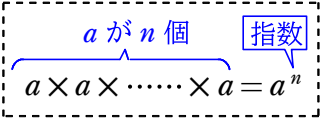


第1章「数と式」第1節 式の計算 2 多項式の乗法

ここでは、多項式の乗法について学ぶ。多項式の乗法では、単項式の積の計算が基本になる。そこで、まず単項式の乗法から考えていこう。

＜単項式の乗法＞

a を n 個掛けたものを a の n 乗 といい、 a^n と書く。
とくに、 $a^1 = a$ である。 a^n における n を、 a^n の **指数** という。また、 a 、 a^2 、 a^3 、…… をまとめて a の **累乗** という。累乗についての積は、たとえば次のように計算される。



$a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^{3+2} = a^5$ ← 3人いて、そこに2人来たら全部で5人
 $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = (a \times a \times a) \times (a \times a \times a) = a^{3 \times 2} = a^6$ ← 3人組が2組あったら全部で6人
 $(ab)^2 = (ab) \times (ab) = (a \times a) \times (b \times b) = a^2 b^2$ ← 男女のカップルが2組いたら 男は2人女も2人

一般に、次の **指数法則** が成り立つ。

指数法則

m, n は正の整数とする。

1 $a^m \times a^n = a^{m+n}$
(なんとか乗)×(なんとか乗)は
肩の足し算

2 $(a^m)^n = a^{mn}$
(なんとか乗)かつ(なんとか乗)は
肩の掛け算

3 $(ab)^n = a^n b^n$
肩の数も分配できる

単項式の積は、指数法則を用いて計算する。
例 8 (1) $3a^2 \times 4a^5 = 3 \times 4 \times a^{2+5} = 12a^7$ ← それぞれの係数も掛ける
(2) $2x^3y \times (-x^2y^2) = 2 \times (-1) \times x^{3+2} \times y^{1+2} = -2x^5y^3$
(3) $(-2xy^2)^3 = (-2)^3 \times x^3 \times (y^2)^3 = -8x^3y^6$ 終
 $(-2xy^2)^3 = (-2xy^2) \times (-2xy^2) \times (-2xy^2)$
-2 も x も y^2 も3つずつある。(-2)の3乗は-6ではありません。

毎回すべてを掛け算で表すと時間がかかるので、
できるだけ肩の数の処理で答えが出るように
したいですね。

← $(abc)^n$
 $= a^n b^n c^n$

練習 9 次の式を計算せよ。

- (1) $2a^3 \times 4a^2$
- (2) $a^2 \times (-3a)$
- (3) $4ab^2 \times b^4$
- (4) $3x^2y \times (-2x^3y^2)$
- (5) $(-a^2b^3)^2$
- (6) $(-3x^2y)^3$

【解答】

- (1) $2a^3 \times 4a^2 = (2 \times 4) \times a^{3+2} = 8a^5$
- (2) $a^2 \times (-3a) = -3 \times a^{2+1} = -3a^3$
- (3) $4ab^2 \times b^4 = 4 \times a \times b^{2+4} = 4ab^6$
- (4) $3x^2y \times (-2x^3y^2) = 3 \times (-2) \times x^{2+3} \times y^{1+2} = -6x^5y^3$
- (5) $(-a^2b^3)^2 = (-1)^2 \times (a^2)^2 \times (b^3)^2 = a^4b^6$ (-1)も a^2 も b^3 も2つずつある
- (6) $(-3x^2y)^3 = (-3)^3 \times (x^2)^3 \times y^3 = -27x^6y^3$ (-3)の3乗は-9ではありません。

＜多項式の乗法＞

多項式の積は、次の分配法則を用いて計算する。

分配法則

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

例 9 分配法則を使った積の計算

- (1) $3x^2(x^2+2x-4) = 3x^2 \times x^2 + 3x^2 \times 2x + 3x^2 \times (-4)$
 $= 3x^{2+2} + 6x^{2+1} + (-12)x^2 = 3x^4 + 6x^3 - 12x^2$
← $3x^2$ ×が全てに降ってくる
- (2) $(2a^2-3a+1)a = 2a^2 \times a + (-3a) \times a + 1 \times a$
 $= 2a^3 - 3a^2 + a$
← a ×が全てに降ってくる

