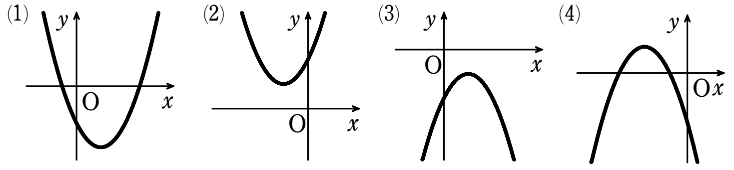
2次関数の係数の符号クイズ

1 下の図は，いずれも2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。それぞれの場合について，a，b，c および b^2-4ac の符号をいえ。



解答 (1) $a>0$，$b<0$，$c<0$，$b^2-4ac>0$ (2) $a>0$，$b>0$，$c>0$，$b^2-4ac<0$

(3) $a<0$，$b>0$，$c<0$，$b^2-4ac<0$ (4) $a<0$，$b<0$，$c<0$，$b^2-4ac>0$

解説

(1) グラフは下に凸の放物線であるから $a>0$

軸が y 軸の右側にあるから $-\dfrac{b}{2a}>0$

これと $a>0$ から $b<0$

y 軸との交点の y 座標が負であるから $c<0$

グラフが x 軸と異なる2点で交わるから $b^2-4ac>0$

(2) グラフは下に凸の放物線であるから $a>0$

軸が y 軸の左側にあるから $-\dfrac{b}{2a}<0$

これと $a>0$ から $b>0$

y 軸との交点の y 座標が正であるから $c>0$

グラフが x 軸と共有点をもたないから $b^2-4ac<0$

(3) グラフは上に凸の放物線であるから $a<0$

軸が y 軸の右側にあるから $-\dfrac{b}{2a}>0$

これと $a<0$ から $b>0$

y 軸との交点の y 座標が負であるから $c<0$

グラフが x 軸と共有点をもたないから $b^2-4ac<0$

(4) グラフは上に凸の放物線であるから $a<0$

軸が y 軸の左側にあるから $-\dfrac{b}{2a}<0$

これと $a<0$ から $b<0$

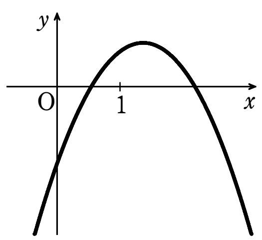
y 軸との交点の y 座標が負であるから $c<0$

グラフが x 軸と異なる2点で交わるから $b^2-4ac>0$

2 右の図は，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。
次の符号をいえ。

(1) a，b，c (2) b^2-4ac (3) $a+b+c$

(4) $a-b+c$ (5) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1$



解答 (1) $a<0$，$b>0$，$c<0$ (2) $b^2-4ac>0$ (3) $a+b+c>0$

(4) $a-b+c<0$ (5) $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1>0$

解説

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて

頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$，

y 軸との交点の座標は $(0,\ c)$

である。

(1) グラフは上に凸であるから $a<0$

頂点の x 座標は正であるから $-\dfrac{b}{2a}>0$

ここで $a<0$ であるから $b>0$

y 軸と負の部分で交わるから $c<0$

(2) グラフが x 軸と異なる2点で交わっているから $b^2-4ac>0$

別解 頂点の y 座標は正であるから $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$

$a<0$ であるから $b^2-4ac>0$

(3) $x=1$ のとき $y=a+b+c$ であるから，グラフは点 $(1,\ a+b+c)$ を通る。

この点は x 軸より上側にあるから $a+b+c>0$

(4) $x=-1$ のとき $y=a-b+c$ であるから，グラフは点 $(-1,\ a-b+c)$ を通る。

この点は x 軸より下側にあるから $a-b+c<0$

別解 (1) より $a<0$，$b>0$，$c<0$ であるから $a-b+c<0$

