曲線の長さクイズ

1 次のサイクロイドの長さを求めよ。

$$x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos t)\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

解答　16

解説

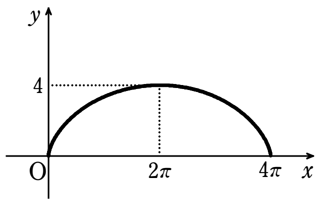
$$\frac{dx}{dt}=2(1-\cos t),\ \frac{dy}{dt}=2\sin t$$

よって，求める長さ L は

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{4(1-\cos t)^2+4\sin^2 t}\,dt$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$



$0\leqq t\leqq 2\pi$ では $\sin\frac{t}{2}\geqq 0$ であるから

$$L=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=4\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=16$$

2 次の曲線の長さを求めよ。

$$x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

解答　6

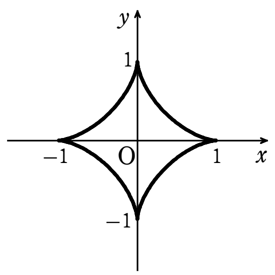
解説

$$\frac{dx}{dt}=3\cos^2 t(-\sin t)=-3\sin t\cos^2 t,\ \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

また，アステロイドは x 軸，y 軸に関して対称であるから

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\sin t\cos^2 t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$



$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ では $\sin t\geqq 0$，$\cos t\geqq 0$ であるから

$$L=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=6\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6$$

3 曲線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の長さを求めよ。

解答　$\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

解説

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\text{ から}$$

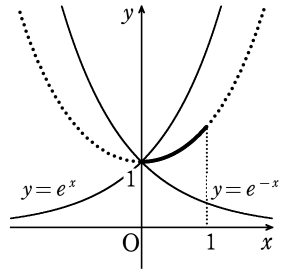
$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2$$

$$=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$$

よって，求める長さ L は

$$L=\int_0^1\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$



4 曲線 $y=x\sqrt{x}$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{4}{3}\right)$ の長さを求めよ。

解答　$\frac{56}{27}$

解説

$y=x^{\frac{3}{2}}$ から　$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$，$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{9}{4}x$

よって，求める長さ L は

$$L=\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{4}{3}}=\frac{56}{27}$$

5 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度 v が $\sin\pi t$ であるとする。$t=0$ から $t=3$ までに，P の位置はどれだけ変化するか。また，道のりを求めよ。

解答　位置の変化量 $\frac{2}{\pi}$，道のり $\frac{6}{\pi}$

解説

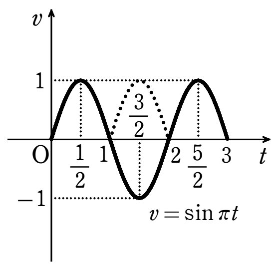
求める位置の変化量 s は

$$s=\int_0^3\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{\cos\pi t}{\pi}\right]_0^3=\frac{2}{\pi}$$

また，道のり l は，右の図から

$$l=\int_0^3|\sin\pi t|dt=3\int_0^1\sin\pi t\,dt$$

$$=3\left[-\frac{\cos\pi t}{\pi}\right]_0^1=\frac{6}{\pi}$$



6 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度 v が $\cos 2t$ であるとする。$t=0$ から $t=\pi$ までに，P の位置はどれだけ変化するか。また，道のりを求めよ。

解答　位置の変化量 0，道のり 2

解説

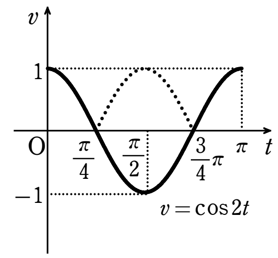
求める位置の変化量 s は

$$s=\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}=0$$

また，道のり l は，右の図から

$$l=\int_0^{\pi}|\cos 2t|dt=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt$$

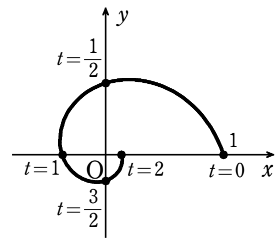
$$=2\left[\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2$$



7 点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として

$$x=e^{-t}\cos\pi t,\ y=e^{-t}\sin\pi t$$

で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までの間に点 P が動く道のりを求めよ。



解答　$\sqrt{1+\pi^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

解説

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}(\cos\pi t+\pi\sin\pi t)$$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}(\sin\pi t-\pi\cos\pi t)$$

よって，求める道のり l は

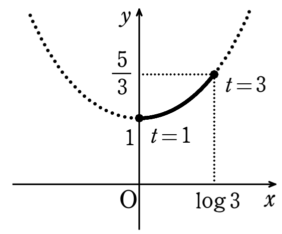
$$l=\int_0^2\sqrt{e^{-2t}\{\cos^2\pi t+\sin^2\pi t+\pi^2(\sin^2\pi t+\cos^2\pi t)\}}\,dt$$

$$=\sqrt{1+\pi^2}\int_0^2 e^{-t}dt=\sqrt{1+\pi^2}\left[-e^{-t}\right]_0^2=\sqrt{1+\pi^2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

8 点 P の座標 $(x,\ y)$ が，正の数 t の関数として

$$x=\log t,\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

で表されるとき，$t=1$ から $t=3$ までの間に点 P が動く道のりを求めよ。



解答　$\frac{4}{3}$

解説

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t},\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

よって，求める道のり l は

$$l=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^3\sqrt{\frac{t^4+2t^2+1}{4t^4}}\,dt=\int_1^3\frac{t^2+1}{2t^2}dt=\frac{1}{2}\int_1^3\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

9 曲線 $y=\sqrt{x}-\dfrac{x\sqrt{x}}{3}$ $(0\leqq x\leqq 4)$ の長さを求めよ。

解答 $\dfrac{10}{3}$

解説

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

求める長さを L とすると

$$L=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{\frac{(1+x)^2}{4x}}\,dx$$

$$=\int_1^4\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)dx=\left[\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{10}{3}$$

10 初速度 40 m/s で直線上を動き始めた物体の，t 秒後の速度 v m/s を $v=40-1.5t-4\sqrt{t}$ とする。速度が 0 になるまでに進む道のりを求めよ。

解答 $\dfrac{832}{3}$ m

解説

$$v=40-1.5t-4\sqrt{t}$$

$$=-\frac{1}{2}(3t+8\sqrt{t}-80)$$

$$=-\frac{1}{2}(3\sqrt{t}+20)(\sqrt{t}-4)$$

$v=0$ とすると，$t>0$ であるから

$\sqrt{t}-4=0$ すなわち $t=16$

$0\leqq t<16$ のとき，$v>0$ であるから，求める道のり l は

$$l=\int_0^{16}|v|dt=\int_0^{16}(40-1.5t-4\sqrt{t})dt$$

$$=\left[40t-\frac{3}{4}t^2-\frac{8}{3}t\sqrt{t}\right]_0^{16}=\frac{832}{3}\ (\mathrm{m})$$

11 $a>0$ とする。曲線 $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ $(0\leqq t\leqq a)$ の長さを $L(a)$ とする。

(1) $L(a)$ を a で表せ。 (2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}L(a)$ を求めよ。

