

2 次関数の共有点クイズ

1 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

- (1) $y=2x^2+4x-1$
- (2) $y=4x^2-12x+9$

解答 (1) $\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}, 0\right), \left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}, 0\right)$ (2) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

解説

- (1) 2 次方程式 $2x^2+4x-1=0$ を解くと $x=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$

よって、共有点の座標は $\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}, 0\right), \left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}, 0\right)$

- (2) 2 次方程式 $4x^2-12x+9=0$ を解くと $x=\frac{3}{2}$

よって、共有点の座標は $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

2 次の放物線と直線 $y=-3x+3$ の共有点の座標を求めよ。

- (1) $y=-x^2+6x-11$
- (2) $y=x^2+x+7$

解答 (1) $(2, -3), (7, -18)$ (2) $(-2, 9)$

解説

- (1) 共有点の x 座標は、次の 2 次方程式の実数解である。

$$-x^2+6x-11=-3x+3$$

すなわち $x^2-9x+14=0$

これを解くと $x=2, 7$

$y=-3x+3$ から $x=2$ のとき $y=-3$

$x=7$ のとき $y=-18$

よって、共有点の座標は $(2, -3), (7, -18)$

- (2) 共有点の x 座標は、次の 2 次方程式の実数解である。

$$x^2+x+7=-3x+3$$

すなわち $x^2+4x+4=0$

これを解くと $x=-2$

このとき、 $y=-3x+3$ から $y=9$

よって、共有点の座標は $(-2, 9)$

3 次の 2 次関数のグラフと x 軸は共有点をもつか。共有点をもつ場合は、その座標を求めよ。

- (1) $y=2x^2+6x+1$
- (2) $y=-2x^2-5x-4$
- (3) $y=-4x^2+12x-9$

解答 (1) もつ、 $\left(\frac{-3+\sqrt{7}}{2}, 0\right), \left(\frac{-3-\sqrt{7}}{2}, 0\right)$ (2) もたない

(3) もつ、 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

解説

- (1) 2 次方程式 $2x^2+6x+1=0$ の判別式を D とすると

$$D=6^2-4\cdot 2\cdot 1=28>0$$

よって、共有点をもつ。

2 次方程式 $2x^2+6x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-2\cdot 1}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$$

したがって、共有点の座標は

$$\left(\frac{-3+\sqrt{7}}{2}, 0\right), \left(\frac{-3-\sqrt{7}}{2}, 0\right)$$

- (2) 2 次方程式 $-2x^2-5x-4=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\cdot (-2)\cdot (-4)=-7<0$$

よって、共有点をもたない。

- (3) 2 次方程式 $-4x^2+12x-9=0$ の判別式を D とすると

$$D=12^2-4\cdot (-4)\cdot (-9)=0$$

よって、共有点をもつ。

2 次方程式 $-4x^2+12x-9=0$ を解くと

$$4x^2-12x+9=0$$

$$(2x-3)^2=0$$

よって $x=\frac{3}{2}$

したがって、共有点の座標は $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

4 2 つの放物線 $y=2x^2$, $y=-x^2+6x$ の 2 つの共有点の座標を求めよ。

解答 $(0, 0), (2, 8)$

解説

共有点の x 座標は、次の 2 次方程式の実数解である。

$$2x^2=-x^2+6x$$

すなわち $3x^2-6x=0$

これを解いて $x=0, 2$

$y=2x^2$ から $x=0$ のとき $y=0$

$x=2$ のとき $y=8$

よって、共有点の座標は $(0, 0), (2, 8)$

5 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。[各 10 点]

- (1) $y=x^2-3x+1$
- (2) $y=9x^2-24x+16$

解答 (1) 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって、求める座標は $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

- (2) 2 次方程式 $9x^2-24x+16=0$ を解くと

$$x=\frac{4}{3}$$

よって、求める座標は $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

解説

- (1) 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって、求める座標は $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

- (2) 2 次方程式 $9x^2-24x+16=0$ を解くと

$$x=\frac{4}{3}$$

よって、求める座標は $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

6 次の 2 次関数のグラフは x 軸と共有点をもつか。もつときは、その座標を求めよ。

- (1) $y=2x^2-3x-1$
- (2) $y=-x^2+6x-9$
- (3) $y=3x^2-6x+4$

解答 (1) 共有点は 2 個、 $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}, 0\right), \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, 0\right)$

