1, d = -8$ は
やらなくても適さない
ことがわかる。この場合は
 ad も bc も負になるので
 $ad + bc$ も負になってしまう。

よって, $a = 1, b = 4, c = 3, d = 2$ であるから

$$3x^2 + 14x + 8 = (x + 4)(3x + 2)$$

終

補足 上の図式のような計算を

たすき掛け という。



浴衣
着る

たすき掛け

料理/仕事/パフォーマンス

<https://www.youtube.com/watch?v=ZUly997nYrg>

例題 4 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2 - 5x + 3$

(2) $4x^2 - 8ax - 5a^2$

解答 (1) $2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)(2x - 3)$

参考

結果が正しいか展開してみよう

$$(x - 1)(2x - 3) = 2x^2 - 3x - 2x + 3$$

$$= 2x^2 - 5x + 3$$

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \times & -1 & \rightarrow & -2 \\ 2 & & -3 & \rightarrow & -3 \\ \hline 2 & & 3 & & -5 \end{array}$$

(2) $4x^2 - 8ax - 5a^2 = (2x + a)(2x - 5a)$

イメージ

$$\begin{array}{rcccl} 2 & \times & 1a & \rightarrow & 2a \\ 2 & & -5a & \rightarrow & -10a \\ \hline 4 & & -5a^2 & & -8a \end{array}$$

数字だけでたすき掛けをすればいいが,

最後に文字を忘れる人が多いので注意

参考

x^2 の係数に数字がくっついていたら, なんでもかんでもたすき掛けではありません。

例えば $4x^2 + 12x + 9$ は $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$ です。

$$\begin{array}{rcccl} 2 & \times & 3 & \rightarrow & 6 \\ 2 & & 3 & \rightarrow & 6 \\ \hline 4 & & 9 & & 12 \end{array}$$

このようにしても求められますが, 時間がかかってしまいます。

また, $2x^2 + 6x + 4$ は $2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2) = 2(x + 1)(x + 2)$ です。

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \times & 2 & \rightarrow & 2 \\ 2 & & 2 & \rightarrow & 2 \\ \hline 2 & & 4 & & 6 \end{array}$$

このようにして求めると $2x^2 + 6x + 4 = (x + 2)(2x + 2)$ となりますが, これは不正解です。

$2x + 2$ はまだ因数分解できるので,

$$2x^2 + 6x + 4 = (x + 2)(2x + 2) = (x + 2) \cdot 2(x + 1) = 2(x + 2)(x + 1)$$

とすれば正解です。しかし, これではかなりの時間がかかってしまいます。

因数分解は試行錯誤の繰り返しです。「見える」ようになるには反復練習が大切です。

優先順位や公式利用を大切にしてください。

練習 21 次の式を因数分解せよ。

- (1) $3x^2 + 7x + 2$ (2) $2x^2 + 9x + 10$ (3) $2x^2 - 7x + 6$
 (4) $4x^2 + 8x - 21$ (5) $6x^2 - 13x - 15$ (6) $2y^2 - 11y + 12$
 (7) $3x^2 + 5ax - 2a^2$ (8) $6x^2 - 7ax - 3a^2$ (9) $4x^2 + 13xy - 35y^2$

【解答】

(1) $3x^2 + 7x + 2 = (x+2)(3x+1)$ (2) $2x^2 + 9x + 10 = (x+2)(2x+5)$

(1)
$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \rightarrow 6 \\ 3 \quad 1 \rightarrow 1 \\ \hline 3 \quad 2 \quad 7 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \rightarrow 4 \\ 2 \quad 5 \rightarrow 5 \\ \hline 2 \quad 10 \quad 9 \end{array}$$

(3) $2x^2 - 7x + 6 = (x-2)(2x-3)$ (4) $4x^2 + 8x - 21 = (2x-3)(2x+7)$

(3)
$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \rightarrow -4 \\ 2 \quad -3 \rightarrow -3 \\ \hline 2 \quad 6 \quad -7 \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \rightarrow -6 \\ 2 \quad 7 \rightarrow 14 \\ \hline 4 \quad -21 \quad 8 \end{array}$$