解答 (1) $L(a)=\sqrt{2}(1-e^{-a})$ (2) $\sqrt{2}$

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$

$\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=-e^{-t}(\sin t-\cos t)$

よって $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}(\cos t+\sin t)^2+e^{-2t}(\sin t-\cos t)^2=2e^{-2t}$

ゆえに $L(a)=\displaystyle\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^a\sqrt{2e^{-2t}}\,dt$

$$=\sqrt{2}\int_0^a e^{-t}dt=\sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^a$$

$$=\sqrt{2}(1-e^{-a})$$

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}L(a)=\lim_{a\to\infty}\sqrt{2}(1-e^{-a})=\sqrt{2}$

12 極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で表された曲線（カージオイド）上の点 P の直交座標を $(x,\ y)$ とする。

(1) x，y をそれぞれ θ の関数として表せ。

(2) この曲線の長さを求めよ。

解答 (1) $x=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y=(1+\cos\theta)\sin\theta$ (2) 8

解説

(1) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$r=1+\cos\theta$ から

$x=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y=(1+\cos\theta)\sin\theta$

(2) $\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta=-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=-\sin\theta-\sin 2\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos\theta+\cos 2\theta$

よって，求める曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin\theta-\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8$$

13 曲線 $x=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y=(1+\cos\theta)\sin\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の長さを求めよ。[25 点]

解答 $\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta=-(\sin\theta+\sin 2\theta)$，

$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos 2\theta$ から

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\sin\theta+\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2$$

$$=2+2(\sin\theta\sin 2\theta+\cos\theta\cos 2\theta)$$

$$=2+2\cos\theta=2(1+\cos\theta)$$

$$=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ では $\cos\dfrac{\theta}{2}\geqq 0$ であるから，求める曲線の長さは

$$\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}d\theta=\left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=4$$

解説

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta=-(\sin\theta+\sin 2\theta)$，

$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos 2\theta$ から

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\sin\theta+\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2$$

$$=2+2(\sin\theta\sin 2\theta+\cos\theta\cos 2\theta)$$

$$=2+2\cos\theta=2(1+\cos\theta)$$

$$=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ では $\cos\dfrac{\theta}{2}\geqq 0$ であるから，求める曲線の長さは

$$\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}d\theta=\left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=4$$

14 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度が $v(t)=te^{-t}$ であるとき，$t=0$ から $t=2$ までにおける，点 P の位置の変化 s と道のり l を求めよ。[25 点]

解答 $f(t)=\displaystyle\int v(t)dt$ とおくと

$$f(t)=\int t(-e^{-t})'dt=-te^{-t}+\int e^{-t}dt$$

$$=-te^{-t}-e^{-t}+C$$

$$=-(t+1)e^{-t}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

よって $s=\displaystyle\int_0^2 v(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^2=f(2)-f(0)=-3e^{-2}+1$

また $l=\displaystyle\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^2 v(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^2$

$=f(2)-f(0)=-3e^{-2}+1$

解説

$f(t)=\displaystyle\int v(t)dt$ とおくと

$$f(t)=\int t(-e^{-t})'dt=-te^{-t}+\int e^{-t}dt$$

$$=-te^{-t}-e^{-t}+C$$

$$=-(t+1)e^{-t}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

よって $s=\displaystyle\int_0^2 v(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^2=f(2)-f(0)=-3e^{-2}+1$

また $l=\displaystyle\int_0^2|v(t)|dt=\int_0^2 v(t)dt=\Big[f(t)\Big]_0^2$

$=f(2)-f(0)=-3e^{-2}+1$

15 点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として

$x=2\cos t-\cos 2t$，$y=2\sin t-\sin 2t$

で表されるとき，$t=0$ から $t=\pi$ までの間に点 P が動く道のりを求めよ。[25 点]

解答 $\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t+2\sin 2t=-2(\sin t-\sin 2t)$，

$\dfrac{dy}{dt}=2\cos t-2\cos 2t=2(\cos t-\cos 2t)$ から

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4\{(\sin t-\sin 2t)^2+(\cos t-\cos 2t)^2\}$$

$$=4\{2-2(\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t)\}$$

$$=8(1-\cos t)=16\sin^2\frac{t}{2}$$

よって，求める道のりは

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^{\pi}4\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=\left[-8\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=8$$

解説

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t+2\sin 2t=-2(\sin t-\sin 2t),$$

$\dfrac{dy}{dt}=2\cos t-2\cos 2t=2(\cos t-\cos 2t)$ から

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=4\{(\sin t-\sin 2t)^2+(\cos t-\cos 2t)^2\}$$
$$=4\{2-2(\cos 2t\cos t+\sin 2t\sin t)\}$$
$$=8(1-\cos t)=16\sin^2\frac{t}{2}$$

よって，求める道のりは

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^{\pi}4\sin\frac{t}{2}dt$$
$$=\left[-8\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=8$$

16 点 P の座標 $(x,\ y)$ が，t の関数として $x=6e^t$，$y=e^{3t}+3e^{-t}$ で表されるとき，$t=0$ から $t=2$ までの間に点 P が動く道のりを求めよ。[20 点]

解答 $\dfrac{dx}{dt}=6e^t$，$\dfrac{dy}{dt}=3e^{3t}-3e^{-t}$

よって，求める道のり l は

$$l=\int_0^2\sqrt{(6e^t)^2+(3e^{3t}-3e^{-t})^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{9(e^{3t}+e^{-t})^2}\,dt=3\int_0^2(e^{3t}+e^{-t})dt$$
$$=\left[e^{3t}-3e^{-t}\right]_0^2=e^6-3e^{-2}+2$$

解説

$\dfrac{dx}{dt}=6e^t$，$\dfrac{dy}{dt}=3e^{3t}-3e^{-t}$

よって，求める道のり l は

$$l=\int_0^2\sqrt{(6e^t)^2+(3e^{3t}-3e^{-t})^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{9(e^{3t}+e^{-t})^2}\,dt=3\int_0^2(e^{3t}+e^{-t})dt$$
$$=\left[e^{3t}-3e^{-t}\right]_0^2=e^6-3e^{-2}+2$$

17 曲線 $x=\sqrt{3}t^2-1$，$y=t^3-t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の長さを求めよ。

解答 $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

解説

$\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{3}t$，$\dfrac{dy}{dt}=3t^2-1$ であるから

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(2\sqrt{3}t)^2+(3t^2-1)^2$$
$$=9t^4+6t^2+1$$
$$=(3t^2+1)^2$$

よって，曲線の長さは

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(3t^2+1)dt=\left[t^3+t\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

18 次の曲線の長さ L を求めよ。

(1) $\begin{cases}x=e^{-t}\cos t\\ y=e^{-t}\sin t\end{cases}$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(2) $y=\log(1-x^2)$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$

解答 (1) $L=\sqrt{2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$　(2) $L=\log 3-\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$，$\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t$

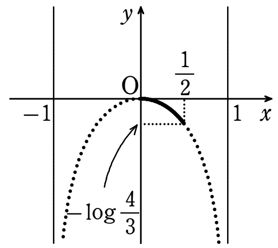
よって　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=(e^{-t})^2\{(\cos t+\sin t)^2+(-\sin t+\cos t)^2\}=2e^{-2t}$

ゆえに　$L=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2e^{-2t}}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-t}dt=\sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\sqrt{2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

(2) $1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\dfrac{-2x}{1-x^2}\right)^2=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2$