終

多項式の積の形をした式について、その積を計算して単項式の和の形に表すことを、もとの式を **展開** するという。

練習 10 次の式を展開せよ。

(1) $4x^2(2x^2-3x+5)$ (2) $(3a^2-a-2)\times(-2a)$

解答

(1) $4x^2(2x^2-3x+5) = \underline{4x^2 \times 2x^2} + \underline{4x^2 \times (-3x)} + \underline{4x^2 \times 5}$
 $= 8x^4 - 12x^3 + 20x^2$ $4x^2 \times$ が全てに降ってくる

(2) $(3a^2-a-2)\times(-2a) = \underline{3a^2 \times (-2a)} + \underline{(-a) \times (-2a)} + \underline{(-2) \times (-2a)}$
 $= -6a^3 + 2a^2 + 4a$ $\times (-2a)$ が全てに降ってくる

例 10 $(4x^2-3x+1)(x+2)$ を展開する。

$$\begin{aligned} & (4x^2-3x+1)(x+2) \\ &= (4x^2-3x+1)x + (4x^2-3x+1) \cdot 2 \\ &= \underline{(4x^2-3x+1) \times x} + \underline{(4x^2-3x+1) \times 2} \\ &= \underline{4x^3-3x^2+x} + \underline{8x^2-6x+2} \\ &= 4x^3-3x^2+8x^2+1x-6x+2 \quad \leftarrow \text{同類項はまとめておく。} \\ &= 4x^3+5x^2-5x+2 \quad \text{終} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} (4x^2-3x+1) \times \text{全てに降ってくる} \\ \textcircled{(4x^2-3x+1)}(x+2) \\ = \underline{(4x^2-3x+1) \times x} + \underline{(4x^2-3x+1) \times 2} \end{array}$$

注意 例 10 で用いた $\cdot$ は、積を表す記号であり、 $\times$ と同じ意味である。

$(4x^2-3x+1)x$ は $\times$ を省略した書き方であるが、 $(4x^2-3x+1)2$ とはとは書かない。

(書くなら $2(4x^2-3x+1)$ となる。)

よって、後ろから 2 を掛けていることを表したかったら $(4x^2-3x+1) \times 2$ と書くしかないが、 $\times$ の記号は式を見にくくする原因となるので、高校では $\cdot$ という記号で掛け算を表す。

参考

この式をよく見ると、以下のように分配法則を行っていることがわかる。

$$(4x^2-3x+1)(x+2) = \underline{4x^3-3x^2+x} + \underline{8x^2-6x+2}$$

よって分配法則を用いて展開を行うときは

左の括弧内の項と右の括弧内の項の掛け算を全パターン書き出して、その後同類項をまとめればよい。

なお、右のように筆算で行ってもよい。

下のように分配法則を行ってもよい。

$$(4x^2-3x+1)(x+2) = \underline{4x^3+8x^2-3x-6x+x+2}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2-3x+1 \\ \times) \quad x+2 \\ \hline 4x^3-3x^2+x \\ \quad 8x^2-6x+2 \\ \hline 4x^3+5x^2-5x+2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{上下で足す} \end{array}$$

練習 11 次の式を展開せよ。

- (1) $(2x-1)(4x^2+3)$
- (2) $(2x^2+x-3)(x-2)$
- (3) $(x+3)(x^2-2x+1)$
- (4) $(2x+y)(3x^2+xy-2y^2)$

解答

- (1) $(2x-1)(4x^2+3)=(2x-1)\cdot 4x^2+(2x-1)\cdot 3$
 $=8x^3-4x^2+6x-3$
- (2) $(2x^2+x-3)(x-2)=(2x^2+x-3)x+(2x^2+x-3)\cdot (-2)$
 $=2x^3+x^2-3x-4x^2-2x+6$
 $=2x^3-3x^2-5x+6$
- (3) $(x+3)(x^2-2x+1)=x(x^2-2x+1)+3(x^2-2x+1)$
 $=x^3-2x^2+x+3x^2-6x+3$
 $=x^3+x^2-5x+3$
- (4) $(2x+y)(3x^2+xy-2y^2)=2x(3x^2+xy-2y^2)+y(3x^2+xy-2y^2)$
 $=6x^3+\underline{2x^2y}-\underline{4xy^2}+\underline{3x^2y}+\underline{xy^2}-2y^3$
 $=6x^3+\underline{5x^2y}-\underline{3xy^2}-2y^3$ 同類項をまとめる