(5) $6x^2 - 13x - 15 = (x-3)(6x+5)$ (6) $2y^2 - 11y + 12 = (y-4)(2y-3)$

(5)
$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \rightarrow -18 \\ 6 \quad 5 \rightarrow 5 \\ \hline 6 \quad -15 \quad -13 \end{array}$$

(6)
$$\begin{array}{r} 1 \quad -4 \rightarrow -8 \\ 2 \quad -3 \rightarrow -3 \\ \hline 2 \quad 12 \quad -11 \end{array}$$

(7) $3x^2 + 5ax - 2a^2 = (x+2a)(3x-a)$ (8) $6x^2 - 7ax - 3a^2 = (2x-3a)(3x+a)$

(7)
$$\begin{array}{r} 1 \quad 2a \rightarrow 6a \\ 3 \quad -a \rightarrow -a \\ \hline 3 \quad -2a^2 \quad 5a \end{array}$$

(8)
$$\begin{array}{r} 2 \quad -3a \rightarrow -9a \\ 3 \quad a \rightarrow 2a \\ \hline 6 \quad -3a^2 \quad -7a \end{array}$$

(9) $4x^2 + 13xy - 35y^2 = (x+5y)(4x-7y)$

(9)
$$\begin{array}{r} 1 \quad 5y \rightarrow 20y \\ 4 \quad -7y \rightarrow -7y \\ \hline 4 \quad -35y^2 \quad 13y \end{array}$$

<因数分解の工夫>

複雑な式を因数分解するとき、式の一部を1つのまとまりとみるなど、式の形の特徴に着目すると、因数分解の公式を利用できることがある。

応用例題 1

次の式を因数分解せよ。

$$(x+y)^2 + 2(x+y) - 15$$

考え方 展開せずに $x+y=A$ とおいて、 A の式を因数分解してから A を $x+y$ にもどす。

展開したら大変なことになります A でなくても M でも X でも何でもいいます

【解答】 $x+y=A$ とおく。

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + 2(x+y) - 15 &= A^2 + 2A - 15 \\ &= (A-3)(A+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \text{ を戻す} \longrightarrow &= [(x+y)-3][(x+y)+5] \quad \text{中括弧にすること} \\ &= (x+y-3)(x+y+5) \end{aligned}$$

練習 22 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x-y)^2 - 5(x-y) + 6$ (2) $2(x+y)^2 - (x+y) - 1$

【解答】

(1) $x-y=A$ とおく。

$$\begin{aligned} (x-y)^2 - 5(x-y) + 6 &= A^2 - 5A + 6 \\ &= (A-2)(A-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \text{ を戻す} \longrightarrow &= [(x-y)-2][(x-y)-3] \\ &= (x-y-2)(x-y-3) \end{aligned}$$

(2) $x+y=A$ とおく。

$$\begin{aligned} 2(x+y)^2 - (x+y) - 1 &= 2A^2 - A - 1 \\ &= (A-1)(2A+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \text{ を戻す} \longrightarrow &= [(x+y)-1][2(x+y)+1] \\ &= (x+y-1)(2x+2y+1) \end{aligned}$$

たすき掛け

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \rightarrow -2 \\ 2 \quad 1 \rightarrow 1 \\ \hline 2 \quad -1 \quad -1 \end{array}$$