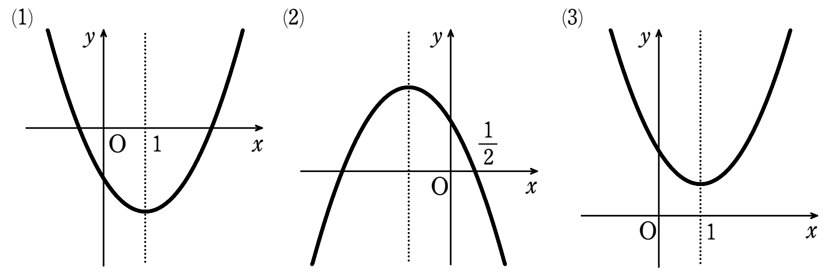
(5) 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$a<0$ であるから $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

図より $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>1$ であるから $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-1>0$

3 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが次の図のようになるとき，それぞれの場合について，a，b，c，$a+b+c$ および b^2-4ac の符号を調べよ。



解答 (1) $a>0$，$b<0$，$c<0$，$a+b+c<0$，$b^2-4ac>0$

(2) $a<0$，$b<0$，$c>0$，$a+b+c<0$，$b^2-4ac>0$

(3) $a>0$，$b<0$，$c>0$，$a+b+c>0$，$b^2-4ac<0$

解説

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて

軸は 直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$

y 軸との交点の座標は $(0,\ c)$

また，$x=1$ のとき $y=a+b+c$

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とする。

(1) グラフは下に凸であるから $a>0$

軸は $x>0$ の範囲にあるから $-\dfrac{b}{2a}>0$

ここで $a>0$ であるから $b<0$

y 軸と負の部分で交わるから $c<0$

$x=1$ のとき $y<0$ であるから $a+b+c<0$

グラフは x 軸と異なる2点で交わるから $D=b^2-4ac>0$

(2) グラフは上に凸であるから $a<0$

軸は $x<0$ の範囲にあるから $-\dfrac{b}{2a}<0$

ここで $a<0$ であるから $b<0$

y 軸と正の部分で交わるから $c>0$

$x=1$ のとき $y<0$ であるから $a+b+c<0$

グラフは x 軸と異なる2点で交わるから $D=b^2-4ac>0$

(3) グラフは下に凸であるから $a>0$

軸は $x>0$ の範囲にあるから $-\dfrac{b}{2a}>0$

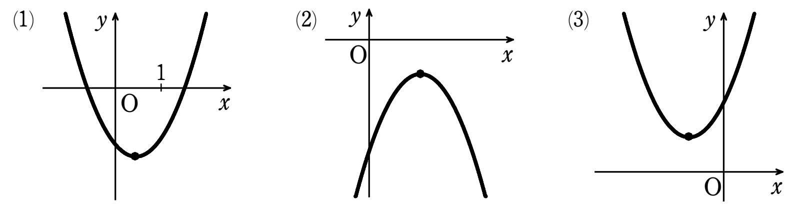
ここで $a>0$ であるから $b<0$

y 軸と正の部分で交わるから $c>0$

$x=1$ のとき $y>0$ であるから $a+b+c>0$

グラフは x 軸と共有点をもたないから $D=b^2-4ac<0$

4 2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが次の図のようになるとき，定数 a，b，c と b^2-4ac，$a+b+c$ の符号を求めよ。



解答 a，b，c，b^2-4ac，$a+b+c$ の順に

(1) 正，負，負，正，負 (2) 負，正，負，負，負 (3) 正，正，正，負，正

解説

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについて

頂点のx座標は $-\dfrac{b}{2a}$，y 軸との交点の座標は $(0,\ c)$

また，$x=1$ のとき $y=a+b+c$

(1) グラフが下に凸であるから $a>0$ (正)

頂点の x 座標は正であるから $-\dfrac{b}{2a}>0$

ここで $a>0$ であるから $b<0$ (負)

y 軸の負の部分と交わるから $c<0$ (負)

グラフが x 軸と2点で交わるから

$b^2-4ac>0$ (正)

$x=1$ のとき $y<0$ であるから

$a+b+c<0$ (負)

(2) グラフが上に凸であるから $a<0$ (負)

