最大最小クイズ

1 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$$y=x+\sqrt{4-x^2}$$

解答　$x=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$，$x=-2$ で最小値 -2

解説

この関数の定義域は，$4-x^2\geqq 0$ より $-2\leqq x\leqq 2$ である。

$-2<x<2$ では　$y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$

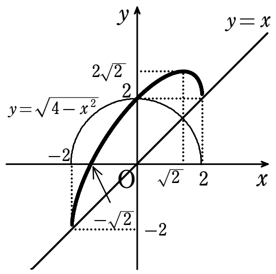
$y'=0$ とすると　$\sqrt{4-x^2}=x$　……①

① の両辺を 2 乗すると　$4-x^2=x^2$　　よって　$x^2=2$

① より $x\geqq 0$ であるから　$x=\sqrt{2}$

ゆえに，$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-2	……	$\sqrt{2}$	……	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	極大 $2\sqrt{2}$	↘	2



よって，y は

$x=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$

$x=-2$ で最小値 -2

をとる。

2 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=x\sqrt{4-x^2}$　　　　(2)　$y=x\sin x+\cos x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

解答　(1)　$x=\sqrt{2}$ で最大値 2，$x=-\sqrt{2}$ で最小値 -2

(2)　$x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}\pi$

解説

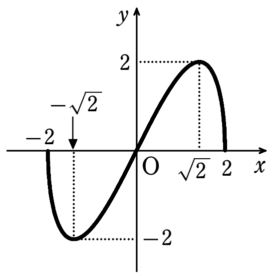
(1)　この関数の定義域は，$4-x^2\geqq 0$ より，

$-2\leqq x\leqq 2$ である。

$-2<x<2$ では

$$y'=\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$=\frac{(4-x^2)-x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$



$y'=0$ とすると　$2-x^2=0$

ゆえに　$x=\pm\sqrt{2}$

よって，$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-2	……	$-\sqrt{2}$	……	$\sqrt{2}$	……	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘	0

ゆえに，y は $x=\sqrt{2}$ で最大値 2，$x=-\sqrt{2}$ で最小値 -2 をとる。

(2)　$0<x<2\pi$ では

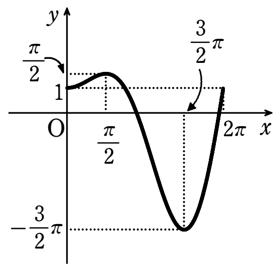
$$y'=(\sin x+x\cos x)-\sin x$$

$$=x\cos x$$

$y'=0$ とすると　$\cos x=0$

ゆえに　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。



x	0	……	$\dfrac{\pi}{2}$	……	$\dfrac{3}{2}\pi$	……	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\dfrac{\pi}{2}$	↘	極小 $-\dfrac{3}{2}\pi$	↗	1

ゆえに，y は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 $-\dfrac{3}{2}\pi$ をとる。

3 AB＝AC，∠BAC＝2θ である二等辺三角形 ABC が，半径 1 の円 O に内接している。θ が変化するとき，この三角形の周の長さの最大値とそのときの θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で 最大値 $3\sqrt{3}$

解説

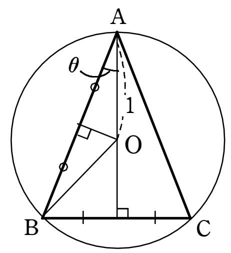
△ABC において

AB＝AC＝2OA$\cos\theta$＝$2\cos\theta$

BC＝2AB$\sin\theta$＝$4\cos\theta\sin\theta$

△ABC の周の長さを y とすると

$$y=4\cos\theta+4\cos\theta\sin\theta\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$



よって

$$y'=-4\sin\theta+4(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$

$$=-4\sin\theta+4(1-2\sin^2\theta)$$

$$=-4(2\sin^2\theta+\sin\theta-1)$$

$$=-4(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，　$y'=0$ となるのは $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときである。

また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，常に $\sin\theta+1>0$ であるから，y の増減表は次のようになる。

θ	0	……	$\dfrac{\pi}{6}$	……	$\dfrac{\pi}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大 $3\sqrt{3}$	↘	

したがって，y は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ で 最大値 $3\sqrt{3}$ をとる。

4 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{\log x}{x^2}$　$(1\leqq x\leqq 3)$　　　　(2)　$y=(1-2x)e^{-2x}$　$(0\leqq x\leqq 3)$

解答　(1)　$x=\sqrt{e}$ で最大値 $\dfrac{1}{2e}$，$x=1$ で最小値 0

(2)　$x=0$ で最大値 1，$x=1$ で最小値 $-\dfrac{1}{e^2}$

解説

(1)　$y'=-\dfrac{2}{x^3}\log x+\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

$y'=0$ とすると　$1-2\log x=0$

よって　$x=\sqrt{e}$

ゆえに，$1\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は次のようになる。

x	1	……	$\sqrt{e}$	……	3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大 $\dfrac{1}{2e}$	↘	$\dfrac{1}{9}\log 3$

したがって，y は $x=\sqrt{e}$ で最大値 $\dfrac{1}{2e}$，$x=1$ で最小値 0 をとる。

(2)　$y'=-2e^{-2x}-2(1-2x)e^{-2x}=4(x-1)e^{-2x}$

$y'=0$ とすると　$x-1=0$

よって　$x=1$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	……	1	……	3
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	極小 $-\dfrac{1}{e^2}$	↗	$-\dfrac{5}{e^6}$

したがって，y は $x=0$ で最大値 1，$x=1$ で最小値 $-\dfrac{1}{e^2}$ をとる。

5 放物線 $y=x^2+3$ 上の点 P$(t,\ t^2+3)$ における接線が，x 軸と交わる点を Q，P から x 軸に下ろした垂線を PR とする。$t>0$ のとき，△PQR の面積の最小値を求めよ。

解答　$t=1$ で最小値 4

解説

$y=x^2+3$ から　$y'=2x$

よって，点 P における接線の方程式は

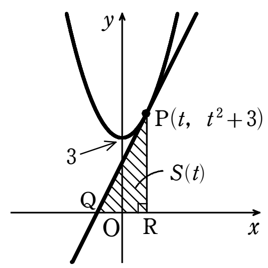
$y-(t^2+3)=2t(x-t)$

すなわち　$y=2tx-t^2+3$

$y=0$ とすると，$t\neq 0$ より　$x=\dfrac{t^2-3}{2t}$

よって　QR$=t-\dfrac{t^2-3}{2t}=\dfrac{t^2+3}{2t}$

△PQR の面積を $S(t)$ とおくと



$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{PR}=\frac{(t^2+3)^2}{4t}$$

$$S'(t)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2(t^2+3)\cdot 2t\cdot t-(t^2+3)^2\cdot 1}{t^2}=\frac{3(t^2+3)(t+1)(t-1)}{4t^2}$$

$t>0$ において，$S'(t)=0$ となるのは $t=1$ のときである。

よって，$t>0$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	……	1	……
$S'(t)$		$-$	0	$+$
$S(t)$		↘	極小 4	↗

したがって，△PQR の面積は $t=1$ で最小値 4 をとる。

6 次の関数の最大値と最小値を求めよ。[各 25 点]

(1) $y=x\log 2x$　(2) $y=2x+e^{-x}$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

解答 (1) この関数の定義域は，$x>0$ である。

$$y'=1\cdot\log 2x+x\cdot\frac{2}{2x}=\log 2x+1$$

$y'=0$ とすると　$x=\frac{1}{2e}$

よって，$x>0$ における y の増減表は右のようになる。

x	0	……	$\frac{1}{2e}$	……
y'		$-$	0	$+$
y		↘	極小 $-\frac{1}{2e}$	↗

また　$\lim_{x\to\infty} y=\infty$

したがって，y は $x=\frac{1}{2e}$ で最小値 $-\frac{1}{2e}$ をとる。

また，最大値はない。

(2) $y'=2-e^{-x}$

$-1<x<2$ で $y'=0$ とすると　$x=-\log 2$

よって，$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は右のようになる。

x	-1	……	$-\log 2$	……	2
y'		$-$	0	$+$	
y	$e-2$	↘	極小 $2-2\log 2$	↗	$4+\frac{1}{e^2}$