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ において $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}>0$ であるから



$$L=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$=\left[-x+\log\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\log 3-\frac{1}{2}$$

19 次の曲線の長さ L を求めよ。(1)，(2) では $a>0$ とする。

(1) $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$

(2) $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$

(3) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $(-a\leqq x\leqq a)$

(4) $y=\log(\sin x)$ $\left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

(5) $3y^2=x(x-1)^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$

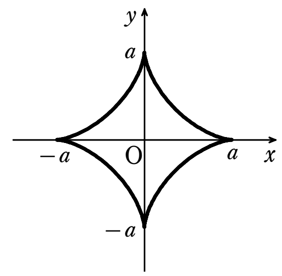
解答 (1) $L=6a$　(2) $L=8a$　(3) $L=e^a-e^{-a}$　(4) $L=\dfrac{1}{2}\log 3$

(5) $L=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=3a\cos^2 t(-\sin t)$，$\dfrac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$

よって



$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t$$
$$=9a^2\cos^2 t\sin^2 t=\left(\frac{3}{2}a\sin 2t\right)^2$$

ゆえに

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\sin 2t\right)^2}\,dt$$
$$=\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt=4\cdot\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$
$$=3a\left[-\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，$\dfrac{dy}{dt}=a\sin t$

よって　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=a^2\{(1-\cos t)^2+\sin^2 t\}$

$$=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ であるから　$\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$

ゆえに　$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt$

$$=4a\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

よって　$L=\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right\}^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$

$$=\int_{-a}^{a}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=2\int_0^a\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^a=e^a-e^{-a}$$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ から　$1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

よって　$L=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと　$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

また　$\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}dx=dt$

x	$\dfrac{\pi}{3}\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\longrightarrow 1$

x と t の対応は右のようになる。

ゆえに　$L=\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1+t^2}{2t}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}dt$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\frac{1}{t}dt=\left[\log t\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$$
$$=-\log\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log 3$$

(5) $3y^2=x(x-1)^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ …… ① から　$y=\pm\sqrt{\dfrac{x}{3}}(1-x)$

よって，曲線 $3y^2=x(x-1)^2$ は x 軸に関して対称な 2 つの曲線 $y=\sqrt{\dfrac{x}{3}}(1-x)$，

$y=-\sqrt{\frac{x}{3}}(1-x)$ を合わせたものである。

$y=\sqrt{\frac{x}{3}}(1-x)\ (x\geqq 0)$ について

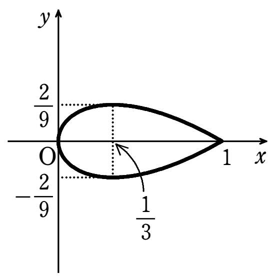
$$y'=-\sqrt{\frac{x}{3}}+(1-x)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1-3x}{2\sqrt{3x}}$$

$y'=0$ とすると　$x=\frac{1}{3}$

y の増減表は右のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{3}$	…	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{2}{9}$	↘	0

したがって，曲線 ① の概形は右の図のようになる。



よって，曲線の長さは

$$L=2\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{1-3x}{2\sqrt{3x}}\right)^2}\,dx$$
$$=2\int_0^1\sqrt{\frac{(3x+1)^2}{12x}}\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{3x+1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

20 次の極方程式で表される曲線の長さを求めよ。

$$r=1+\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

解答　4

解説

$x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta$

$y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$

よって　$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta=-\sin\theta-\sin 2\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta+\cos 2\theta$

ゆえに　$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(-\sin\theta-\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2$

$=2+2\sin\theta\sin 2\theta+2\cos\theta\cos 2\theta=2+2\cos\theta$

$=2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)=4\cos^2\frac{\theta}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0$ であるから，求める曲線の長さは

$$\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi=4$$

21 円 $C：x^2+y^2=9$ の内側を半径 1 の円 D が滑らずに転がる。時刻 t において D は点 $(3\cos t,\ 3\sin t)$ で C に接している。

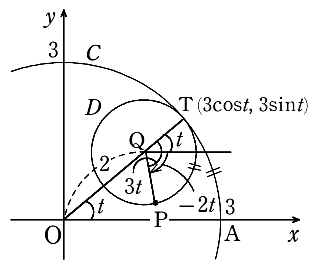
(1)　時刻 $t=0$ において点 $(3,\ 0)$ にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。ただし，$0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$ とする。

(2)　(1) の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めよ。

解答　(1)　$(2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)$　　(2)　$\frac{16}{3}$

解説

(1)　A $(3,\ 0)$，T $(3\cos t,\ 3\sin t)$ とする。
D と C が T で接しているとき，D の中心 Q の座標は $(2\cos t,\ 2\sin t)$ である。また，
$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\overset{\frown}{\mathrm{TA}}=3t$ であるから，半直線 QP が x 軸の正の向きとなす角は　$t-3t=-2t$



よって

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$

$=(2\cos t,\ 2\sin t)+(\cos(-2t),\ \sin(-2t))$

$=(2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)$

(2)　$x'(t)=-2\sin t-2\sin 2t=-2\sin t(1+2\cos t)$

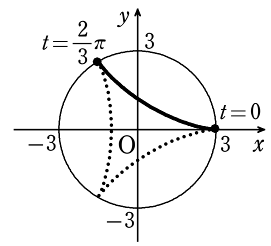
$y'(t)=2\cos t-2\cos 2t$

よって　$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2$

$=4(\sin^2 t+2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)$

$\quad+4(\cos^2 t-2\cos t\cos 2t+\cos^2 2t)$

$=4(2-2\cos 3t)=16\sin^2\frac{3}{2}t$



$0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$ であるから　$\sin\frac{3}{2}t\geqq 0$

また　$x'(t)\leqq 0$

したがって，求める曲線の長さは

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}4\sin\frac{3}{2}t\,dt=4\cdot\frac{2}{3}\left[-\cos\frac{3}{2}t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{16}{3}$$

22 xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。半径 $\frac{1}{n}$ (n は自然数) の円 C_n が，C に外接しながら滑ることなく反時計回りに転がるとき，C_n 上の点 P の軌跡を考える。ただし，最初 P は点 A $(1,\ 0)$ に一致していたとする。

(1)　O を端点とし C_n の中心を通る半直線が x 軸の正の向きとなす角が θ となるときの P の座標を n と θ で表せ。

(2)　P が初めて A に戻るまでの P の軌跡の長さ l_n を求めよ。

(3)　(2) で求めた l_n に対し，$\lim_{n\to\infty}l_n$ を求めよ。

解答　(1)　$\left(\frac{n+1}{n}\cos\theta-\frac{1}{n}\cos(n+1)\theta,\ \frac{n+1}{n}\sin\theta-\frac{1}{n}\sin(n+1)\theta\right)$

(2)　$l_n=\frac{8(n+1)}{n}$　　(3)　8

解説

(1)　半径 $\frac{1}{n}$ の円の中心を B とする。

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ のとき

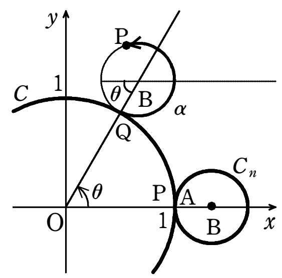
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\theta,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\theta\right)$