$$2(x+y)+1 = 2x+2y+1$$

応用例題 2

次の式を因数分解せよ。

x^4-3x^2-4

考え方 $x^2=A$ とおくと $x^4=(x^2)^2=A^2$ ← x^2 と x^4 が同居していたらこのパターン

このような形の因数分解では、 A を x^2 にもどした後、
さらに因数分解できる場合がある。

解答

$x^2=A$ とおく。
 $x^4-3x^2-4=A^2-3A-4$

和

積

 $= (A+1)(A-4)$

Aを戻す

$= (x^2+1)(x^2-4)$
 $= (x^2+1)(x+2)(x-2)$

$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

x^2+1 は因数分解できません

練習 23 次の式を因数分解せよ。

(1) x^4-8x^2-9 (2) x^4-16

解答

(1) $x^2=A$ とおく。
 $x^4-8x^2-9=A^2-8A-9$

和

積

 $= (A+1)(A-9)$

Aを戻す

$= (x^2+1)(x^2-9)$
 $= (x^2+1)(x+3)(x-3)$

$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

(2) $x^2=A$ とおく。
 $x^4-16=A^2-4^2$ ← (2乗)-(2乗)

Aを戻す

$= (A+4)(A-4)$
 $= (x^2+4)(x^2-4)$
 $= (x^2+4)(x+2)(x-2)$

$x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$

2種類以上の文字を含む式は、次数の最も低い文字に着目して整理すると、
見通しよく因数分解できることがある。

	x^2	xy	x	$2y$	-2	
x の次数	②	1	1	0	0	→ x の2次式
y の次数	0	①	0	①	0	→ y の1次式

文字によって次数に違いがあるときは、
低い方で降べきの順

応用例題 3

次の式を因数分解せよ。

$x^2+xy+x+2y-2$

考え方 与えられた式は、 x については2次式、 y については1次式であるから、
次数の低い方の文字 y について式を整理する。

解答

y について整理すると
 $x^2+xy+x+2y-2 = xy+2y+x^2+x-2$

次数が0の場所を因数分解

$= (x+2)y+(x^2+x-2)$

和

積

 $= (x+2)y+(x+2)(x-1)$

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$

 $= (x+2)\{y+(x-1)\}$

$x+2$ を A とおくと

$Ay+A(x-1)$
 $= A\{y+(x-1)\}$ 中括弧

 $= (x+2)(x+y-1)$

アルファベット順に

なるように並べる

参考

x で降べきの順で並べて因数分解するにはどうしたらいいのでしょうか。

この式は x の2次式なので、 $x^2+(和)x+(積)$ の公式を用います。

2	1	1	0	0	
x^2	xy	x	$2y$	-2	
		和		積	

$x^2+xy+x+2y-2 = x^2+(y+1)x+(2y-2)$
 $= x^2+(y+1)x+2(y-1)$
 $= (x+2)\{x+(y-1)\}$
 $= (x+2)(x+y-1)$

掛けて $2y-2$ なので、
因数分解すると $2(y-1)$ となる。

足して $y+1$, 掛けて $2(y-1)$ となる2つのものを

考える。掛けて $2(y-1)$ なので、

2 と $(y-1)$ もしくは -2 と $-(y-1)$

しかない。右のような表を用いて考えると適するのが

2 と $(y-1)$ と分かるので、このように因数分解される。

実際、こっちの方法の方が本解よりも早い場合が多い。

因数分解できればどの方法でもいいが、どっちもできるようになるのが望ましい。

1	2	→	2
1	$y-1$	→	$y-1$
1	$2(y-1)$		$y+1$

練習 24 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + xy - 4x - y + 3$

(2) $x^2 + 3ax - 9a - 9$

【解答】

(1) y について整理すると

$$x^2 + xy - 4x - y + 3 = xy - y + x^2 - 4x + 3$$

y について
降べきの順に並べる

$$= (x-1)y + (x^2 - 4x + 3)$$

$$= (x-1)y + (x-1)(x-3)$$

$$= (x-1)\{y + (x-3)\}$$

$$= (x-1)(x+y-3)$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$x-1$ を A とおくと

$$Ay + A(x-3)$$

$$= A\{y + (x-3)\}$$

ここで A を戻す

【別解】

$$x^2 + xy - 4x - y + 3 = x^2 + (y-4)x + (-y+3)$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & -1 & -1 \\ 1 & y-3 & y-3 \\ \hline 1 & -(y-3) & y-4 \end{array}$$