(2) 共有点は 1 個、 $(3, 0)$

(3) 共有点はない

解説

- (1) $2x^2-3x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot (-1)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$$

よって、 x 軸との共有点は 2 個あり、その座標は $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}, 0\right), \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, 0\right)$

- (2) $-x^2+6x-9=0$ とすると $x^2-6x+9=0$

したがって $(x-3)^2=0$ これを解くと $x=3$ (重解)

よって、 x 軸との共有点は 1 個あり、その座標は $(3, 0)$

- (3) $3x^2-6x+4=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-3\cdot 4=-3<0$$

したがって、 x 軸との共有点はない。

7 次の放物線と直線は共有点をもつか。もつときは、その座標を求めよ。

- (1) $y=x^2+2x+3$ …… ①, $y=-x+3$ …… ②

- (2) $y=-x^2+2$ …… ①, $y=2x+3$ …… ②

- (3) $y=x^2-x$ …… ①, $y=-2x-1$ …… ②

解答 (1) $(0, 3), (-3, 6)$ (2) $(-1, 1)$ (3) 共有点をもたない

解説

- (1) ①, ② から y を消去して

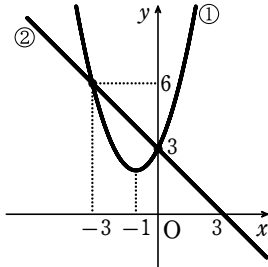
$$x^2+2x+3=-x+3$$

よって $x^2+3x=0$ ゆえに $x=0, -3$

② から $x=0$ のとき $y=3$

$x=-3$ のとき $y=6$

よって、共有点の座標は $(0, 3), (-3, 6)$



(2) ①, ② から y を消去して

$$-x^2 + 2 = 2x + 3$$

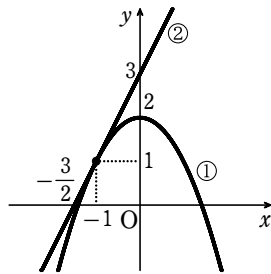
ゆえに $x^2 + 2x + 1 = 0$

よって $(x+1)^2 = 0$

ゆえに $x = -1$ (重解)

このとき, ② から $y = 1$

よって, 共有点の座標は $(-1, 1)$



(3) ①, ② から y を消去して

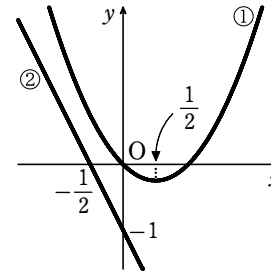
$$x^2 - x = -2x - 1$$

ゆえに $x^2 + x + 1 = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

よって, 共有点をもたない。



8 次の放物線と直線は共有点をもつか。もつときは, その座標を求めよ。

(1) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = x + 6 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = 2x - 9 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = 2x \end{cases}$

解答 (1) $\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{15-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}, \frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$
(2) $(3, -3)$ (3) 共有点をもたない

解説

(1) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 & \cdots \cdots \text{①} \\ y = x + 6 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$

①, ② から y を消去して $x^2 - 2x + 3 = x + 6$

整理して $x^2 - 3x - 3 = 0$

これを解くと

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

このとき, ② から

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} + 6 = \frac{15 \pm \sqrt{21}}{2} \quad (\text{複号同順})$$

よって, 共有点の座標は

$$\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{15-\sqrt{21}}{2}\right), \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}, \frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$$

(2) $\begin{cases} y = x^2 - 4x & \cdots \cdots \text{①} \\ y = 2x - 9 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$

①, ② から y を消去して $x^2 - 4x = 2x - 9$

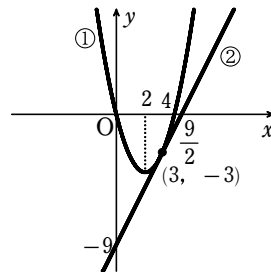
整理して $x^2 - 6x + 9 = 0$

よって $(x-3)^2 = 0$

したがって $x = 3$ (重解)