そのときの 2 円の接点を Q として $\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=\theta$ から

$\angle\mathrm{QBP}=n\theta$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が x 軸の正の向きとなす角は

$-\pi+\theta+n\theta=(n+1)\theta-\pi$



したがって

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{1}{n}\cos\{(n+1)\theta-\pi\},\ \frac{1}{n}\sin\{(n+1)\theta-\pi\}\right)$

$=\left(-\frac{1}{n}\cos(n+1)\theta,\ -\frac{1}{n}\sin(n+1)\theta\right)$

ゆえに

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$

$=\left(\frac{n+1}{n}\cos\theta-\frac{1}{n}\cos(n+1)\theta,\ \frac{n+1}{n}\sin\theta-\frac{1}{n}\sin(n+1)\theta\right)$

よって，P の座標は

$\left(\frac{n+1}{n}\cos\theta-\frac{1}{n}\cos(n+1)\theta,\ \frac{n+1}{n}\sin\theta-\frac{1}{n}\sin(n+1)\theta\right)$

(2)　(1) から，$\theta=2\pi$ のとき，P の座標は　$\left(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n},\ 0\right)$　すなわち　$(1,\ 0)$

ゆえに，P が初めて A に戻るのは $\theta=2\pi$ のときである。

P$(x,\ y)$ とすると

$x=\frac{n+1}{n}\cos\theta-\frac{1}{n}\cos(n+1)\theta$

$y=\frac{n+1}{n}\sin\theta-\frac{1}{n}\sin(n+1)\theta$

このとき　$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{n+1}{n}\sin\theta+\frac{n+1}{n}\sin(n+1)\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=\frac{n+1}{n}\cos\theta-\frac{n+1}{n}\cos(n+1)\theta$

ゆえに

$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\frac{(n+1)^2}{n^2}[\{-\sin\theta+\sin(n+1)\theta\}^2+\{\cos\theta-\cos(n+1)\theta\}^2]$

$=\frac{(n+1)^2}{n^2}\{2-2\sin(n+1)\theta\sin\theta-2\cos(n+1)\theta\cos\theta\}$

$=\frac{(n+1)^2}{n^2}(2-2\cos n\theta)=\frac{4(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{1-\cos n\theta}{2}$

$=\frac{4(n+1)^2}{n^2}\sin^2\frac{n\theta}{2}$

よって　$l_n=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\frac{2(n+1)}{n}\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|d\theta$

$\frac{n\theta}{2}=t$ とおくと　$n\,d\theta=2dt$

θ と t の対応は右のようになる。

θ	$0\longrightarrow 2\pi$
t	$0\longrightarrow n\pi$

ゆえに　$l_n=\frac{2(n+1)}{n}\int_0^{n\pi}|\sin t|\frac{2}{n}dt=\frac{4(n+1)}{n^2}\int_0^{n\pi}|\sin t|dt$

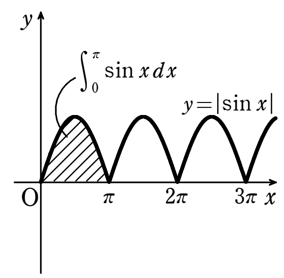
ここで　$\int_0^\pi|\sin t|dt=\int_\pi^{2\pi}|\sin t|dt=\cdots\cdots=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin t|dt$

したがって

$l_n=\frac{4(n+1)}{n^2}\cdot n\int_0^\pi\sin t\,dt$

$=\frac{4(n+1)}{n}\Big[-\cos t\Big]_0^\pi$

$=\frac{8(n+1)}{n}$



(3)　$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}8\left(1+\frac{1}{n}\right)=8$

23 数直線上を動く点 P の時刻 t における速度が $12-6t$ であるとする。点 P が，時刻 $t=0$ から $t=5$ までの間に動いた道のりを求めよ。

解答　39

解説

求める道のりは

$$\int_0^5|12-6t|dt=\int_0^2(12-6t)dt+\int_2^5(-12+6t)dt$$
$$=\Big[12t-3t^2\Big]_0^2+\Big[-12t+3t^2\Big]_2^5$$
$$=12+27=39$$

24 数直線上で原点から出発し，t 秒後の速度が $v(t)=e^t\sin t$ であるように運動する点 P がある。

(1)　出発してから t 秒後の P の位置を求めよ。

(2)　出発してから 2π 秒の間に P が動く範囲を求めよ。

(3)　出発してから 2π 秒の間に P が動く道のりを求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}\{e^t(\sin t-\cos t)+1\}$　　(2)　$\dfrac{1-e^{2\pi}}{2}$ から $\dfrac{1+e^{\pi}}{2}$ まで　　(3)　$\dfrac{(1+e^{\pi})^2}{2}$

解説

(1)　t 秒後の点 P の位置を $x(t)$ とすると

$$x(t)=0+\int_0^t v(t)\,dt=\int_0^t e^t\sin t\,dt=\Big[e^t\sin t\Big]_0^t-\int_0^t e^t\cos t\,dt$$
$$=e^t\sin t-\left\{\Big[e^t\cos t\Big]_0^t-\int_0^t e^t\cdot(-\sin t)dt\right\}$$
$$=e^t\sin t-e^t\cos t+1-x(t)$$

よって　$x(t)=\dfrac{1}{2}\{e^t(\sin t-\cos t)+1\}$

(2)　$x'(t)=v(t)=0$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ とすると

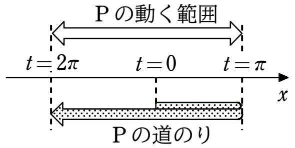
$t=0,\ \pi,\ 2\pi$

また　$x(\pi)=\dfrac{1+e^{\pi}}{2}>0$，$x(2\pi)=\dfrac{1-e^{2\pi}}{2}<0$

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$x'(t)$		+	0	−	
$x(t)$	0	↗	極大	↘	

右の増減表から，P が動く範囲は

$\dfrac{1-e^{2\pi}}{2}$ から $\dfrac{1+e^{\pi}}{2}$ まで



(3)　(2) の増減表から，求める道のりは

$\{x(\pi)-x(0)\}+\{x(\pi)-x(2\pi)\}$

$$=\frac{1+e^{\pi}}{2}+\left(\frac{1+e^{\pi}}{2}-\frac{1-e^{2\pi}}{2}\right)=\frac{(1+e^{\pi})^2}{2}$$

25 x 軸上を原点から出発し，t 秒後の加速度が $-2\sin 2t-5\sin t$ $(\mathrm{m/s^2})$ であるように運動する点 P がある。初速度が 4 (m/s) のとき，次のものを求めよ。

(1)　t 秒後の P の速度 $v(t)$　　(2)　t 秒後の P の位置 $x(t)$

(3)　出発してから π 秒後までに P が動いた道のり

解答　(1)　$v(t)=\cos 2t+5\cos t-2$　　(2)　$x(t)=\dfrac{\sin 2t}{2}+5\sin t-2t$

(3)　$\dfrac{11\sqrt{3}}{2}+\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1)　$v(t)=\int(-2\sin 2t-5\sin t)dt=\cos 2t+5\cos t+C$　(C は積分定数)