$2<e<3$ であるから

$0<e-2<1$,

$4<4+\frac{1}{e^2}$

ゆえに　$e-2<4+\frac{1}{e^2}$

したがって，y は

$x=2$ で最大値 $4+\frac{1}{e^2}$，$x=-\log 2$ で最小値 $2-2\log 2$

をとる。

解説

(1) この関数の定義域は，$x>0$ である。

$$y'=1\cdot\log 2x+x\cdot\frac{2}{2x}=\log 2x+1$$

$y'=0$ とすると　$x=\frac{1}{2e}$

よって，$x>0$ における y の増減表は右のようになる。

x	0	……	$\frac{1}{2e}$	……
y'		$-$	0	$+$
y		↘	極小 $-\frac{1}{2e}$	↗

また　$\lim_{x\to\infty} y=\infty$

したがって，y は $x=\frac{1}{2e}$ で最小値 $-\frac{1}{2e}$ をとる。

また，最大値はない。

(2) $y'=2-e^{-x}$

$-1<x<2$ で $y'=0$ とすると　$x=-\log 2$

よって，$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は右のようになる。

x	-1	……	$-\log 2$	……	2
y'		$-$	0	$+$	
y	$e-2$	↘	極小 $2-2\log 2$	↗	$4+\frac{1}{e^2}$

$2<e<3$ であるから

$0<e-2<1$,

$4<4+\frac{1}{e^2}$

ゆえに　$e-2<4+\frac{1}{e^2}$

したがって，y は

$x=2$ で最大値 $4+\frac{1}{e^2}$，$x=-\log 2$ で最小値 $2-2\log 2$

をとる。

7 次の関数の最大値，最小値およびそのときの x の値を求めよ。

$$f(x)=\sin^2 x\sin 2x\quad(0\leqq x\leqq\pi)$$

解答 $x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$，$x=\frac{2}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

解説

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\sin x\cos x\sin 2x+\sin^2 x\cdot 2\cos 2x\\&=4\sin^2 x(1-\sin^2 x)+2\sin^2 x(1-2\sin^2 x)\\&=-2\sin^2 x(4\sin^2 x-3)\\&=-2\sin^2 x(2\sin x+\sqrt{3})(2\sin x-\sqrt{3})\end{aligned}$$

また，$0\leqq x\leqq\pi$ から　$0\leqq\sin x\leqq 1$

よって，$f'(x)=0$ とすると

$\sin x=0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0<x<\pi$ の範囲で解くと

$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↗	0

よって　$x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$，$x=\frac{2}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

8 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=\cos^3 x+3\cos x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$　(2) $y=(x^2-1)e^x$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(3) $y=\frac{\log x}{x}$　$(1\leqq x\leqq 3)$　(4) $y=x-2+\sqrt{4-x^2}$

解答 (1) $x=0,\ 2\pi$ で最大値 4；$x=\pi$ で最小値 -4

(2) $x=2$ で最大値 $3e^2$，$x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$

(3) $x=e$ で最大値 e^{-1}，$x=1$ で最小値 0

(4) $x=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}-2$，$x=-2$ で最小値 -4

解説

(1) $y'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)-3\sin x=-3\sin x(\cos^2 x+1)$

$y'=0$ とすると，$\cos^2 x+1>0$ であるから　$\sin x=0$

$0<x<2\pi$ の範囲で解くと

$x=\pi$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は右のようになる。

x	0	…	π	…	2π
y'		$-$	0	$+$	
y	4	↘	極小 -4	↗	4

よって，y は

$x=0,\ 2\pi$ で最大値 4,

$x=\pi$ で最小値 -4 をとる。

(2) $y'=2xe^x+(x^2-1)e^x=(x^2+2x-1)e^x$

$y'=0$ とすると　$x^2+2x-1=0$

$-1<x<2$ の範囲で解くと　$x=-1+\sqrt{2}$

$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-1	…	$\sqrt{2}-1$	…	2
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	極小 $2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$	↗	$3e^2$

よって，y は $x=2$ で最大値 $3e^2$,

$x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$ をとる。

(3) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$y'=0$ とすると　$x=e$

$1\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は右のようになる。

x	1	…	e	…	3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大 e^{-1}	↘	$\frac{\log 3}{3}$

よって，y は

$x=e$ で最大値 e^{-1}，$x=1$ で最小値 0 をとる。

(4) 関数 $y=x-2+\sqrt{4-x^2}$ の定義域は，$4-x^2\geqq 0$ から　$-2\leqq x\leqq 2$ …… ①

$-2<x<2$ のとき　$y'=1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0$ とすると　$\sqrt{4-x^2}=x$ …… ②

② の両辺を 2 乗すると　$4-x^2=x^2$　よって　$x^2=2$

② より，$x\geqq 0$ であるから　$x=\sqrt{2}$

① における y の増減表は右のようになる。

x	-2	…	$\sqrt{2}$	…	2
y'		$+$	0	$-$	
y	-4	↗	極大 $2\sqrt{2}-2$	↘	0

したがって，y は

$x=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}-2$,

$x=-2$ で最小値 -4 をとる。

9 関数 $y=(3x-2x^2)e^{-x}$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ。ただし，必要ならば $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$ を用いてもよい。

解答 $x=\frac{1}{2}$ で最大値 $e^{-\frac{1}{2}}$，最小値はない

解説

$$\begin{aligned}y'&=(3-4x)e^{-x}+(3x-2x^2)(-e^{-x})=(2x^2-7x+3)e^{-x}\\&=(2x-1)(x-3)e^{-x}\end{aligned}$$

$y'=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{2},\ 3$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 $e^{-\frac{1}{2}}$	↘	極小 $-9e^{-3}$	↗

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3x-2x^2)e^{-x}=0$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3x-2x^2)e^{-x}$ について，

$x=-t$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty}(3x-2x^2)e^{-x}=\lim_{t\to\infty}(-3t-2t^2)e^{t}=-\infty$$

よって　$x=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $e^{-\frac{1}{2}}$，最小値はない。

10 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=(x^2+x-1)e^{-x}$　　(2)　$y=\dfrac{1-x}{x^2+2}$

(3)　$y=\dfrac{\tan x}{\tan^2 x+3}$ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$　　(4)　$y=x\log\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$

解答　(1)　$x=-1$ で最小値 $-e$，最大値はない

(2)　$x=1-\sqrt{3}$ で最大値 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，$x=1+\sqrt{3}$ で最小値 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$

(3)　$x=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$x=0$ で最小値 0

(4)　$x=e^{-1}$ で最大値 e^{-1}，最小値はない

解説

(1)　$y'=(2x+1)e^{-x}+(x^2+x-1)\cdot(-e^{-x})$

$\quad=-(x^2-x-2)e^{-x}=-(x+1)(x-2)e^{-x}$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-e$	↗	極大 $5e^{-2}$	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=0$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=\infty$

よって，y は $x=-1$ で最小値 $-e$ をとる。最大値はない。

(2)　$y'=\dfrac{-1\cdot(x^2+2)-(1-x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$

$y'=0$ とすると　$x^2-2x-2=0$　　これを解くと　$x=1\pm\sqrt{3}$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	↘	極小 $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$	↗

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=0,\ \lim_{x\to\infty}y=0$

よって，y は $x=1-\sqrt{3}$ で最大値 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，

$x=1+\sqrt{3}$ で最小値 $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ をとる。

(3)　$\tan x=t$ とおくと　$y=\dfrac{t}{t^2+3}$

また，$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$t\geqq 0$

$y'=\dfrac{t^2+3-t\cdot 2t}{(t^2+3)^2}=\dfrac{-(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}{(t^2+3)^2}$

$y'=0$ とすると　$t=\sqrt{3}$

$t\geqq 0$ における y の増減表は，右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y	0	↗	極大 $\frac{\sqrt{3}}{6}$	↘

また　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{t^2+3}=0$

よって，y は $t=\sqrt{3}$ すなわち $x=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