頂点の x 座標は正であるから $-\dfrac{b}{2a}>0$

ここで $a<0$ であるから　　$b>0$ （正）

y 軸の負の部分と交わるから　　$c<0$ （負）

グラフと x 軸の共有点がないから

$b^2-4ac<0$ （負）

$x=1$ のとき $y<0$ であるから

$a+b+c<0$ （負）

(3)　グラフが下に凸であるから　　$a>0$ （正）

頂点の x 座標は負であるから　　$-\dfrac{b}{2a}<0$

ここで $a>0$ であるから　　$b>0$ （正）

y 軸の正の部分と交わるから　　$c>0$ （正）

グラフと x 軸の共有点がないから

$b^2-4ac<0$ （負）

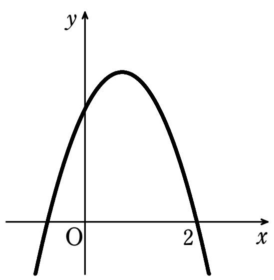
$x=1$ のとき $y>0$ であるから

$a+b+c>0$ （正）

5　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を求めよ。

(1)　a　　(2)　c　　(3)　$-\dfrac{b}{2a}$　　(4)　b

(5)　b^2-4ac　　(6)　$a+b+c$



解答　(1)　負　　(2)　正　　(3)　正　　(4)　正　　(5)　正　　(6)　正

解説

(1)　放物線が上に凸であるから　$a<0$

よって，符号は　負

(2)　放物線と y 軸の交点の y 座標が正であるから　$c>0$

よって，符号は　正

(3)　放物線の軸は直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$ で，y 軸の右側にあるから　$-\dfrac{b}{2a}>0$

よって，符号は　正

(4)　$a<0$ かつ $-\dfrac{b}{2a}>0$ より　$b>0$　　よって，符号は　正

(5)　放物線と x 軸は異なる 2 点を共有しているから　$b^2-4ac>0$

よって，符号は　正

(6)　グラフ上の点で，x 座標が 1 である点の y 座標が $a+b+c$ である。

この点は x 軸の上側にあるから　$a+b+c>0$

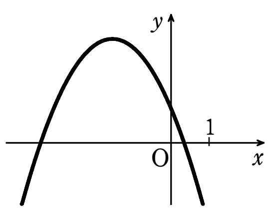
よって，符号は　正

6　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき，次の値の符号を求めよ。

[5点×5=25点]

(1)　a　　(2)　c　　(3)　b

(4)　b^2-4ac　　(5)　$a+b+c$



解答　(1)　グラフが上に凸であるから　　$a<0$

よって，符号は　負

(2)　y 軸との交点の y 座標が正であるから　　$c>0$

よって，符号は　正

(3)　頂点の x 座標が負であるから　　$-\dfrac{b}{2a}<0$

$a<0$ より　$-b>0$　すなわち　$b<0$

よって，符号は　負

(4)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると　　$D=b^2-4ac$

x 軸と異なる 2 点で交わるから　　$D=b^2-4ac>0$

よって，符号は　正

(5)　$x=1$ のとき　　$y=a\times1^2+b\times1+c=a+b+c$

グラフより，$x=1$ のとき　　$y<0$

よって　　$a+b+c<0$

したがって，符号は　負

解説

(1)　グラフが上に凸であるから　　$a<0$

よって，符号は　負

(2)　y 軸との交点の y 座標が正であるから　　$c>0$

よって，符号は　正

(3)　頂点の x 座標が負であるから　　$-\dfrac{b}{2a}<0$

$a<0$ より　$-b>0$　すなわち　$b<0$

よって，符号は　負

(4)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると　　$D=b^2-4ac$

x 軸と異なる 2 点で交わるから　　$D=b^2-4ac>0$

よって，符号は　正

(5)　$x=1$ のとき　　$y=a\times1^2+b\times1+c=a+b+c$

グラフより，$x=1$ のとき　　$y<0$

よって　　$a+b+c<0$

したがって，符号は　負