<展開の公式>

代表的な式の展開の結果は、公式として利用できる。

展開の公式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(a+b)^2=a^2+b^2$ というミスが多い。
 $a=1, b=1$ とすると
 $(a+b)^2=(1+1)^2=2^2=4$
 $a^2+b^2=1^2+1^2=2$ ←異なる

$x^2+(和)x+(積)$

- 例 11
- (1) $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2=x^2+6x+9$
- (2) $(4x-5y)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 5y+(5y)^2=16x^2-40xy+25y^2$
- (3) $(3x+2y)(3x-2y)=(3x)^2-(2y)^2=9x^2-4y^2$
- (4) $(x+2)(x-5)=x^2+\{2+(-5)\}x+2\cdot (-5)=x^2-3x-10$

2 と -5 の和 2 と -5 の積
- (5) $(x-3y)(x-2y)=x^2+(-3y-2y)x+(-3y)\cdot (-2y)=x^2-5xy+6y^2$ 終

-3y と -2y の和
ここの x を忘れる人多い

-3y と -2y の積
ここの y^2 を忘れる人多い

練習 12 次の式を展開せよ。

- (1) $(3x+5)^2$
- (2) $(2x-3y)^2$
- (3) $(x+6)(x-6)$
- (4) $(5x+4y)(5x-4y)$
- (5) $(x+1)(x+5)$
- (6) $(x-3)(x+8)$
- (7) $(x-2)(x-4)$
- (8) $(x+2y)(x+5y)$
- (9) $(x+3a)(x-7a)$

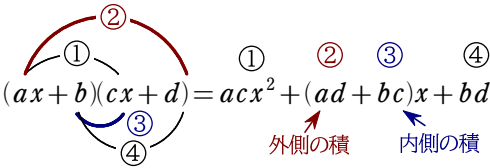
解答

- (1) $(3x+5)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5+5^2=9x^2+30x+25$
- (2) $(2x-3y)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$
- (3) $(x+6)(x-6)=x^2-6^2=x^2-36$
- (4) $(5x+4y)(5x-4y)=(5x)^2-(4y)^2=25x^2-16y^2$
- (5) $(x+1)(x+5)=x^2+(1+5)x+1\cdot 5=x^2+6x+5$
- (6) $(x-3)(x+8)=x^2+(-3+8)x+(-3)\cdot 8=x^2+5x-24$
- (7) $(x-2)(x-4)=x^2+(-2-4)x+(-2)\cdot (-4)=x^2-6x+8$
- (8) $(x+2y)(x+5y)=x^2+(2y+5y)x+2y\cdot 5y=x^2+7xy+10y^2$
- (9) $(x+3a)(x-7a)=x^2+(3a-7a)x+3a\cdot (-7a)=x^2-4ax-21a^2$

$(ax+b)(cx+d)$ を展開すると、次の公式が得られる。

展開の公式

4 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$



分配法則を用いてもいいですが、早く正しく答えが出るようにしましょう。

- 例 12
- (1) $(3x+2)(4x+1)=3\cdot 4x^2+(3\cdot 1+2\cdot 4)x+2\cdot 1$
 $=12x^2+(3+8)x+2=12x^2+11x+2$
- (2) $(2x-7)(x-2)=2\cdot 1x^2+\{2\cdot (-2)+(-7)\cdot 1\}x+(-7)\cdot (-2)$
 $=2x^2+(-4-7)x+14=2x^2-11x+14$
- (3) $(2x-5y)(3x+4y)=2\cdot 3x^2+\{2\cdot 4y+(-5y)\cdot 3\}x+(-5y)\cdot 4y$
 $=6x^2+(8y-15y)x-20y^2=6x^2-7xy-20y^2$
- 終

練習 13 次の式を展開せよ。

- (1) $(2x+1)(4x+5)$
- (2) $(x+4)(2x-3)$
- (3) $(3x-7)(x+2)$
- (4) $(2x-5)(2x-1)$
- (5) $(x+2y)(3x-y)$
- (6) $(3x-2a)(4x-3a)$