$t=0$ すなわち $x=0$ で最小値 0 をとる。

(4)　$y=x\log\dfrac{1}{x}=x\log x^{-1}=-x\log x$ から

$y'=-1\cdot\log x-x\cdot\dfrac{1}{x}=-(\log x+1)$

$y'=0$ とすると　$x=e^{-1}$

$x>0$ における y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		↗	極大 e^{-1}	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=-\infty$

よって，y は $x=e^{-1}$ で最大値 e^{-1} をとる。最小値はない。

11 a，b は定数で，$a>0$ とする。関数 $f(x)=\dfrac{x-b}{x^2+a}$ の最大値が $\dfrac{1}{6}$，最小値が $-\dfrac{1}{2}$ であるとき，a，b の値を求めよ。

解答　$a=3$，$b=1$

解説

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+a)-(x-b)\cdot 2x}{(x^2+a)^2}=-\frac{x^2-2bx-a}{(x^2+a)^2}$$

$a>0$ であるから　$(x^2+a)^2>0$

$f'(x)=0$ とすると　$x^2-2bx-a=0$ ……①

① の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(-b)^2-1\cdot(-a)=a+b^2$

$a>0$ であるから　$D>0$

よって，① は異なる 2 つの実数解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもち，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=2b,\quad \alpha\beta=-a$ ……②

増減表と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0$ から，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$f(x)$ は　$x=\alpha$ で最小値 $f(\alpha)$

$x=\beta$ で最大値 $f(\beta)$

をとる。

ゆえに，条件から

$$\frac{\alpha-b}{\alpha^2+a}=-\frac{1}{2},\quad \frac{\beta-b}{\beta^2+a}=\frac{1}{6}$$

したがって　$2\alpha-2b=-\alpha^2-a,\quad 6\beta-6b=\beta^2+a$

② により，a，b を消去すると

$2\alpha-(\alpha+\beta)=-\alpha^2+\alpha\beta,\quad 6\beta-3(\alpha+\beta)=\beta^2-\alpha\beta$

整理すると　$(\alpha+1)\beta-\alpha^2-\alpha=0,\quad (\beta-3)\alpha-\beta^2+3\beta=0$

よって　$(\beta-\alpha)(\alpha+1)=0,\quad (\alpha-\beta)(\beta-3)=0$

$\alpha\neq\beta$ であるから　$\alpha=-1,\ \beta=3$

ゆえに，② から　$a=3,\ b=1$

12 (1)　関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ が $x=2$ で最大値 1 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(2)　a を正定数とする。関数 $y=a(x-\sin 2x)$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$ の最大値が 2 であるような a の値を求めよ。

解答　(1)　$a=5$，$b=-3$　　(2)　$a=\dfrac{12}{5\pi+3\sqrt{3}}$

解説

(1)　$f(2)=1$ から　$\dfrac{2a+b}{7}=1$　　よって　$2a+b=7$ ……①

$$f'(x)=\frac{a(x^2+x+1)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{ax^2+2bx-a+b}{(x^2+x+1)^2}$$

$f(x)$ は常に微分可能であるから，$x=2$ で最大値をとるための条件は　$f'(2)=0$

ゆえに　$3a+5b=0$ ……②

①，② を解くと　$a=5,\ b=-3$

逆に，このとき

$f(x)=\dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$，

$f'(x)=-\dfrac{(5x+4)(x-2)}{(x^2+x+1)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-\dfrac{4}{5},\ 2$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{4}{5}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大 1	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

したがって，確かに $f(x)$ は $x=2$ で最大値 1 をとる。

よって　$a=5,\ b=-3$

(2)　$f(x)=x-\sin 2x$ とすると　$f(-x)=-f(x)$

よって，$f(x)$ は奇関数であるから，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値，最小値を調べる。

$$f'(x)=1-2\cos 2x$$

$f'(x)=0$ とすると　$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$0<x<\pi$ の範囲で解くと　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	極小 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	極大 $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	π

ゆえに，$0\leqq x\leqq\pi$ において

$f(x)$ は，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最小値 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

ここで，$\left|\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|>\left|\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|$ であるから，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ で

$$-\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\leqq f(x)\leqq\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$a>0$ より　yの最大値は $a\left(\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるから　$a\left(\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2$

よって　$a=\dfrac{12}{5\pi+3\sqrt{3}}$

これは $a>0$ を満たす。

13 $x+y+z=\pi$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき

$$\sin x\sin y\sin z$$

の最大値と，その最大値を与える x，y，z の値を求めよ。

解答　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

解説

$z=\pi-(x+y)$ であるから

$\sin x\sin y\sin z=\sin x\sin y\sin(x+y)$，$x+y<\pi$，$x>0$，$y>0$

まず，y を定数とみて，$\sin x\sin y\sin(x+y)$ の最大値を求める。

そこで，$f(x)=\sin y\sin x\sin(x+y)$ $(0<x<\pi-y)$ とすると

$$f'(x)=\sin y\{\cos x\sin(x+y)+\sin x\cos(x+y)\}$$
$$=\sin y\sin(2x+y)$$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin(2x+y)=0$

$0<2x+y<2\pi-y<2\pi$ であるから，

$\sin(2x+y)=0$ となるのは $2x+y=\pi$

すなわち $x=\dfrac{\pi-y}{2}$ のときである。

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-y}{2}$	$\cdots$	$\pi-y$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

したがって，y のある値に対する $f(x)$ の最大値は

$$f\left(\frac{\pi-y}{2}\right)=\sin y\cos^2\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\sin y(1+\cos y)$$

次に，$g(y)=\dfrac{1}{2}\sin y(1+\cos y)$ とすると

$$2g'(y)=\cos y(1+\cos y)-\sin^2 y=2\cos^2 y+\cos y-1$$
$$=(\cos y+1)(2\cos y-1)$$

$g'(y)=0$ とすると，$2\cos y-1=0$ より　$\cos y=\dfrac{1}{2}$

$0<y<\pi$ において $\cos y=\dfrac{1}{2}$ となるのは $y=\dfrac{\pi}{3}$ のときである。

よって，$g(y)$ の増減表は右のようになり，最大値は

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

y	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
$g(y)$		↗	極大	↘	

このときの x，z の値は

$$x=\frac{\pi-y}{2}=\frac{\pi}{3},\quad z=\pi-(x+y)=\frac{\pi}{3}$$

ゆえに　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

14 $x+y+z=\pi$，$x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき，次の式の最大値を求めよ。

(1)　$\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$　　(2)　$\sin x+\sin y+\sin z$

(3)　$\cos x+\cos y+\cos z$　　(4)　$\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{z}{2}$

解答　(1)　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(3)　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$

(4)　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{1}{8}$

解説

$x+y+z=\pi$ から　$z=\pi-(x+y)$

(1)　$\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=\sin 2x+\sin 2y-\sin 2(x+y)$

y を定数とみて，$f(x)=\sin 2x+\sin 2y-\sin 2(x+y)$ $(0<x<\pi-y)$ とすると

$$f'(x)=2\{\cos 2x-\cos 2(x+y)\}=4\sin(2x+y)\sin y$$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin(2x+y)=0$

$0<2x+y<2\pi-y<2\pi$ であるから，$\sin(2x+y)=0$ となるのは $2x+y=\pi$ すなわち

$x=\dfrac{\pi-y}{2}$ のときである。

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，y のある値に対する $f(x)$ の最大値は

$$f\left(\frac{\pi-y}{2}\right)=\sin y+\sin 2y-\sin(\pi+y)$$
$$=\sin 2y+2\sin y$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-y}{2}$	$\cdots$	$\pi-y$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$g(y)=\sin 2y+2\sin y$ $(0<y<\pi)$ とすると

$$g'(y)=2\cos 2y+2\cos y=2(2\cos^2 y-1+\cos y)$$
$$=2(\cos y+1)(2\cos y-1)$$

$g'(y)=0$ とすると　$\cos y=\dfrac{1}{2}$

$0<y<\pi$ の範囲で解くと　$y=\dfrac{\pi}{3}$

$g(y)$ の増減表は右のようになり，最大値は

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

y	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
$g(y)$		↗	極大	↘	

このとき　$x=\dfrac{\pi-y}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，$z=\pi-(x+y)=\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