$$= x^2 + (y-4)x + (-1) \cdot (y-3)$$

$$= (x-1)\{x + (y-3)\}$$

$$= (x-1)(x+y-3)$$

掛けて $-y+3$ なので、
マイナスを外に出すと
 $-y+3 = -(y-3)$ となる。

(2) a について整理すると

$$x^2 + 3ax - 9a - 9 = 3ax - 9a + x^2 - 9$$

$$= (3x-9)a + (x^2-9)$$

a について
降べきの順に並べる

$$= 3(x-3)a + (x^2-9)$$

$$= 3(x-3)a + (x+3)(x-3)$$

$$= (x-3)\{3a + (x+3)\}$$

$$= (x-3)(x+3a+3)$$

$$= (x-3)(x+3a+3)$$

左の括弧が x の降べきの順なので
右の括弧もそれに合わせている

$$\begin{array}{r|rr} x^2 & 3ax & -9a & -9 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$$

$x-3$ を A とおくと

$$3Aa + (x+3)A$$

$$= A \cdot 3a + A \cdot (x+3)$$

$$= A\{3a + (x+3)\}$$

ここで A を戻す

【別解】

$$x^2 + 3ax - 9a - 9 = x^2 + 3ax + (-9a-9)$$

$$= x^2 + 3ax + (-9) \cdot (a+1)$$

$$= (x-3)\{x + 3(a+1)\}$$

$$= (x-3)(x+3a+3)$$

試行錯誤して表を完成させましょう

$$\begin{array}{r|rr} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 3(a+1) & 3a+3 \\ \hline 1 & -9(a+1) & 3a \end{array}$$

掛けて $-9a-9$ なので、
 -9 でくくると
 $-9a-9 = -9(a+1)$ となる。
しかし、 -9 と $(a+1)$ の積の他に
 -3 と $3(a+1)$ の積や
 3 と $-3(a+1)$ の積などの可能性
もある。

応用例題 4

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$

(2) $2x^2 + 5xy + 3y^2 + 2x + y - 4$

考え方 与えられた式は、 x についても、 y についても 2 次式である。

ここでは、 x の 2 次式とみて、降べきの順に整理する。定数項にあたる y の 2 次式を因数分解すると、(1) は 18 ページの因数分解の公式 3 が、(2) は 19 ページの因数分解の公式 4 が利用できる。

【解答】

x^2 の係数 1、 y^2 の係数 2 より x について並べる

(1) x についても 2 次式、

y についても 2 次式であるから

x についての降べきの順に並べる。

$$x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$$

$$= x^2 + 3xy - x + 2y^2 - 3y - 2$$

$$= x^2 + (3y-1)x + (2y^2-3y-2)$$

$$= \{x + (y-2)\}\{x + (2y+1)\}$$

$$= (x+y-2)(x+2y+1)$$

$$\begin{array}{r|rr} x^2 & 3xy & 2y^2 & -x & -3y & -2 \\ x & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

同じならどっちの文字で整理してもいい。
ただし係数(小さい方)を見て決めましょう。

$$2y^2 - 3y - 2 = (y-2)(2y+1)$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ \hline 2 & -2 & -3 \end{array}$$

$$1x^2 + (3y-1)x + (y-2)(2y+1)$$

教科書のように、
この2つは無理して
書かなくてもよい

$$\begin{array}{r|rr} 1 & y-2 & y-2 \\ 1 & 2y+1 & 2y+1 \\ \hline 1 & (y-2)(2y+1) & 3y-1 \end{array}$$