解答

- (1) $(2x+1)(4x+5)=2\cdot 4x^2+(2\cdot 5+1\cdot 4)x+1\cdot 5$
 $=8x^2+(10+4)x+5=8x^2+14x+5$
- (2) $(x+4)(2x-3)=1\cdot 2x^2+\{1\cdot (-3)+4\cdot 2\}x+4\cdot (-3)$
 $=2x^2+(-3+8)x-12=2x^2+5x-12$
- (3) $(3x-7)(x+2)=3\cdot 1x^2+\{3\cdot 2+(-7)\cdot 1\}x+(-7)\cdot 2$
 $=3x^2+(6-7)x-14=3x^2-x-14$
- (4) $(2x-5)(2x-1)=2\cdot 2x^2+\{2\cdot (-1)+(-5)\cdot 2\}x+(-5)\cdot (-1)$
 $=4x^2+(-2-10)x+5=4x^2-12x+5$
- (5) $(x+2y)(3x-y)=1\cdot 3x^2+\{1\cdot (-y)+2y\cdot 3\}x+2y\cdot (-y)$
 $=3x^2+(-y+6y)x-2y^2=3x^2+5xy-2y^2$
- (6) $(3x-2a)(4x-3a)=3\cdot 4x^2+\{3\cdot (-3a)+(-2a)\cdot 4\}x+(-2a)\cdot (-3a)$
 $=12x^2+(-9a-8a)x+6a^2=12x^2-17ax+6a^2$

＜式の展開の工夫＞

複雑な式を展開するとき、式の一部を1つのまとまりとみると，展開の公式を利用できることがある。左右の括弧で同じかたまりを見つける。

例 13 $(a+b+1)(a+b-1)$ の展開

$(a+b)$ を1つのまとまりとみると

$(a+b+1)(a+b-1)$

$=\{(a+b)+1\}\{(a+b)-1\}$ $a+b$ を丸かっこで囲む。
外側は中かっこになる。

$=\underline{(a+b)^2}-1^2$ $a+b=A$ とおくと
 $(A+1)(A-1)=A^2-1^2$ の展開の公式が使える。

$=\underline{a^2+2ab+b^2}-1$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

終

参考(かたまりを丸かっこのまま扱うのが苦手な人へ)

$(a+b+1)(a+b-1)$

$= (A+1)(A-1)$ $a+b=A$ として置き換える

$= A^2-1$ A の文字のまま，展開の公式を用いる

$= \underline{(a+b)^2}-1^2$ A を $a+b$ に戻す

$= a^2+2ab+b^2-1$

練習 14 次の式を展開せよ。

(1) $(3a - b + 2)(3a - b - 2)$ (2) $(x - y + 3)(x - y - 2)$

解答

(1) $(3a - b + 2)(3a - b - 2) = \{(3a - b) + 2\}\{(3a - b) - 2\}$
 $\begin{aligned} &= (3a - b)^2 - 2^2 \\ &= (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot b + b^2 - 4 \\ &= 9a^2 - 6ab + b^2 - 4 \end{aligned}$

(2) $(x - y + 3)(x - y - 2) = \{(x - y) + 3\}\{(x - y) - 2\}$
 $\begin{aligned} &= (x - y)^2 + (x - y) - 6 \\ &= x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 6 \end{aligned}$

この問題は、毎年なぜか

$(A + 3)(A - 2) = A^2 - 6$

として間違える者がいる。置き換えをしたら (2乗) - (2乗) の公式と決めつけているのかもしれませんが、どの展開の公式を使うかは問題によって変わります。

深める $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ を次の 2 通りの方法で展開してみよう。

- ① そのまま展開する。 ② $x^2 + 1 = A$ において展開する。

解答

① $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^4 + x^2 + 1$

② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\}$
 $\begin{aligned} &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2)^2 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= x^4 + x^2 + 1 \end{aligned}$

注意

$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ について、左右のかっこで $x + 1$ というかたまりを見つける人がいますが、これは有名な間違いです。符号まで含めて同じかたまりを見つけてください。

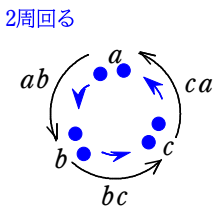
例題 1 $(a+b+c)^2$ を展開すると，次のようになることを確かめよ。

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

括弧の中が3つのときは、
どれか2つをかたまりと考える。

解答 $(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2$ (A+c)²
 $= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$ = A² + 2Ac + c²
 $= a^2 + 2ab + b^2 + \underline{2ac + 2bc} + c^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + \underline{2ab + 2bc + 2ca}$ 2ac を 2ca とする