■(2)～(4) は，(1) の解答と似ている部分が多いので，略解で示す。
各自で足りない部分を補って，完全な解答にしてほしい。

(2)　y を定数とみて，$f(x)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ とすると

$$f'(x)=\cos x+\cos(x+y)=2\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)\cos\frac{y}{2}$$

$f(x)$ は $x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大となる。

したがって，y のある値に対する $f(x)$ の最大値は

$f\left(\dfrac{\pi-y}{2}\right)=\sin y+2\cos\dfrac{y}{2}$　　これを $g(y)$ とする。

$$g'(y)=\cos y-\sin\frac{y}{2}=\left(1+\sin\frac{y}{2}\right)\left(1-2\sin\frac{y}{2}\right)$$

$g(y)$ は $y=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大で　$g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(3)　y を定数とみて，$f(x)=\cos x+\cos y-\cos(x+y)$ とすると

$$f'(x)=-\sin x+\sin(x+y)=2\sin\frac{y}{2}\cos\left(x+\frac{y}{2}\right)$$

$f(x)$ は $x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大となる。

$f\left(\dfrac{\pi-y}{2}\right)=\cos y+2\sin\dfrac{y}{2}$　　これを $g(y)$ とする。

$$g'(y)=-\sin y+\cos\frac{y}{2}=\cos\frac{y}{2}\left(1-2\sin\frac{y}{2}\right)$$

$g(y)$ は $y=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大で　$g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$

ゆえに　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$

(4)　$\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\sin\dfrac{z}{2}=\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{y}{2}\left\{\sin\left(x+\dfrac{y}{2}\right)-\sin\dfrac{y}{2}\right\}$

y を定数とみて，これを $f(x)$ とすると，$\sin\dfrac{y}{2}>0$ であるから $f(x)$ は $x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大となる。

$f\left(\dfrac{\pi-y}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{y}{2}\left(1-\sin\dfrac{y}{2}\right)$　　これを $g(y)$ とする。

$g(y)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}\left(\sin\dfrac{y}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2$ であるから，$\sin\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2}$ すなわち $y=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大で

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{8}$$

ゆえに　$x=y=z=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\dfrac{1}{8}$

15 (1)　k を実数の定数とする。実数 x，y が $x+2y=k$ を満たすとき，x^2+2y^2 の最小値を求めよ。

(2)　2 変数関数 $f(x,\ y)=\dfrac{x+2y+3}{x^2+2y^2+3}$ の最大値を求めよ。

解答　(1)　$x=y=\dfrac{k}{3}$ のとき $\dfrac{k^2}{3}$　　(2)　$x=y=\sqrt{2}-1$ のとき $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

解説

(1)　$x+2y=k$ から　$x=k-2y$　……①

よって　$x^2+2y^2=(k-2y)^2+2y^2=6y^2-4ky+k^2=6\left(y-\dfrac{k}{3}\right)^2+\dfrac{k^2}{3}$

また，$x+2y=k$ を満たす y は任意の実数値をとりうる。

したがって，x^2+2y^2 は $y=\dfrac{k}{3}$ で最小値 $\dfrac{k^2}{3}$ をとる。

このとき，① から　$x=\dfrac{k}{3}$

ゆえに，求める最小値は，$x=y=\dfrac{k}{3}$ のとき　$\dfrac{k^2}{3}$

(2)　$f(x,\ y)$ の最大値を求めるから，$x+2y+3>0$ の場合を考えればよい。

$x+2y=k$ とおくと　$k+3>0$　すなわち　$k>-3$ ……②

また　$f(x,\ y)=\dfrac{x+2y+3}{x^2+2y^2+3}=\dfrac{k+3}{6\left(y-\dfrac{k}{3}\right)^2+\dfrac{k^2}{3}+3}$

k を定数とみると，$f(x,\ y)$ が最大となるのは分母が最小のとき，すなわち (1) の結果から $x=y=\dfrac{k}{3}$ のときである。

このとき　$f(x,\ y)=\dfrac{k+3}{\dfrac{k^2}{3}+3}=\dfrac{3(k+3)}{k^2+9}$

これを $g(k)$ とすると，求める最大値は，k が ② の範囲で変化するときの $g(k)$ の最大値である。

$$g'(k)=\frac{3\{1\cdot(k^2+9)-(k+3)\cdot 2k\}}{(k^2+9)^2}=\frac{-3(k^2+6k-9)}{(k^2+9)^2}$$

$g'(k)=0$ とすると，② の範囲で

$k=3(\sqrt{2}-1)$

$g(k)$ の増減表は右のようになる。

k	-3	$\cdots$	$3(\sqrt{2}-1)$	$\cdots$
$g'(k)$		$+$	0	$-$
$g(k)$		↗	極大	↘

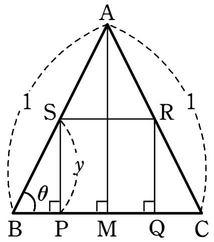
よって，求める最大値は $x=y=\sqrt{2}-1$ のとき

$$g(3(\sqrt{2}-1))=\frac{3\cdot 3\sqrt{2}}{9(\sqrt{2}-1)^2+9}=\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

16 △ABC は AB＝AC＝1 の二等辺三角形である。更に，正方形 PQRS は辺 PQ が BC 上にあり，頂点 R，S がそれぞれ AC，AB 上にある。∠B＝θ とする。正方形 PQRS の 1 辺の長さ y が最大になるような BC の長さを求めよ。

解答　$\mathrm{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}$

解説



$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。辺 BC の中点を M とすると

$\mathrm{BM}=\cos\theta$，$\mathrm{BP}=\cos\theta-\dfrac{y}{2}$，$\mathrm{SP}=y$，$\mathrm{AM}=\sin\theta$

BP：SP＝BM：AM から

$$\left(\cos\theta-\frac{y}{2}\right):y=\cos\theta:\sin\theta$$

よって　$2y\cos\theta=(2\cos\theta-y)\sin\theta$

ゆえに　$(\sin\theta+2\cos\theta)y=2\sin\theta\cos\theta$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta+2\cos\theta\neq 0$ であるから　$y=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}$

よって　$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{2\{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\sin\theta+2\cos\theta)-\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-2\sin\theta)\}}{(\sin\theta+2\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{2(2\cos^3\theta-\sin^3\theta)}{(\sin\theta+2\cos\theta)^2}=\frac{2\cos^3\theta(2-\tan^3\theta)}{(\sin\theta+2\cos\theta)^2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると　$2-\tan^3\theta=0$　すなわち　$\tan^3\theta-2=0$

ゆえに　$(\tan\theta-\sqrt[3]{2})\{\tan^2\theta+\sqrt[3]{2}\tan\theta+(\sqrt[3]{2})^2\}=0$

よって　$\tan\theta=\sqrt[3]{2}$

この式を満たす θ を $\theta=\alpha$ とすると，y の増減表は右のようになる。

θ	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		＋	0	−	
y		↗	極大	↘	

したがって，$\theta=\alpha$ で y は最大となる。このとき

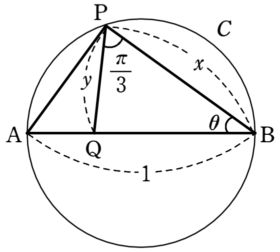
$$\mathrm{BC}=2\mathrm{BM}=2\cos\alpha=2\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$$

$$=2\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}}=\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}$$

17 長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。線分 AB 上の点 Q を $\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。点 P が 2 点 A，B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x の値を求めよ。

解答　$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$

解説



$\angle\mathrm{ABP}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。

△BPQ において，正弦定理により

$$\frac{y}{\sin\theta}=\frac{x}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}$$

よって　$$y=\frac{x\sin\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}=\frac{2}{\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}}$$

$f(\theta)=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$ とすると，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において $f(\theta)>0$ であるから，$f(\theta)$ が最小となるとき y は最大となる。

$$f'(\theta)=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^3\theta-\sqrt{3}\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(\tan^3\theta-\sqrt{3})$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\theta)=0$ とすると　$\tan\theta=\sqrt[6]{3}$

これを満たす θ を α とすると，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $f(\theta)$ の増減表は右のようになる。

θ	0	…	α	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		−	0	＋	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