(2) x についても 2 次式、

y についても 2 次式であるから

x についての降べきの順に並べる。

$$2x^2 + 5xy + 3y^2 + 2x + y - 4$$

$$= 2x^2 + 5xy + 2x + 3y^2 + y - 4$$

$$= 2x^2 + (5y+2)x + (3y^2+y-4)$$

$$= \{x + (y-1)\}\{2x + (3y+4)\}$$

$$= (x+y-1)(2x+3y+4)$$

$$\begin{array}{r|rr} 2x^2 & 5xy & 3y^2 & 2x & y & -4 \\ x & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$3y^2 + y - 4 = (y-1)(3y+4)$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \\ \hline 3 & -4 & 1 \end{array}$$

$$2x^2 + (5y+2)x + (y-1)(3y+4)$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & y-1 & 2y-2 \\ 2 & 3y+4 & 3y+4 \\ \hline 2 & (y-1)(3y+4) & 5y+2 \end{array}$$

応用例題 4(1)(2) の式を、 y の 2 次式とみて因数分解してみよう。良いトレーニングになります。

練習 25 次の式を因数分解せよ。

- (1) $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 6$ (2) $x^2 - 3xy + 2y^2 + x + y - 6$
 (3) $3x^2 + 4xy + y^2 + 7x + y - 6$ (4) $2x^2 + 5xy + 2y^2 - x + y - 1$

【解答】

(1) x についても2次式, y についても2次式であるから

x についての降べきの順に並べる。

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 6 &= x^2 + 2xy - 5x + y^2 - 5y + 6 \\ &= x^2 + (2y-5)x + (y^2-5y+6) \\ &= x^2 + (2y-5)x + (y-2)(y-3) \quad \text{和 積} \\ &= \{x + (y-2)\}\{x + (y-3)\} \\ &= (x+y-2)(x+y-3) \end{aligned}$$

(2) x についても2次式,

y についても2次式であるから

x についての降べきの順に並べる。

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 + x + y - 6 &= x^2 - 3xy + x + 2y^2 + y - 6 \\ &= x^2 + (-3y+1)x + (2y^2+y-6) \\ &= x^2 + (-3y+1)x + (y+2)(2y-3) \quad \text{たすき掛け} \\ &= \{x - (y+2)\}\{x - (2y-3)\} \\ &= (x-y-2)(x-2y+3) \end{aligned}$$

マイナスが分配されることに注意

x^2 の係数は3で, y^2 の係数が1なので y で並べる

(3) x についても2次式, y についても2次式であるから

y についての降べきの順に並べる。

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4xy + y^2 + 7x + y - 6 &= y^2 + 4xy + y + 3x^2 + 7x - 6 \\ &= y^2 + (4x+1)y + (3x^2+7x-6) \\ &= y^2 + (4x+1)y + (x+3)(3x-2) \quad \text{たすき掛け} \\ &= \{y + (x+3)\}\{y + (3x-2)\} \\ &= (x+y+3)(3x+y-2) \end{aligned}$$

どちらもマイナスがつく場合もあります

(4) x についても2次式, y についても2次式であるから

x についての降べきの順に並べる。

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5xy + 2y^2 - x + y - 1 &= 2x^2 + 5xy - x + 2y^2 + y - 1 \\ &= 2x^2 + (5y-1)x + (2y^2+y-1) \\ &= 2x^2 + (5y-1)x + (y+1)(2y-1) \quad \text{たすき掛け} \\ &= \{x + (2y-1)\}\{2x + (y+1)\} \\ &= (x+2y-1)(2x+y+1) \end{aligned}$$

【参考】

(1)について,

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 6 &= (x^2 + 2xy + y^2) + (-5x - 5y) + 6 \\ &= (x+y)^2 - 5(x+y) + 6 \end{aligned}$$

と変形できることに気がつければ, $x+y=A$ において

$$\begin{aligned} (x+y)^2 - 5(x+y) + 6 &= A^2 - 5A + 6 \\ &= (A-2)(A-3) \quad \text{和 積} \\ &= \{(x+y)-2\}\{(x+y)-3\} \\ &= (x+y-2)(x+y-3) \end{aligned}$$

と因数分解できる。