このとき, ② から $y = 2 \cdot 3 - 9 = -3$

よって, 共有点の座標は $(3, -3)$



(3) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 & \cdots \cdots \text{①} \\ y = 2x & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$

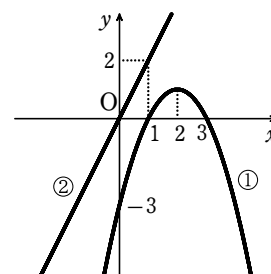
①, ② から y を消去して $-x^2 + 4x - 3 = 2x$

整理して $x^2 - 2x + 3 = 0$

判別式を D とすると $\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0$

よって, この 2 次方程式は実数解をもたない。

したがって, 放物線 ① と直線 ② は共有点をもたない。



9 次の 2 つの放物線は共有点をもつか。もつときは, その座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 3$ (2) $y = -x^2 + 2x + 9$
(2) $y = x^2 - x$ (3) $y = -x^2 + 3x - 2$
(3) $y = 2x^2 - 10x + 7$ (4) $y = -x^2 - 6x + 2$

解答 (1) $(-2, 1), (3, 6)$ (2) $(1, 0)$ (3) 共有点をもたない

解説

(1) ①, ② から y を消去して

$$x^2 - 3 = -x^2 + 2x + 9$$

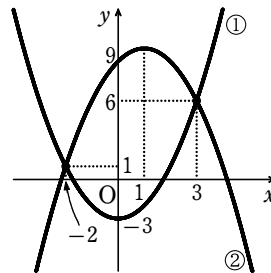
よって $x^2 - x - 6 = 0$

ゆえに $x = -2, 3$

① から $x = -2$ のとき $y = 1$

$x = 3$ のとき $y = 6$

よって, 共有点の座標は $(-2, 1), (3, 6)$



(2) ①, ② から y を消去して

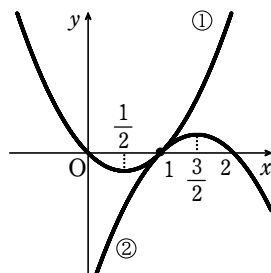
$$x^2 - x = -x^2 + 3x - 2$$

ゆえに $x^2 - 2x + 1 = 0$

よって $(x-1)^2 = 0$ ゆえに $x = 1$ (重解)

このとき, ① から $y = 0$

よって, 共有点の座標は $(1, 0)$



(3) ①, ② から y を消去して

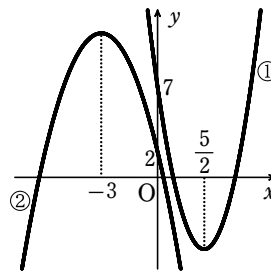
$$2x^2 - 10x + 7 = -x^2 - 6x + 2$$

よって $3x^2 - 4x + 5 = 0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 3 \cdot 5 = -11 < 0$$

よって, 2 つの放物線 ①, ② は共有点をもたない。



10 次の 2 つの放物線は共有点をもつか。もつときは, その座標を求めよ。

(1) $\begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ y = 2x^2 - 3x + 9 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 2(x-4)^2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} y = -x^2 - 2x - 4 \\ y = 3x^2 - 10x \end{cases}$

解答 (1) $(2, 11), (-4, 53)$ (2) $(2, 8)$ (3) $(1, -7)$

解説

(1) $\begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 & \cdots \cdots \text{①} \\ y = 2x^2 - 3x + 9 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$

①, ② から y を消去して $3x^2 - x + 1 = 2x^2 - 3x + 9$

整理して $x^2 + 2x - 8 = 0$ よって $(x-2)(x+4) = 0$

したがって $x = 2, -4$

① から $x = 2$ のとき $y = 3 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 11$

$x = -4$ のとき $y = 3 \cdot (-4)^2 - (-4) + 1 = 53$

よって, 共有点の座標は $(2, 11), (-4, 53)$

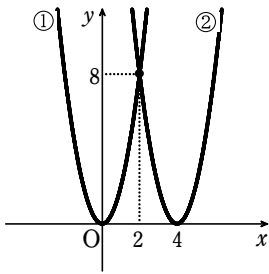
(2) $\begin{cases} y = 2x^2 & \cdots \cdots \text{①} \\ y = 2(x-4)^2 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$