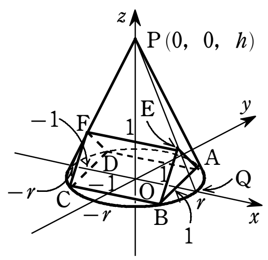
よって，$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となり，y は最大となる。

このとき　$$x=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$$

18 座標空間の点 A(1，1，0)，B(1，−1，0)，C(−1，−1，0)，D(−1，1，0)，E(1，0，1)，F(−1，0，1) を頂点とする三角柱を含み，原点を中心とする xy 平面上の円を底面とする直円錐を考える。このような直円錐の体積の最小値と，そのときの底面の半径 r を求めよ。

解答　$r=\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{9}{4}\pi$

解説



直円錐の頂点を P(0，0，h)，底面の円と x 軸の正の部分との交点を Q(r，0，0) とする。

正方形 ABCD が底面に含まれるための条件は

$r\geqq\sqrt{2}$

線分 PQ が点 E(1，0，1) を通るとき

$h:r=1:(r-1)$

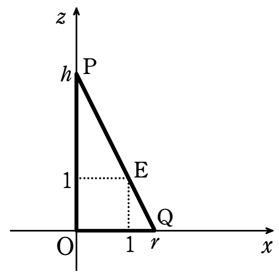
ゆえに　$h=\dfrac{r}{r-1}$

よって，直円錐の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^3}{r-1}$$

ゆえに　$$\frac{dV}{dr}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{3r^2(r-1)-r^3}{(r-1)^2}$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^2(2r-3)}{(r-1)^2}$$



$r>\sqrt{2}$ において，$\dfrac{dV}{dr}=0$ とすると

$r=\dfrac{3}{2}$

$r\geqq\sqrt{2}$ における V の増減表は右のようになり，V は $r=\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $V=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{9}{4}\pi$ をとる。

r	$\sqrt{2}$	…	$\frac{3}{2}$	…
$\frac{dV}{dr}$		−	0	＋
V		↘	極小	↗

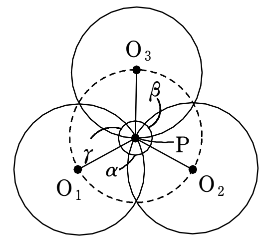
19 平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件 (a) と (b) を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a)　3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b)　3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。

解答　$2\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解説



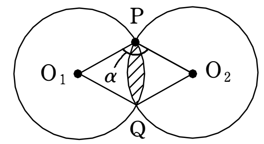
右の図のように，3 個の円板の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_3}$ とし，$\angle\mathrm{O_1PO_2}=\alpha$，$\angle\mathrm{O_2PO_3}=\beta$，$\angle\mathrm{O_3PO_1}=\gamma$ とすると

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$

ただし，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$0\leqq\beta\leqq\pi$，$0\leqq\gamma\leqq\pi$

ここで，円 $\mathrm{O_1}$ と円 $\mathrm{O_2}$ の P 以外の交点を Q とすると

$$\angle\mathrm{PO_1Q}=\angle\mathrm{PO_2Q}=\frac{1}{2}(2\pi-2\alpha)=\pi-\alpha$$



よって，円板 $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ の共通部分の面積は

$$2\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-\alpha)-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\pi-\alpha)\right\}$$

$$=\pi-\alpha-\sin\alpha$$

同様に，円板 $\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_3}$，円板 $\mathrm{O_3}$，$\mathrm{O_1}$ の共通部分の面積はそれぞれ $\pi-\beta-\sin\beta$，$\pi-\gamma-\sin\gamma$ であるから

$$S=3\cdot\pi\cdot1^2-(\pi-\alpha-\sin\alpha)-(\pi-\beta-\sin\beta)-(\pi-\gamma-\sin\gamma)$$

$$=\alpha+\beta+\gamma+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$$

$$=2\pi+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma$$

$\alpha+\beta=2\pi-\gamma$ であるから　$S=2\pi+2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma$

ここで，$0\leqq\dfrac{\gamma}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\dfrac{\gamma}{2}\geqq0$

ゆえに，γ を固定すると S は $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=1$ すなわち $\alpha=\beta$ のとき最大となり，その最大値は　$2\pi+2\sin\dfrac{\gamma}{2}+\sin\gamma$

$f(\gamma)=2\pi+2\sin\dfrac{\gamma}{2}+\sin\gamma$ $(0\leqq\gamma\leqq\pi)$ とすると

$$f'(\gamma)=\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\gamma=\cos\frac{\gamma}{2}+2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1$$

$$=\left(\cos\frac{\gamma}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{\gamma}{2}-1\right)$$

$f'(\gamma)=0$ とすると　$\cos\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\gamma=\dfrac{2}{3}\pi$

$0\leqq\gamma\leqq\pi$ における $f(\gamma)$ の増減表は右のようになる。

γ	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\gamma)$		$+$	0	$-$	
$f(\gamma)$	2π	↗	$2\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$2\pi+2$

よって，S は $\gamma=\dfrac{2}{3}\pi$ かつ $\alpha=\beta$，すなわち $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $2\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

20 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{x+1}$　$(0\leqq x\leqq 4)$　　(2) $y=2x-\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\log(x^2+1)-\log x$　$\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3\right)$　　(4) $y=x-2\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(5) $y=\cos^3 x-\sin^3 x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

解答　(1) $x=4$ で最大値 $\dfrac{6}{5}$，$x=1$ で最小値 $\dfrac{3}{4}$

(2) $x=1$ で最大値 2，$x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ で最小値 $-\sqrt{5}$

(3) $x=3$ で最大値 $\log\dfrac{10}{3}$，$x=1$ で最小値 $\log 2$

(4) $x=\dfrac{5}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$，$x=\dfrac{\pi}{3}$ で最小値 $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

(5) $x=0$，$\dfrac{3}{2}\pi$，2π で最大値 1 ； $x=\dfrac{\pi}{2}$，π で最小値 -1

解説

(1) $0<x<4$ のとき　$y'=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{4(x+1)^2}$

$y'=0$ とすると　$x=1$

よって，$0\leqq x\leqq 4$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
y'		$-$	0	$+$	
y	1	↘	極小 $\dfrac{3}{4}$	↗	$\dfrac{6}{5}$

よって，y は $x=4$ で最大値 $\dfrac{6}{5}$，$x=1$ で最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

(2) この関数の定義域は，$1-x^2\geqq 0$ より　$-1\leqq x\leqq 1$

$-1<x<1$ のとき　$y'=2-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'=0$ とすると　$2\sqrt{1-x^2}=-x$　……①

① の両辺を 2 乗すると　$4(1-x^2)=x^2$　ゆえに　$x^2=\dfrac{4}{5}$

① より，$-x\geqq 0$ すなわち $x\leqq 0$ であるから　$x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって，$-1\leqq x\leqq 1$ における y の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	-2	↘	極小 $-\sqrt{5}$	↗	2

よって，y は $x=1$ で最大値 2，$x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ で最小値 $-\sqrt{5}$ をとる。

(3) $\dfrac{1}{2}<x<3$ のとき　$y'=\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)}$

$y'=0$ とすると　$x=1$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は次のようになる。

x	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	
y	$\log\dfrac{5}{2}$	↘	極小 $\log 2$	↗	$\log\dfrac{10}{3}$

$\log\dfrac{5}{2}<\log\dfrac{10}{3}$ であるから，y は $x=3$ で最大値 $\log\dfrac{10}{3}$，$x=1$ で最小値 $\log 2$ をとる。

(4) $0<x<2\pi$ のとき　$y'=1-2\cos x$

$y'=0$ とすると $\cos x=\dfrac{1}{2}$ から　$x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘	極小	↗	極大	↘	

$x=0$ のとき　$y=0$　　$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$y=\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$

$x=\dfrac{5}{3}\pi$ のとき　$y=\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$　　$x=2\pi$ のとき　$y=2\pi$

$0<\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$，$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}<2\pi$ であるから，y は

$x=\dfrac{5}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$，$x=\dfrac{\pi}{3}$ で最小値 $\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ をとる。

(5) $0<x<2\pi$ のとき

$$y'=3\cos^2 x\cdot(-\sin x)-3\sin^2 x\cos x=-3\sin x\cos x(\cos x+\sin x)$$
$$=-3\sqrt{2}\sin x\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$y'=0$ とすると