$v(0)=4$ であるから　$1+5+C=4$　　よって　$C=-2$

したがって　$v(t)=\cos 2t+5\cos t-2$

(2)　$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)\,dt=0+\int_0^t(\cos 2t+5\cos t-2)dt$

$$=\left[\frac{\sin 2t}{2}+5\sin t-2t\right]_0^t=\frac{\sin 2t}{2}+5\sin t-2t$$

(3)　まず，$0\leqq t\leqq\pi$ において $v(t)=0$ となる t を求める。

$\cos 2t+5\cos t-2=0$ から　$2\cos^2 t+5\cos t-3=0$

よって　$(\cos t+3)(2\cos t-1)=0$

$\cos t+3>0$ であるから　$\cos t=\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$t=\dfrac{\pi}{3}$

したがって，求める道のりは

$$\int_0^{\pi}|v(t)|dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}v(t)\,dt-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}v(t)\,dt$$
$$=\left[\frac{\sin 2t}{2}+5\sin t-2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\frac{\sin 2t}{2}+5\sin t-2t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$
$$=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\pi$$

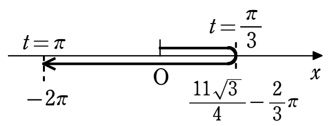
別解　$x'(t)[=v(t)]=0$ とすると　$t=\dfrac{\pi}{3}$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$x'(t)$		+	0	−	
$x(t)$	0	↗	極大	↘	-2π

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{11\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{3}\pi$$

増減表により，点 P は右下の図のように運動するから，求める道のりは

$$2\left(\frac{11\sqrt{3}}{4}-\frac{2}{3}\pi\right)+2\pi=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\pi$$



26 初めは原点にある動点 P の t 秒後の座標 $(x(t),\ y(t))$ が

$x(t)=e^t\cos t-1$，$y(t)=e^t\sin t$

で与えられるとする。P が 2 度目に x 軸の正の部分に到達するまでに P が動く道のりを求めよ。

解答　$\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)$

解説

$y(t)=0$ とすると　$t=n\pi$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

ここで　$x(\pi)<0$，$x(2\pi)>0$，$x(3\pi)<0$，$x(4\pi)>0$

よって，P が 2 度目に x 軸の正の部分に到達するのは $t=4\pi$ のときである。

$$\frac{d}{dt}x(t)=e^t(\cos t-\sin t),\quad \frac{d}{dt}y(t)=e^t(\cos t+\sin t)$$

したがって，求める道のりは

$$\int_0^{4\pi}\sqrt{e^{2t}(\cos t-\sin t)^2+e^{2t}(\cos t+\sin t)^2}\,dt=\int_0^{4\pi}\sqrt{2e^{2t}}\,dt$$
$$=\int_0^{4\pi}\sqrt{2}\,e^t dt=\sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^{4\pi}$$
$$=\sqrt{2}(e^{4\pi}-1)$$

27 次の曲線の長さを求めよ。(1) では $a>0$ とする。

(1)　アステロイド　$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$

(2)　$y=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ $(\sqrt{2}\leqq x\leqq 4)$

解答　(1)　$6a$　　(2)　$\sqrt{15}-1$

解説

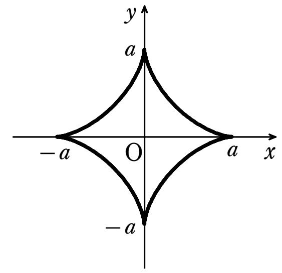
(1)　$\dfrac{dx}{dt}=3a\cos^2 t(-\sin t)$，$\dfrac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$

ゆえに

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=9a^2\cos^2 t\sin^2 t$$

よって，曲線の長さは

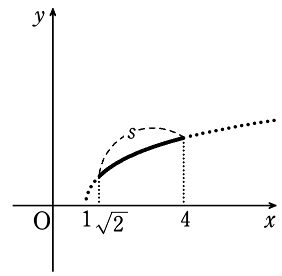
$$\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\,dt$$
$$=\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt=4\cdot\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$
$$=3a\Big[-\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$



(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

よって，曲線の長さ s は

$$s=\int_{\sqrt{2}}^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{\sqrt{2}}^4\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\Big[\sqrt{x^2-1}\Big]_{\sqrt{2}}^4$$
$$=\sqrt{15}-1$$



28 次の曲線の長さを求めよ。

(1)　$x=2t-1$，$y=e^t+e^{-t}$ $(0\leqq t\leqq 1)$　　(2)　$x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$

(3)　$y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$ $(1\leqq x\leqq 2)$　　(4)　$y=\log(\sin x)$ $\left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

解答　(1)　$e-\dfrac{1}{e}$　　(2)　4　　(3)　$\dfrac{59}{24}$　　(4)　$\dfrac{1}{2}\log 3$

解説

求める曲線の長さを L とする。

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$

よって　$L=\int_0^1\sqrt{2^2+(e^t-e^{-t})^2}\,dt=\int_0^1(e^t+e^{-t})dt=\Big[e^t-e^{-t}\Big]_0^1=e-\dfrac{1}{e}$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

$(1-\cos t)^2+\sin^2 t=2(1-\cos t)=4\sin^2\dfrac{t}{2}$

また，$0\leqq t\leqq\pi$ から　$\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$

よって　$L=\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt=\int_0^{\pi}2\sin\dfrac{t}{2}\,dt=4\Big[-\cos\dfrac{t}{2}\Big]_0^{\pi}=4$

(3)　$\dfrac{dy}{dx}=x^2-\dfrac{1}{4x^2}$

よって　$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(x^2-\dfrac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right]_1^2=\frac{7}{3}+\frac{1}{8}=\frac{59}{24}$$

(4)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

よって　$L=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}-\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(0-\log\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\log 3$$

29 (1)　数直線上を点 1 から出発して t 秒後の速度 v が $v=t(t-1)(t-2)$ で運動する点 P がある。出発してから 3 秒後の P の位置は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，P が動いた道のりは ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　x 軸上を，原点から出発して t 秒後の加速度が $\frac{1}{1+t}$ であるように動く物体がある。物体の初速度が v_0 のとき，出発してから t 秒後の物体の速度と位置を求めよ。

解答　(1)　(ア)　$\frac{13}{4}$　　(イ)　$\frac{11}{4}$

(2)　速度　$\log(1+t)+v_0$，位置　$(1+t)\log(1+t)+(v_0-1)t$

解説

(1)　$1+\int_0^3 t(t-1)(t-2)dt=1+\int_0^3(t^3-3t^2+2t)dt=1+\left[\frac{t^4}{4}-t^3+t^2\right]_0^3={}^{ア}\frac{13}{4}$

$$l=\int_0^3|t(t-1)(t-2)|dt$$

$$=\int_0^1 t(t-1)(t-2)dt-\int_1^2 t(t-1)(t-2)dt+\int_2^3 t(t-1)(t-2)dt$$

$F(t)=\int_0^t t(t-1)(t-2)dt=\frac{t^4}{4}-t^3+t^2$ とすると

$$l=F(1)-F(0)-\{F(2)-F(1)\}+F(3)-F(2)=-0+2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot 0+\frac{9}{4}={}^{イ}\frac{11}{4}$$