①, ② から y を消去して $2x^2 = 2(x-4)^2$

整理して $8x - 16 = 0$ ゆえに $x = 2$

このとき, ① から $y = 2 \cdot 2^2 = 8$

よって, 共有点の座標は $(2, 8)$



(3) $\begin{cases} y = -x^2 - 2x - 4 & \cdots \cdots \text{①} \\ y = 3x^2 - 10x & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$

①, ② から y を消去して $-x^2 - 2x - 4 = 3x^2 - 10x$

整理して $4x^2 - 8x + 4 = 0$ よって $4(x-1)^2 = 0$

したがって $x = 1$ (重解)

このとき, ② から $y = 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 = -7$

よって, 共有点の座標は $(1, -7)$

11 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1) $y = 2x^2 - x - 6$ (2) $y = 3x^2 - 7x - 1$
(3) $y = -x^2 + 6x - 9$ (4) $y = -(x+1)^2 + 4$

解答 (1) $(2, 0), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ (2) $\left(\frac{7+\sqrt{61}}{6}, 0\right), \left(\frac{7-\sqrt{61}}{6}, 0\right)$
(3) $(3, 0)$ (4) $(1, 0), (-3, 0)$

解説

(1) 共有点の x 座標は, 2 次方程式 $2x^2 - x - 6 = 0$ の実数解である。

左辺を因数分解すると $(x-2)(2x+3) = 0$

よって $x = 2, -\frac{3}{2}$

ゆえに, 求める座標は $(2, 0), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

(2) 共有点の x 座標は, 2 次方程式 $3x^2 - 7x - 1 = 0$ の実数解である。

これを解くと $x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{61}}{6}$

よって, 求める座標は $\left(\frac{7+\sqrt{61}}{6}, 0\right), \left(\frac{7-\sqrt{61}}{6}, 0\right)$

(3) 共有点の x 座標は, 2 次方程式 $-x^2 + 6x - 9 = 0$ の実数解である。

両辺に -1 を掛けると $x^2 - 6x + 9 = 0$

左辺を因数分解すると $(x-3)^2 = 0$

よって $x = 3$

ゆえに, 求める座標は $(3, 0)$

(4) 共有点の x 座標は, 2 次方程式 $-(x+1)^2 + 4 = 0$ の実数解である。

整理すると $x^2 + 2x - 3 = 0$

左辺を因数分解すると $(x-1)(x+3) = 0$

よって $x=1, -3$
ゆえに、求める座標は $(1, 0), (-3, 0)$

12 次の放物線と直線は共有点をもつか。もつときは、その座標を求めよ。

(1) $y=x^2, y=x+2$ (2) $y=-x^2+1, y=5-4x$
(3) $y=x^2-x+4, y=2x+2$ (4) $y=4x^2-6x+1, y=2x-4$

解答 (1) $(-1, 1), (2, 4)$ (2) $(2, -3)$ (接点) (3) $(1, 4), (2, 6)$
(4) 共有点をもたない

解説

(1)
$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots \cdots \text{①} \\ y=x+2 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$
①, ② から y を消去すると $x^2=x+2$
よって $x^2-x-2=0 \cdots \cdots \text{③}$
③ の判別式を D とすると $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot (-2)=9>0$
したがって、① と ② は異なる 2 点で交わる。
③ から $(x+1)(x-2)=0$
ゆえに $x=-1, 2$
② から $x=-1$ のとき $y=1$,
 $x=2$ のとき $y=4$
よって、共有点の座標は $(-1, 1), (2, 4)$

(2)
$$\begin{cases} y=-x^2+1 & \cdots \cdots \text{①} \\ y=5-4x & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$
①, ② から y を消去すると $-x^2+1=5-4x$
よって $x^2-4x+4=0 \cdots \cdots \text{③}$
③ の判別式を D とすると $D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=0$
したがって、① と ② は接する。
③ から $(x-2)^2=0$
ゆえに $x=2$
このとき、② から $y=-3$
よって、共有点の座標は $(2, -3)$