$\sin x=0$ から　$x=\pi$　　$\cos x=0$ から　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ から　$x=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↘	極小 -1	↗	極大 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	↘	極小 -1	↗	極大 1	↘	極小 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	↗	1

よって，y は $x=0$，$\dfrac{3}{2}\pi$，2π で最大値 1 ; $x=\dfrac{\pi}{2}$，π で最小値 -1 をとる。

21 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$　　(2) $y=x-\sqrt{x^2-1}$

(3) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-3)^2+4}$　　(4) $y=x\log x$

(5) $y=x+e^{-x}$　　(6) $y=|x|e^x$

(7) $y=(1-x)\cos x+\sin x$　$(0\leqq x\leqq\pi)$

解答　(1) $x=1+\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，$x=1-\sqrt{2}$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

(2) $x=1$ で最大値 1，最小値はない　(3) $x=1$ で最小値 $3\sqrt{2}$，最大値はない

(4) $x=\dfrac{1}{e}$ で最小値 $-\dfrac{1}{e}$，最大値はない　(5) $x=0$ で最小値 1，最大値はない

(6) $x=0$ で最小値 0，最大値はない

(7) $x=\pi$ で最大値 $\pi-1$，$x=1$ で最小値 $\sin 1$

解説

(1) $y'=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　$x=1\pm\sqrt{2}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$	↗	$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=0$

よって，y は $x=1+\sqrt{2}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，$x=1-\sqrt{2}$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。

(2) この関数の定義域は，$x^2-1\geqq 0$ から　$x\leqq -1$，$1\leqq x$

$x<-1$，$1<x$ のとき　$y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$				$-$
y	↗	-1		1	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$$

よって，y は $x=1$ で最大値 1 をとる。
　　　　最小値はない。

(3) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$

$y'=0$ とすると　$x\sqrt{(x-3)^2+4}=-(x-3)\sqrt{x^2+1}$ ……①

両辺を 2 乗して整理すると　$x^2+2x-3=0$

これを解くと　$x=-3,\ 1$

このうち，① を満たすのは　$x=1$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$3\sqrt{2}$	$\nearrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$

よって，y は $x=1$ で最小値 $3\sqrt{2}$ をとる。
　　　　最大値はない。

(4) この関数の定義域は　$x>0$

$y'=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

$y'=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{e}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$

よって，y は $x=\dfrac{1}{e}$ で最小値 $-\dfrac{1}{e}$ をとる。
　　　　最大値はない。

(5) $y'=1-e^{-x}$

$y'=0$ とすると　$x=0$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	1	$\nearrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$

よって，y は $x=0$ で最小値 1 をとる。
　　　　最大値はない。

(6) [1]　$x\geqq0$ のとき

$y=xe^x$ であるから

$x>0$ のとき　$y'=(x+1)e^x>0$

[2]　$x<0$ のとき

$y=-xe^x$ であるから　$y'=-(x+1)e^x$

$y'=0$ とすると　$x=-1$

以上から，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

また　$y\geqq0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$

よって，y は $x=0$ で最小値 0 をとる。
　　　　最大値はない。

(7) $y'=-\cos x-(1-x)\sin x+\cos x=(x-1)\sin x$

$0<x<\pi$ で $y'=0$ とすると　$x=1$

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	π
y'	／	$-$	0	$+$	／
y	1	$\searrow$	$\sin 1$	$\nearrow$	$\pi-1$

$1<\pi-1$ であるから，y は $x=\pi$ で最大値 $\pi-1$，$x=1$ で最小値 $\sin 1$ をとる。

22 関数 $y=a(x-\sin 2x)$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値が π であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=\pm2$

解説

$y'=a(1-2\cos 2x)$

$a=0$ のときは $y=0$ となり，条件に適さない。

よって，$a\neq0$ である。

したがって，$y'=0$ とすると　$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

よって　$2x=\pm\dfrac{\pi}{3}$　　ゆえに　$x=\pm\dfrac{\pi}{6}$

[1]　$a>0$ のとき

y の増減表は次のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$x=-\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)a$　　　$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y=\dfrac{\pi a}{2}$

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)a<\dfrac{\pi a}{2}$ から，最大値は　$\dfrac{\pi a}{2}$

条件より　$\dfrac{\pi a}{2}=\pi$　　よって　$a=2$

これは $a>0$ を満たす。

[2]　$a<0$ のとき

y の増減表は次のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
y'	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$x=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y=-\dfrac{\pi a}{2}$　　　$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$y=\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

$\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a<-\dfrac{\pi a}{2}$ から，最大値は $-\dfrac{\pi a}{2}$

条件より　$-\dfrac{\pi a}{2}=\pi$　　よって　$a=-2$

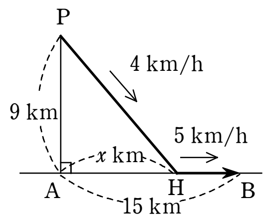
これは $a<0$ を満たす。

[1]，[2] から　$a=\pm2$

23 一直線をなす海岸の地点 A から海岸線に垂直に 9 km 離れた沖の船にいる人が，A から海岸にそって 15 km 離れた地点 B に最短時間で到着するためには，AB 間の A からどれだけ離れた地点に上陸すればよいか。ただし，船の速さは 4 km/h，人の歩く速さは 5 km/h とする。

解答　12 km

解説



船のいる地点を P，上陸すべき地点を H とする。

AH$=x$ (km) とすると，$0\leqq x\leqq15$ であり

PH$=\sqrt{x^2+9^2}$，BH$=15-x$

PH 間と BH 間でかかる合計時間を y (h) とすると

$y=\dfrac{\sqrt{x^2+9^2}}{4}+\dfrac{15-x}{5}$

$y'=\dfrac{x}{4\sqrt{x^2+9^2}}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{5x-4\sqrt{x^2+9^2}}{20\sqrt{x^2+9^2}}$

$y'=0$ とすると　$5x=4\sqrt{x^2+9^2}$

両辺を 2 乗して　$25x^2=16(x^2+81)$　　ゆえに　$x^2=144$

$0\leqq x\leqq15$ から　$x=12$

よって，y の増減表は右のようになる。

したがって，y は $x=12$ のとき最小となる。

よって，A から 12 km の地点に上陸すればよい。

x	0	$\cdots$	12	$\cdots$	15
y'	／	$-$	0	$+$	／
y		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

24 関数 $y=\dfrac{1-x}{(x+1)^2}$ $(x\geqq0)$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　$x=0$ で最大値 1，$x=3$ で最小値 $-\dfrac{1}{8}$

解説

$x>0$ のとき　$y'=\dfrac{x-3}{(x+1)^3}$

$y'=0$ とすると　$x=3$

よって，$x\geqq0$ における y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	1	$\searrow$	極小 $-\frac{1}{8}$	$\nearrow$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=0$

したがって，y は

$x=0$ で最大値 1，$x=3$ で最小値 $-\dfrac{1}{8}$ をとる。

25 xy 平面上に点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1)$ がある。点 P が y 軸上を動くときの $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の最小値と，最小値を与える点 P の y 座標を求めよ。

解答　最小値 $1+\sqrt{3}$，y 座標は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

解説

P の座標を $(0,\ t)$ とおく。

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}=\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+t^2}+|t-1|=2\sqrt{t^2+1}+|t-1|$$

$f(t)=2\sqrt{t^2+1}+|t-1|$ とおく。

[1]　$t\geqq 1$ のとき　　$f(t)=2\sqrt{t^2+1}+t-1$

$t>1$ のとき　　$f'(t)=\dfrac{2t}{\sqrt{t^2+1}}+1$

$t>1$ であるから　　$f'(t)>0$

ゆえに，$f(t)$ は $t\geqq 1$ で単調に増加する。

よって，$t\geqq 1$ のとき　　$f(t)\geqq f(1)=2\sqrt{2}$

[2]　$t<1$ のとき　　$f(t)=2\sqrt{t^2+1}-t+1$

よって　　$f'(t)=\dfrac{2t}{\sqrt{t^2+1}}-1=\dfrac{2t-\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}$