(2)　速度　$v=v_0+\int_0^t\frac{1}{1+t}dt=v_0+\Big[\log(1+t)\Big]_0^t=\log(1+t)+v_0$

位置　$\int_0^t\{\log(1+t)+v_0\}dt=\Big[(1+t)\log(1+t)-t+v_0t\Big]_0^t$

$$=(1+t)\log(1+t)+(v_0-1)t$$

30 (1)　x 軸上を動く 2 点 P，Q が同時に原点を出発して，t 秒後の速度はそれぞれ $\sin\pi t$，$2\sin\pi t$ (/s) である。

(ア)　$t=3$ における P の座標を求めよ。

(イ)　$t=0$ から $t=3$ までに P が動いた道のりを求めよ。

(ウ)　出発後初めて 2 点 P，Q が重なるのは何秒後か。また，このときまでの Q の道のりを求めよ。

(2)　x 軸上を動く点の加速度が時刻 t の関数 $6(2t^2-2t+1)$ であり，$t=0$ のとき点 1，速度 -1 である。$t=1$ のときの点の位置を求めよ。

解答　(1)　(ア)　$\frac{2}{\pi}$　　(イ)　$\frac{6}{\pi}$　　(ウ)　2 秒後，道のりは $\frac{8}{\pi}$　　(2)　2

解説

(1)　(ア)　$0+\int_0^3\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^3=-\frac{1}{\pi}(-1-1)=\frac{2}{\pi}$

(イ)　$0\leqq t\leqq 1$，$2\leqq t\leqq 3$ のとき　　$\sin\pi t\geqq 0$

$1\leqq t\leqq 2$ のとき　　$\sin\pi t\leqq 0$

したがって，求める道のりは

$$\int_0^3|\sin\pi t|dt=\int_0^1\sin\pi t\,dt+\int_1^2(-\sin\pi t)dt+\int_2^3\sin\pi t\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1+\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_1^2+\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_2^3$$

$$=-\frac{1}{\pi}(-1-1)+\frac{1}{\pi}(1+1)-\frac{1}{\pi}(-1-1)=\frac{6}{\pi}$$

(ウ)　$t\,(>0)$ 秒後に P，Q が重なるとすると

$\int_0^t\sin\pi t\,dt=\int_0^t 2\sin\pi t\,dt$　すなわち　$\int_0^t\sin\pi t\,dt=0$

ゆえに　$\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^t=0$　　よって　$\cos\pi t-1=0$

したがって　$\cos\pi t=1$　すなわち　$\pi t=2n\pi$（n は整数）

$t>0$ の範囲で $\pi t=2n\pi$ を満たす最小のものは，$n=1$ とすると $\pi t=2\pi$ から $t=2$

すなわち　2 秒後。また，Q の道のりは

$$\int_0^2|2\sin\pi t|dt=2\int_0^1\sin\pi t\,dt+2\int_1^2(-\sin\pi t)dt$$

$$=2\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1+2\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_1^2=\frac{8}{\pi}$$

(2)　速度：$v(t)=-1+\int_0^t 6(2t^2-2t+1)dt=4t^3-6t^2+6t-1$

位置：$x(t)=1+\int_0^t(4t^3-6t^2+6t-1)dt=t^4-2t^3+3t^2-t+1$

よって，$t=1$ のときの点の位置は　$x(1)=1-2+3-1+1=2$

31　時刻 t における動点 P の座標が $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ で与えられている。$t=1$ から $t=2$ までに P が動いた道のりを求めよ。

解答　$\sqrt{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$

解説

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t+e^{-t}(-\sin t)=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$$

よって　$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}(1+2\cos t\sin t)+e^{-2t}(1-2\cos t\sin t)$

$$=2e^{-2t}=(\sqrt{2}\,e^{-t})^2$$

求める道のりは　$\int_1^2\sqrt{2}\,e^{-t}dt=-\sqrt{2}\Big[e^{-t}\Big]_1^2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$

32　時刻 t における座標が次の式で与えられる点が動く道のりを求めよ。

(1)　$x=t^2$，$y=t^3$（$0\leqq t\leqq 1$）

(2)　$x=t^2-\sin t^2$，$y=1-\cos t^2$（$0\leqq t\leqq\sqrt{2\pi}$）

解答　(1)　$\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$　　(2)　8

解説

(1)　$\frac{dx}{dt}=2t$，$\frac{dy}{dt}=3t^2$　　道のりは，$t\geqq 0$ であるから

$$\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{t^2(9t^2+4)}\,dt=\int_0^1 t\sqrt{9t^2+4}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{9t^2+4}\cdot\frac{1}{18}(9t^2+4)'dt=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}(9t^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

(2)　$\frac{dx}{dt}=2t-2t\cos t^2=2t(1-\cos t^2)$，$\frac{dy}{dt}=2t\sin t^2$

道のりは，$t\geqq 0$ であるから

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\{4t^2(1-2\cos t^2+\cos^2 t^2)+4t^2\sin^2 t^2\}^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{2\pi}}\{8t^2(1-\cos t^2)\}^{\frac{1}{2}}dt=2\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2\pi}}t\sqrt{1-\cos t^2}\,dt$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2\pi}}t\sqrt{2\sin^2\frac{t^2}{2}}\,dt=4\int_0^{\sqrt{2\pi}}t\sin\frac{t^2}{2}dt$$

$$=4\left[-\cos\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2\pi}}=4\cdot 2=8$$

33　次の曲線の長さ L を求めよ。ただし，t，θ は媒介変数である。

(1)　$x=\frac{2}{3}t^3$，$y=t^2$　$(0\leqq t\leqq 1)$　　(2)　$x=3t^2$，$y=3t-t^3$　$(0\leqq t\leqq\sqrt{3})$

(3)　$x=e^{\theta}\cos\theta$，$y=e^{\theta}\sin\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

解答　(1)　$\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$　　(2)　$6\sqrt{3}$　　(3)　$\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

解説

(1)　$\frac{dx}{dt}=2t^2$，$\frac{dy}{dt}=2t$

よって　$L=\int_0^1\sqrt{(2t^2)^2+(2t)^2}\,dt=\int_0^1 2t\sqrt{t^2+1}\,dt=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(t^2+1)^3}\right]_0^1$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

(2)　$\frac{dx}{dt}=6t$，$\frac{dy}{dt}=3-3t^2$

よって　$L=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(6t)^2+(3-3t^2)^2}\,dt=3\int_0^{\sqrt{3}}(1+t^2)dt$

$$=3\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$$

(3)　$\frac{dx}{d\theta}=e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)$，$\frac{dy}{d\theta}=e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$

ゆえに　$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=e^{2\theta}(\cos\theta-\sin\theta)^2+e^{2\theta}(\sin\theta+\cos\theta)^2=2e^{2\theta}$

よって　$L=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}\Big[e^{\theta}\Big]_0^{\pi}=\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$

34 次の曲線の長さ L を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$ $(2\leqq x\leqq 3)$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

(3) $y=\log(1-x^2)$ $\left(0\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}\right)$

解答 (1) $\dfrac{51}{8}$　(2) $\dfrac{2}{3}\pi$　(3) $-\dfrac{1}{2}+\log 3$

解説

(1) $\dfrac{dy}{dx}=x^2-\dfrac{1}{4x^2}$ であるから　$1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(x^2-\dfrac{1}{4x^2}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)^2$

よって　$L=\displaystyle\int_2^3\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx=\int_2^3\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right]_2^3$