(3)
$$\begin{cases} y=x^2-x+4 & \cdots \cdots \text{①} \\ y=2x+2 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$
①, ② から y を消去すると $x^2-x+4=2x+2$
よって $x^2-3x+2=0 \cdots \cdots \text{③}$
③ の判別式を D とすると $D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1>0$
したがって、① と ② は異なる 2 点で交わる。
③ から $(x-1)(x-2)=0$
ゆえに $x=1, 2$
② から $x=1$ のとき $y=4$, $x=2$ のとき $y=6$
よって、共有点の座標は $(1, 4), (2, 6)$

(4)
$$\begin{cases} y=4x^2-6x+1 & \cdots \cdots \text{①} \\ y=2x-4 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$
①, ② から y を消去すると $4x^2-6x+1=2x-4$
よって $4x^2-8x+5=0 \cdots \cdots \text{③}$
③ の判別式を D とすると $D=(-8)^2-4\cdot 4\cdot 5=-16<0$
したがって、① と ② は共有点をもたない。

13 次の 2 つの放物線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2-3x+2, y=-x^2+x+2$ (2) $y=x^2-4x+5, y=-x^2+8x-13$

解答 (1) $(0, 2), (2, 0)$ (2) $(3, 2)$

解説

(1)
$$\begin{cases} y=x^2-3x+2 & \cdots \cdots \text{①} \\ y=-x^2+x+2 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$
①, ② から y を消去すると $x^2-3x+2=-x^2+x+2$
よって $2x^2-4x=0$
ゆえに $x^2-2x=0$
よって $x(x-2)=0$
これを解くと $x=0, 2$
① から $x=0$ のとき $y=2$, $x=2$ のとき $y=0$
よって、共有点の座標は $(0, 2), (2, 0)$

(2)
$$\begin{cases} y=x^2-4x+5 & \cdots \cdots \text{①} \\ y=-x^2+8x-13 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$
①, ② から y を消去すると $x^2-4x+5=-x^2+8x-13$
よって $2x^2-12x+18=0$
ゆえに $x^2-6x+9=0$
よって $(x-3)^2=0$
これを解くと $x=3$
このとき、① から $y=2$
よって、共有点の座標は $(3, 2)$

14 次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=x^2-5x+6$ (2) $y=x^2-4x+1$
(3) $y=-x^2+8x-16$ (4) $y=2x^2+x-6$
(5) $y=-x^2+3x+7$ (6) $y=9x^2+6x+1$

解答 (1) $(2, 0), (3, 0)$ (2) $(2-\sqrt{3}, 0), (2+\sqrt{3}, 0)$ (3) $(4, 0)$
(4) $(-2, 0), (\frac{3}{2}, 0)$ (5) $(\frac{3-\sqrt{37}}{2}, 0), (\frac{3+\sqrt{37}}{2}, 0)$
(6) $(-\frac{1}{3}, 0)$

解説

(1) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $x^2-5x+6=0$ の解である。
左辺を因数分解して $(x-2)(x-3)=0$
ゆえに $x=2, 3$
よって、共有点の座標は $(2, 0), (3, 0)$

(2) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の解である。
これを解くと $x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 1}}{1}=2\pm\sqrt{3}$
よって、共有点の座標は $(2-\sqrt{3}, 0), (2+\sqrt{3}, 0)$

(3) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $-x^2+8x-16=0$ の解である。
両辺に -1 を掛けて $x^2-8x+16=0$
左辺を因数分解して $(x-4)^2=0$
ゆえに $x=4$
よって、共有点の座標は $(4, 0)$

(4) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $2x^2+x-6=0$ の解である。

左辺を因数分解して $(x+2)(2x-3)=0$
ゆえに $x=-2, \frac{3}{2}$
よって、共有点の座標は $(-2, 0), (\frac{3}{2}, 0)$

(5) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $-x^2+3x+7=0$ の解である。
両辺に -1 を掛けて $x^2-3x-7=0$
解の公式により $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot (-7)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$
よって、共有点の座標は $(\frac{3-\sqrt{37}}{2}, 0), (\frac{3+\sqrt{37}}{2}, 0)$

(6) 共有点の x 座標は、2 次方程式 $9x^2+6x+1=0$ の解である。
左辺を因数分解して $(3x+1)^2=0$
ゆえに $x=-\frac{1}{3}$
よって、共有点の座標は $(-\frac{1}{3}, 0)$