$f'(t)=0$ とすると　　$2t-\sqrt{t^2+1}=0$　　　すなわち　　$2t=\sqrt{t^2+1}$　……①

両辺を 2 乗して　　$4t^2=t^2+1$　　　よって　　$t^2=\dfrac{1}{3}$

① より $0\leqq t\ (<1)$ であるから　　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，$t<1$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	$-$	0	$+$	
$f(t)$	↘	$1+\sqrt{3}$	↗	

よって，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最小値 $1+\sqrt{3}$ をとる。

$2\sqrt{2}>1+\sqrt{3}$ であるから，[1]，[2] により，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最小値 $1+\sqrt{3}$ をとる。

したがって，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ の最小値は　$1+\sqrt{3}$

そのときの点 P の y 座標は　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

参考　$t>1$ とし，$\mathrm{P_1}(0,\ t)$，$\mathrm{P_2}(0,\ 2-t)$ とすると

$\mathrm{CP_1}=\mathrm{CP_2}$

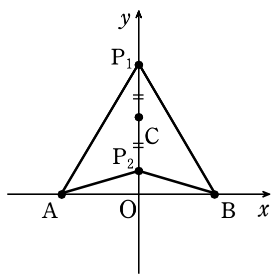
このとき　　$\mathrm{AP_1}^2-\mathrm{AP_2}^2=(1+t^2)-\{1+(2-t)^2\}$

$=4(t-1)>0$

よって　　$\mathrm{AP_1}>\mathrm{AP_2}$　　　同様に　　$\mathrm{BP_1}>\mathrm{BP_2}$

ゆえに　　$\mathrm{AP_1}+\mathrm{BP_1}+\mathrm{CP_1}>\mathrm{AP_2}+\mathrm{BP_2}+\mathrm{CP_2}$

したがって，$t>1$ のとき，$f(t)$ は最小値をとらないことがわかる。



26 点 $(1,\ 0)$ を中心とし，半径 1 の円の第 1 象限にある部分を C とする。C 上の点 $(1+t,\ s)$ $(0<t<1)$ における C の接線を ℓ とし，ℓ と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とする。

(1)　s を t で表せ。

(2)　点 A の x 座標を t で表せ。

(3)　線分 AB の長さを L とするとき，L を t で表せ。

(4)　L が最小となる t の値を求めよ。

解答　(1)　$s=\sqrt{1-t^2}$　　(2)　$\dfrac{1+t}{t}$　　(3)　$L=\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$　　(4)　$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

解説

(1)　点 $(1+t,\ s)$ は円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上の点であるから　　$(1+t-1)^2+s^2=1$

ゆえに　　$s^2=1-t^2$　　　$s>0$ であるから　　$s=\sqrt{1-t^2}$

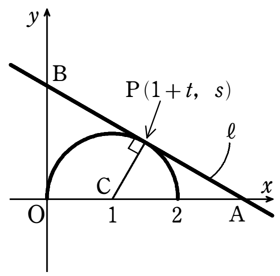
(2)　点 $(1,\ 0)$ を C，点 $(1+t,\ s)$ を P とする。直線 CP と接線 ℓ は垂直であるから，ℓ の傾きを m とすると

$\dfrac{s}{t}\cdot m=-1$

よって　　$m=-\dfrac{t}{s}$

したがって，接線 ℓ の方程式は

$y-s=-\dfrac{t}{s}(x-1-t)$



すなわち　　$tx+sy=t^2+s^2+t$

$t^2+s^2=1$ から　　$tx+sy=1+t$　……①

点 A の x 座標は，① において $y=0$ とすると　　$tx=1+t$

ゆえに　　$x=\dfrac{1+t}{t}$

(3)　点 B の y 座標は，① において $x=0$ とすると　　$sy=1+t$

ゆえに　　$y=\dfrac{1+t}{s}$

したがって　　$L=\sqrt{\left(\dfrac{1+t}{t}\right)^2+\left(\dfrac{1+t}{s}\right)^2}=\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$

(4)　(3) から　　$L^2=\dfrac{1+t}{t^2(1-t)}$

$f(t)=\dfrac{1+t}{t^2(1-t)}$ $(0<t<1)$ とおくと

$$f'(t)=\frac{1\cdot t^2(1-t)-(1+t)\{2t(1-t)-t^2\}}{t^4(1-t)^2}=\frac{2(t^2+t-1)}{t^3(1-t)^2}$$

$f'(t)=0$ とすると　　$t^2+t-1=0$　　　$0<t<1$ であるから　　$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小	↗	

ゆえに，$f(t)$ すなわち L^2 は $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で極小かつ最小となる。

$L>0$ であるから，L^2 が最小のとき，L は最小となる。

したがって，求める t の値は　　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

27 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ $(-3\leqq x\leqq 3)$　　　(2)　$y=x+e^{-x}$ $(-2\leqq x\leqq 1)$

(3)　$y=x\log x-2x$ $(1\leqq x\leqq e^2)$　　　(4)　$y=x-\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$

(5)　$y=e^{-x}\sin x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$

解答　(1)　$x=3$ で最大値 $\dfrac{1}{6}$，$x=-1$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$

(2)　$x=-2$ で最大値 e^2-2，$x=0$ で最小値 1

(3)　$x=e^2$ で最大値 0，$x=e$ で最小値 $-e$

(4)　$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{6}$ で最小値 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5)　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，$x=0,\ \pi$ で最小値 0

解説

(1)　$y'=\dfrac{x^2+3-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}=-\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$

y の増減表は，次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	
y	$-\dfrac{1}{3}$	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{6}$

よって　　$x=3$ で最大値 $\dfrac{1}{6}$，

$x=-1$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$

(2)　$y'=1-e^{-x}$

$y'=0$ とすると，$e^{-x}=1$ から　　$x=0$

y の増減表は，次のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	e^2-2	↘	1	↗	$1+\dfrac{1}{e}$

よって　　$x=-2$ で最大値 e^2-2，

$x=0$ で最小値 1

(3)　$y'=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}-2=\log x-1$

$1<x<e^2$ において $y'=0$ となる x の値は，

$\log x=1$ から　　$x=e$

y の増減表は，次のようになる。

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
y'		$-$	0	$+$	
y	-2	↘	$-e$	↗	0

よって　　$x=e^2$ で最大値 0，

$x=e$ で最小値 $-e$

(4)　$y'=1-2\cos 2x$

$0<x<\pi$ において $y'=0$ となる x の値は，

$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$ から　　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

y の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
y'	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y	0	↘	極小	↗	極大	↘	π

$x=\frac{\pi}{6}$ のとき　　$y=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x=\frac{5}{6}\pi$ のとき　　$y=\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　$x=\frac{5}{6}\pi$ で最大値 $\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$,

　　　　$x=\frac{\pi}{6}$ で最小値 $\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5)　$y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)$

$=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$y'=0$ とすると　　$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$　……①

$0<x<\pi$ のとき，$-\frac{\pi}{4}<x-\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$ であるから，① より

$x-\frac{\pi}{4}=0$　すなわち　$x=\frac{\pi}{4}$

y の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'	／	$+$	0	$-$	／
y	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$	↘	0

よって　　$x=\frac{\pi}{4}$ で最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$,

　　　　$x=0,\ \pi$ で最小値 0

28 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x\sqrt{2-x^2}$　　　(2)　$y=(1-\cos x)\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(3)　$y=\frac{x+1}{x^2+1}$　　　(4)　$y=\log(x^2+3)-\log(x+1)$

解答　(1)　$x=1$ で最大値 1，$x=-1$ で最小値 -1

(2)　$x=\frac{2}{3}\pi$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=\frac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(3)　$x=-1+\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，$x=-1-\sqrt{2}$ で最小値 $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