$=\left(9-\dfrac{1}{12}\right)-\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{51}{8}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ であるから　$1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\dfrac{x^2}{4-x^2}=\dfrac{4}{4-x^2}$

よって　$L=\displaystyle\int_{-1}^1\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

また，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

x	$-1\longrightarrow 1$
θ	$-\dfrac{\pi}{6}\longrightarrow\dfrac{\pi}{6}$

$L=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta$

$=2\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{3}\pi$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{1-x^2}$ であるから　$1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\dfrac{4x^2}{(1-x^2)^2}=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2$

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}>0$ であるから

$L=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$

$=\Big[-x-\log|1-x|+\log|1+x|\Big]_0^{\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2}+\log 3$

35 数直線上を運動する点 P の，時刻 t における速度 v が $t^2-2\sqrt{t}$ であるとする。$t=0$ から $t=4$ までに，P の位置はどれだけ変化するか。また，道のり l を求めよ。

解答 順に $\dfrac{32}{3}$，$\dfrac{40}{3}$

解説

位置の変化量を s とすると　$s=\displaystyle\int_0^4(t^2-2\sqrt{t})dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{32}{3}$

$0\leqq t\leqq\sqrt[3]{4}$ のとき　$|t^2-2\sqrt{t}|=-t^2+2\sqrt{t}$

$\sqrt[3]{4}\leqq t\leqq 4$ のとき　$|t^2-2\sqrt{t}|=t^2-2\sqrt{t}$

であるから　$l=\displaystyle\int_0^4|t^2-2\sqrt{t}|dt=\int_0^{\sqrt[3]{4}}(-t^2+2\sqrt{t})dt+\int_{\sqrt[3]{4}}^4(t^2-2\sqrt{t})dt$

$=\left[-\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt[3]{4}}+\left[\dfrac{t^3}{3}-\dfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt[3]{4}}^4=\dfrac{40}{3}$

36 点 P の座標 $(x,\ y)$ が，時刻 t の関数として次のように表されている。

$x=e^{\sqrt{3}t}\cos t$，$y=e^{\sqrt{3}t}\sin t$

時刻 t における P の速度を $\vec{v}$ とする。

(1) $|\vec{v}|$ を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=2\pi$ までに P が通過する道のり l を求めよ。

解答 (1) $2e^{\sqrt{3}t}$　(2) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(e^{2\sqrt{3}\pi}-1)$

解説

(1) $x=e^{\sqrt{3}t}\cos t$，$y=e^{\sqrt{3}t}\sin t$ から

$\dfrac{dx}{dt}=e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3}\cos t-\sin t)$，$\dfrac{dy}{dt}=e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3}\sin t+\cos t)$

よって　$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=2e^{\sqrt{3}t}$

(2) $l=\displaystyle\int_0^{2\pi}|\vec{v}|dt=\int_0^{2\pi}2e^{\sqrt{3}t}dt=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t}\right]_0^{2\pi}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(e^{2\sqrt{3}\pi}-1)$

37 t 秒後の速度が $v=30-10t$ (m/s) となるように地上から真上に投げ上げられた物体は，何秒後に何 m の高さまで上がって落ち始めるか。

解答 3 秒後，45 m

解説

物体が落ち始めるとき，運動の向きが変わるので $v=0$ となる。

$v=30-10t=10(3-t)$ より　$v=0$ のとき　$t=3$

ゆえに，3 秒後に落ち始める。

このときの物体の高さを h とすると

$h=\displaystyle\int_0^3|v|dt=\int_0^3(30-10t)dt=\Big[30t-5t^2\Big]_0^3=45$

よって，落ち始めるときの高さは 45 m

38 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度が $v=\sqrt{t}-t$ で与えられている。また，$t=0$ における P の座標は 1 である。

(1) $t=4$ のときの P の座標を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=4$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

解答 (1) $-\dfrac{5}{3}$　(2) 3

解説

(1) $t=4$ のときの P の座標は

$1+\displaystyle\int_0^4(\sqrt{t}-t)dt=1+\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{t^2}{2}\right]_0^4=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}$

(2) $\sqrt{t}-t=0$ とすると　$t=0,\ 1$

$0\leqq t\leqq 1$ のとき　$v\geqq 0$

$1\leqq t\leqq 4$ のとき　$v\leqq 0$

よって，求める道のりは

$s=\displaystyle\int_0^4|v|dt=\int_0^4|\sqrt{t}-t|dt$

$=\displaystyle\int_0^1(\sqrt{t}-t)dt-\int_1^4(\sqrt{t}-t)dt$

$=\left[\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1-\left[\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\dfrac{t^2}{2}\right]_1^4=3$

39 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=2t^2+1$，$y=t^3$ で表されるとき，$t=0$ から $t=1$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

解答 $\dfrac{61}{27}$

解説

$s=\displaystyle\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_0^1\sqrt{(4t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_0^1 t\sqrt{9t^2+16}\,dt$

$9t^2+16=u$ とおくと　$18tdt=du$

t	$0\longrightarrow 1$
u	$16\longrightarrow 25$

よって，求める道のりは

$s=\dfrac{1}{18}\displaystyle\int_{16}^{25}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{16}^{25}=\frac{61}{27}$

40 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=e^{\sqrt{3}t}\cos t$，$y=e^{\sqrt{3}t}\sin t$ で表されるとき，$t=0$ から $t=\pi$ までに P が通過する道のり s を求めよ。

解答 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(e^{\sqrt{3}\pi}-1)$

解説

$\dfrac{dx}{dt}=\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t}\cos t-e^{\sqrt{3}t}\sin t=e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3}\cos t-\sin t)$

$\dfrac{dy}{dt}=\sqrt{3}e^{\sqrt{3}t}\sin t+e^{\sqrt{3}t}\cos t=e^{\sqrt{3}t}(\sqrt{3}\sin t+\cos t)$

したがって

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{e^{2\sqrt{3}t}\cdot 4}=2e^{\sqrt{3}t}$

よって，求める道のりは

$s=\displaystyle\int_0^{\pi}2e^{\sqrt{3}t}dt=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t}\right]_0^{\pi}=\frac{2\sqrt{3}}{3}(e^{\sqrt{3}\pi}-1)$

41 数直線上を，原点から初速度 -1 で出発し，t 秒後の加速度が $\alpha=2\cos 2t+2\sin t-\cos t$ で与えられる運動をする点 P がある。

(1) 出発してから t 秒後の速度と位置を求めよ。

(2) 出発してから π 秒後までに通過する道のり s を求めよ。

解答 (1) 速度 $\sin 2t-2\cos t-\sin t+1$，位置 $-\dfrac{\cos 2t}{2}-2\sin t+\cos t+t-\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{\pi}{3}+2\sqrt{3}-\dfrac{5}{2}$

解説

t 秒後の速度を v，位置を x とする。

(1)　$v=\int(2\cos 2t+2\sin t-\cos t)dt$

$=\sin 2t-2\cos t-\sin t+C_1$

$t=0$ のとき，$v=-1$ であるから　$C_1=1$

よって　$v=\sin 2t-2\cos t-\sin t+1$

次に　$x=\int v\,dt=\int(\sin 2t-2\cos t-\sin t+1)dt$

$=-\dfrac{\cos 2t}{2}-2\sin t+\cos t+t+C_2$

$t=0$ のとき，$x=0$ であるから　$C_2=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$x=-\dfrac{\cos 2t}{2}-2\sin t+\cos t+t-\dfrac{1}{2}$