補足 これを輪環の順という 上のような式の展開では、 ab , bc , ca の項の順で式を整理しておくことが多い。また、かっこ内が3つのときに、この式を公式として使用してもよい。



公式 2周目だから2が付く

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

練習 15 次の式を展開せよ。

$$(1) \quad (a + b - c)^2$$

$$(2) \quad (x+2y+3z)^2$$

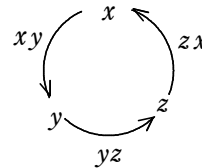
解答

(1) $(a+b-c)^2 = [(a+b)-c]^2$ $(A-c)^2$ $(-c)^2 = -c^2$ になる人がいるので注意
 $= (a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2$ $= A^2 - 2Ac + c^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$
 $= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$ $a \quad b \quad -c$

参考(公式を用いる)

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2 &= \{a+b+(-c)\}^2 && (A+B+C)^2 \\ &= a^2+b^2+(-c)^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot (-c)+2\cdot (-c)\cdot a && = A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2CA \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca\end{aligned}$$

(2) $(x+2y+3z)^2 = [(x+2y)+3z]^2$ $= A^2 + 2 \cdot A \cdot 3z + (3z)^2$
 $= (x+2y)^2 + 2(x+2y) \cdot 3z + (3z)^2$ $= A^2 + 6Az + 9z^2$
 $= \underbrace{(x+2y)^2}_{x^2+2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2} + \underbrace{6(x+2y)z}_{6xz+12yz} + (3z)^2$
 $= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx$



参考(公式を用いる)

$$\begin{aligned} & (x+2y+3z)^2 \\ &= x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 2 \cdot 2y \cdot 3z + 2 \cdot 3z \cdot x \\ &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6zx \end{aligned}$$

$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ A \end{array}$

$\begin{array}{c} 2y \\ \downarrow \\ B \end{array}$

$\begin{array}{c} 3z \\ \downarrow \\ C \end{array}$

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$$

積の順序を工夫することで、計算しやすくなる場合もある。

例題 2 次の式を展開せよ。

$$(a+b)^2(a-b)^2$$

$$A^2B^2=(AB)^2$$

掛ける順序を工夫すると $(\bigcirc-\triangle)^2$ の展開になる。

解答 $(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2$

中かっこの中は
 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
 $a^2=A, b^2=B$ とすると
 $(a^2-b^2)^2=(A-B)^2$
 $=A^2-2AB+B^2$

$$=(a^2-b^2)^2$$

$$=(a^2)^2-2a^2b^2+(b^2)^2$$

$$=a^4-2a^2b^2+b^4$$

参考 $(a+b)^2(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$

大体の人はここで諦めるか、
 分配法則で全部展開して大変なことになるかどっちかです。

$$=\{(a^2+b^2)+2ab\}\{(a^2+b^2)-2ab\}$$

$$=(a^2+b^2)^2-(2ab)^2$$

$$=(a^2)^2+2\cdot a^2\cdot b^2+(b^2)^2-4a^2b^2$$

$$=a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2$$

$$=a^4-2a^2b^2+b^4$$

$a^2+b^2=A, 2ab=B$ とおくと
 $(A+B)(A-B)$
 $=A^2-B^2$

練習 16 次の式を展開せよ。

$$(1) (x+1)^2(x-1)^2$$

$$\star(2) (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

解答

(1) $(x+1)^2(x-1)^2=\{(x+1)(x-1)\}^2$

中かっこの中は
 $(x+1)(x-1)=x^2-1^2$
 $x^2=A$ とすると
 $(x^2-1)^2=(A-1)^2$
 $=A^2-2A+1$

$$=(x^2-1)^2$$

$$=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 1+1^2$$

$$=x^4-2x^2+1$$

(2) $(x^2+1)(x+1)(x-1)=(x^2+1)(x^2-1)$

この問題は $(x^2+1)(x+1)$ を先に展開してしまうと、
 あとは分配法則で頑張るしかありません。

$$=(x^2)^2-1^2$$

$$=x^4-1$$

$x^2=A$ とすると
 $(x^2+1)(x^2-1)$
 $=(A+1)(A-1)$
 $=A^2-1^2$

Point 複雑な式の展開では、次のような工夫をすることで、14 ページの展開の公式を利用できることがある。

15 ページ 例 13, 例題 1 → 式の一部を 1 つのまとまりとみる。

例題 2 → 掛ける順序を変える。