(4)　$x=1$ で最小値 $\log 2$，最大値はない

解説

(1)　$2-x^2\geqq 0$ であるから，定義域は

$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ のとき

$y'=\sqrt{2-x^2}+x\cdot\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$

$=\frac{(2-x^2)-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=-\frac{2(x+1)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}}$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 1$

y の増減表は次のようになる。

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y	0	↘	-1	↗	1	↘	0

よって　　$x=1$ で最大値 1,

　　　　$x=-1$ で最小値 -1

(2)　$y'=\sin^2 x+(1-\cos x)\cos x=1-\cos^2 x+\cos x-\cos^2 x$

$=-2\cos^2 x+\cos x+1=-(\cos x-1)(2\cos x+1)$

$0<x<2\pi$ において $y'=0$ となる x の値は，

$\cos x=1,\ -\frac{1}{2}$ から　　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
y	0	↗	極大	↘	極小	↗	0

$x=\frac{2}{3}\pi$ のとき　　$y=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x=\frac{4}{3}\pi$ のとき　　$y=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

よって　　$x=\frac{2}{3}\pi$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

　　　　$x=\frac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(3)　$y'=\frac{x^2+1-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=-1\pm\sqrt{2}$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大	↘

$x=-1-\sqrt{2}$ のとき　　$y=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$x=-1+\sqrt{2}$ のとき　　$y=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

また　　$\lim_{x\to\infty}y=0$，$\lim_{x\to-\infty}y=0$

よって　　$x=-1+\sqrt{2}$ で最大値 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

　　　　$x=-1-\sqrt{2}$ で最小値 $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

(4)　$x+1>0$ であるから，定義域は　　$x>-1$

$y'=\frac{2x}{x^2+3}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)(x^2+3)}$

$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x^2+3)}$

$x>-1$ において $y'=0$ となる x の値は　　$x=1$

y の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	$\log 2$	↗

よって　　$x=1$ で最小値 $\log 2$，最大値はない。

29 $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=2x$ である二等辺三角形 ABC に内接する半径 r の円がある。

(1)　r を x を用いて表せ。

(2)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　内接円の面積を最大にするには辺 BC の長さをいくらにすればよいか。

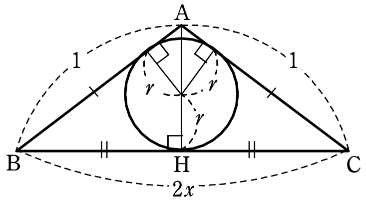
解答　(1)　$r=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$　　(2)　$0<x<1$　　(3)　$\sqrt{5}-1$

解説

(1)　頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線

AH の長さは　　$\mathrm{AH}=\sqrt{1-x^2}$

よって，△ABC の面積は



$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{1-x^2}$

$=x\sqrt{1-x^2}$

また　　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$

$=\frac{1}{2}r(1+2x+1)=r(1+x)$

よって，$x\sqrt{1-x^2}=r(1+x)$ であるから　　$r=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$

(2)　三角形の成立条件から　　$2x<1+1$

よって　　$x<1$

$x>0$ と合わせて　　$0<x<1$

注意　$x>0$ であるから，残りの三角形の成立条件 $1<1+2x$ は明らかに成り立つ。

(3)　内接円の面積を $S(x)$ とすると

$S(x)=\pi r^2=\frac{x^2(1-x^2)}{(1+x)^2}\pi=\frac{x^2(1+x)(1-x)}{(1+x)^2}\pi$

$=\frac{x^2(1-x)}{1+x}\pi=\frac{x^2-x^3}{1+x}\pi$

$S'(x)=\frac{(2x-3x^2)(1+x)-(x^2-x^3)\cdot 1}{(1+x)^2}\pi$

$=-\frac{2x(x^2+x-1)}{(1+x)^2}\pi$

$0<x<1$ において $S'(x)=0$ となる x の値は

$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって，$0<x<1$ における $S(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1
$S'(x)$	／	$+$	0	$-$	／
$S(x)$	／	↗	極大	↘	／

ゆえに，$S(x)$ は $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で極大かつ最大となる。

したがって，求める辺 BC の長さは　　$2x=\sqrt{5}-1$

$\boxed{30}$ 関数 $y=\dfrac{\sin x}{2-\cos 2x}$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最大値，最小値を求めよ。

解答 $x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；$x=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解説

$$y=\frac{\sin x}{2-(1-2\sin^2 x)}=\frac{\sin x}{2\sin^2 x+1}$$

$\sin x=t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ から

$-1 \leqq t \leqq 1$

y を t の式で表すと　$y=\dfrac{t}{2t^2+1}$

ゆえに　$y'=\dfrac{2t^2+1-t\cdot 4t}{(2t^2+1)^2}=\dfrac{1-2t^2}{(2t^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって，$-1 \leqq t \leqq 1$ における y の増減表は，次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\frac{1}{3}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	↘	$\frac{1}{3}$

$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$

$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　$x=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$x=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{31}$ 関数 $y=(ax+1)e^{-x}$ の最大値が ae となるように，正の定数 a の値を定めよ。

解答 $a=\dfrac{1}{2}$

解説

$$\begin{aligned} y' &= ae^{-x}+(ax+1)(-e^{-x}) \\ &= -e^{-x}(ax-a+1) \end{aligned}$$

$y'=0$ とすると　$x=\dfrac{a-1}{a}$

$a>0$ であるから，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{a-1}{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	極大 $ae^{-\frac{a-1}{a}}$	↘

ゆえに，y は $x=\dfrac{a-1}{a}$ で極大かつ最大となり，最大値は　$ae^{-\frac{a-1}{a}}$

よって，最大値が ae となるとき　$ae^{-\frac{a-1}{a}}=ae$

両辺を a $(\neq 0)$ で割ると　$e^{-\frac{a-1}{a}}=e$

ゆえに　$-\dfrac{a-1}{a}=1$

これを解くと　$a=\dfrac{1}{2}$

これは $a>0$ を満たす。

よって，求める a の値は　$a=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{32}$ 関数 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

解答 $a=3$

解説

$a=0$ のときは $f(x)=0$ となり，最大値が $\sqrt{3}$ となることはない。

よって，$a \neq 0$ である。

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\cdot\frac{\cos x\cdot(\cos x+2)-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x+2)^2} \\ &= \frac{a(\cos^2 x+2\cos x+\sin^2 x)}{(\cos x+2)^2} \\ &= \frac{a(2\cos x+1)}{(\cos x+2)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0<x<\pi$ の範囲でこれを解くと　$x=\dfrac{2}{3}\pi$

[1]　$a>0$ のとき，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

ゆえに，最大値は　$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{-\frac{1}{2}+2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

条件から　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$

したがって　$a=3$

これは $a>0$ を満たす。

[2]　$a<0$ のとき，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	0

このとき，最大値は　$f(0)=f(\pi)=0$

よって，不適である。

[1]，[2] から　$a=3$

$\boxed{33}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

$$y=2x+\sqrt{1-x^2}$$

解答 $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ で最大値 $\sqrt{5}$，$x=-1$ で最小値 -2

解説

$1-x^2 \geqq 0$ であるから，定義域は　$-1 \leqq x \leqq 1$

$-1<x<1$ のとき　$y'=2-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{2\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'=0$ とすると　$2\sqrt{1-x^2}=x$　……①

両辺を 2 乗して　$4(1-x^2)=x^2$

① より，$x \geqq 0$ であるから　$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

よって，y の増減表は右のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	-2	↗	$\sqrt{5}$	↘	2

したがって　$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ で最大値 $\sqrt{5}$，$x=-1$ で最小値 -2

$\boxed{34}$ 関数 $f(x)=e^x\{2x^2-(a+4)x+a+4\}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の最大値が 7 であるとき，正の定数 a の値を求めよ。

解答 $a=3$

解説

$f'(x)=e^x\{2x^2-(a+4)x+a+4\}+e^x\{4x-(a+4)\}=xe^x(2x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$，$\dfrac{a}{2}$

[1]　$\dfrac{a}{2} \geqq 1$ すなわち $a \geqq 2$ のとき

最大値は　$f(0)=a+4$

条件から　$a+4=7$　よって　$a=3$

これは $a \geqq 2$ を満たす。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

[2]　$0<\dfrac{a}{2}<1$ すなわち $0<a<2$ のとき

最大値は　$f(0)$ または $f(1)$

$f(0)=a+4<6$

$f(1)=2e=5.4\cdots<6$ であるから，最大値は 7 より小さい。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	極大	↘	極小	↗	

[1]，[2] から　$a=3$