(2)　$v=2\sin t\cos t-2\cos t-\sin t+1$

$=2\cos t(\sin t-1)-(\sin t-1)$

$=(\sin t-1)(2\cos t-1)$

$0\leqq t\leqq\pi$ において，$\sin t-1\leqq 0$ であり，$2\cos t-1=0$ とすると　$t=\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$v\leqq 0$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq\pi$ のとき　$v\geqq 0$

よって，求める道のりは

$$s=\int_0^{\pi}|v|dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-v)dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}v\,dt$$

$$=\left[\frac{\cos 2t}{2}+2\sin t-\cos t-t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\frac{\cos 2t}{2}-2\sin t+\cos t+t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{3}+2\sqrt{3}-\frac{5}{2}$$

42 次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　$x=-3t$，$y=4t$　$(0\leqq t\leqq 2)$

(2)　$x=\sqrt{3}t^2-1$，$y=t^3-t$　$(0\leqq t\leqq\sqrt{3})$

(3)　$x=\cos 2t$，$y=2t+\sin 2t$　$\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$

(4)　$x=e^{\theta}\cos\theta$，$y=e^{\theta}\sin\theta$　$(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

解答　(1)　10　(2)　$4\sqrt{3}$　(3)　$2\sqrt{2}$　(4)　$\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$

解説

(1)　$L=\int_0^2\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^2\sqrt{(-3)^2+4^2}dt=5\int_0^2 dt=10$

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{3}t$，$\dfrac{dy}{dt}=3t^2-1$

ゆえに　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=(2\sqrt{3}t)^2+(3t^2-1)^2$

$=(3t^2-1)^2+12t^2=(3t^2+1)^2$

$3t^2+1>0$ であるから

$$L=\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2+1)dt=\left[t^3+t\right]_0^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

(3)　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin 2t$，$\dfrac{dy}{dt}=2+2\cos 2t$

ゆえに　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=(-2\sin 2t)^2+(2+2\cos 2t)^2$

$=8(1+\cos 2t)=16\cos^2 t$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\cos t>0$ であるから

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos t\,dt=4\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$$

(4)　$\dfrac{dx}{d\theta}=e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta=e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta=e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$

ゆえに　$\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$

$=\{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)\}^2+\{e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)\}^2=2e^{2\theta}$

$e^{\theta}>0$ であるから

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}\left[e^{\theta}\right]_0^{2\pi}=\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)$$

43 次の曲線の長さ L を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x^{\frac{3}{2}}$　$(0\leqq x\leqq 1)$　　(2)　$y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$　$(1\leqq x\leqq 2)$

解答　(1)　$\dfrac{14}{9}$　(2)　$\dfrac{59}{24}$

解説

(1)　$y'=\sqrt{3x}$ であるから　$1+y'^2=1+3x$

よって　$L=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+3x}\,dx$

$=\left[\dfrac{2}{9}(1+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\dfrac{14}{9}$

(2)　$y'=x^2-\dfrac{1}{4x^2}$ であるから

$1+y'^2=1+\left(x^2-\dfrac{1}{4x^2}\right)^2=x^4+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16x^4}$

$=\left(x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)^2$

$x^2+\dfrac{1}{4x^2}>0$ であるから

$L=\int_1^2\sqrt{1+y'^2}dx=\int_1^2\left(x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)dx$

$=\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{4x}\right]_1^2=\dfrac{59}{24}$

44 曲線 $4y^2=(1-x)^3$ の $x\geqq 0$ の部分の長さ L を求めよ。

解答　$\dfrac{61}{27}$

解説

曲線は x 軸に関して対称である。

$y^2\geqq 0$ であるから　$(1-x)^3\geqq 0$

したがって，定義域は　$x\leqq 1$

$y\geqq 0$ のとき　$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-x)^3}=\dfrac{1}{2}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

このとき，$y'=-\dfrac{3}{4}\sqrt{1-x}$ であるから

$1+y'^2=1+\dfrac{9}{16}(1-x)=\dfrac{25-9x}{16}$

曲線が x 軸に関して対称であることから

$L=2\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\sqrt{25-9x}\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{2}{3}(25-9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\dfrac{61}{27}$

45 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の $a\leqq x\leqq a+1$ の部分の長さを $L(a)$ とするとき，$L(a)$ の最小値を求めよ。

解答　$a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

解説

$y'=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

ゆえに　$1+y'^2=1+\dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\dfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$

$e^x+e^{-x}>0$ であるから

$L(a)=\int_a^{a+1}\sqrt{1+(y')^2}dx$

$=\dfrac{1}{2}\int_a^{a+1}(e^x+e^{-x})dx=\dfrac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_a^{a+1}$

$=\dfrac{1}{2}\{(e^{a+1}-e^a)-(e^{-a-1}-e^{-a})\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(e-1)e^a+(e-1)e^{-a-1}\}=\dfrac{e-1}{2}(e^a+e^{-a-1})$

$e^a>0$，$e^{-a-1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$L(a)\geqq\dfrac{e-1}{2}\cdot 2\sqrt{e^a\cdot e^{-a-1}}=\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

等号は，$e^a=e^{-a-1}$ すなわち $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき成り立つ。

したがって　$a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

46 数直線上を，原点を出発して t 秒後の加速度が $\alpha=\cos t+\cos 2t$ で与えられる運動をする点 P がある。出発してから 2π 秒後までに通過する道のり s を求めよ。ただし，初速度は 0 とする。

解答　4

解説

t 秒後の速度を v とすると　$v=\int(\cos t+\cos 2t)dt=\sin t+\dfrac{\sin 2t}{2}+C$

初速度が 0 であるから，$t=0$ のとき　$v=0$　　よって　$C=0$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ で $\sin t+\dfrac{\sin 2t}{2}=0$ とすると，$\sin t(1+\cos t)=0$ から　$t=0$　π，2π

$0\leqq t\leqq\pi$ のとき　$v\geqq 0$，　$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき　$v\leqq 0$ であるから

$$s=\int_0^{2\pi}|v|dt=\int_0^{\pi}\left(\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right)dt+\int_{\pi}^{2\pi}\left\{-\left(\sin t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right\}dt$$

$$=\left[-\cos t-\frac{\cos 2t}{4}\right]_0^{\pi}+\left[\cos t+\frac{\cos 2t}{4}\right]_{\pi}^{2\pi}=4$$

$\boxed{47}$ 曲線 $x=t^2$，$y=t^3$ $(0\leqq t\leqq\sqrt{5})$ の長さ L を求めよ。

解答 $\dfrac{335}{27}$

解説

$$L=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{4t^2+9t^4}\,dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}}t\sqrt{4+9t^2}\,dt$$

$4+9t^2=u$ とおくと　$18tdt=du$

t	$0\longrightarrow\sqrt{5}$
u	$4\longrightarrow 49$

よって　$L=\dfrac{1}{18}\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{4+9t^2}\cdot 18tdt=\dfrac{1}{18}\int_4^{49}\sqrt{u}\,du$

$$=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{49}=\frac{1}{18}\cdot\frac{2}{3}\left\{(7^2)^{\frac{3}{2}}-(2^2)^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{335}{27}$$