極値クイズ

$\boxed{1}$ 関数 $y=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ の極値を求めよ。

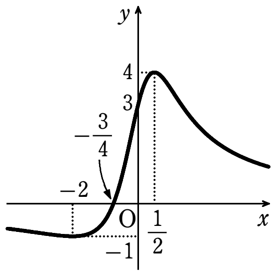
解答　$x=-2$ で極小値 -1，$x=\dfrac{1}{2}$ で極大値 4

解説

$$y'=\frac{4(x^2+1)-(4x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}$$

ここで，常に $(x^2+1)^2>0$ であるから，y の増減表は次のようになる。

x	……	-2	……	$\frac{1}{2}$	……
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -1	↗	極大 4	↘



よって，y は $x=-2$ で極小値 -1，$x=\dfrac{1}{2}$ で極大値 4 をとる。

$\boxed{2}$ 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x}{x^2+1}$　　(2)　$y=\sin^2 x+2\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(3)　$y=x^2\log x$　　(4)　$y=xe^{-x}$

解答　(1)　$x=-1$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$

(2)　$x=\dfrac{\pi}{2}$ で極大値 3，$x=\dfrac{3}{2}\pi$ で極小値 -1

(3)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$，極大値はない

(4)　$x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$，極小値はない

解説

(1)　$y'=\dfrac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 1$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……	1	……
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗	極大 $\frac{1}{2}$	↘

ゆえに，y は $x=-1$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

(2)　$y'=2\sin x\cos x+2\cos x=2\cos x(\sin x+1)$

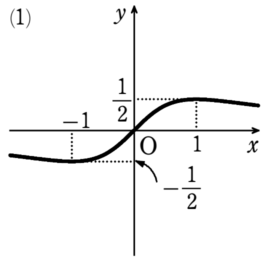
$y'=0$ とすると，$0<x<2\pi$ で　　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

ここで，常に $\sin x+1\geqq 0$ であるから，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。

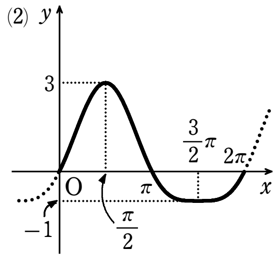
x	0	……	$\frac{\pi}{2}$	……	$\frac{3}{2}\pi$	……	2π
y'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
y	0	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗	0

よって，y は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で極大値 3，$x=\dfrac{3}{2}\pi$ で極小値 -1 をとる。

参考　(1)



(2)



(3)　この関数の定義域は $x>0$ である。

$$y'=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\log x+1)$$

$y'=0$ とすると　　$\log x=-\dfrac{1}{2}$

よって　　$x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

ゆえに，$x>0$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	……	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	……
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	極小 $-\frac{1}{2e}$	↗

したがって，y は $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$ をとる。また，極大値はない。

(4)　$y'=e^{-x}+x\cdot(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$

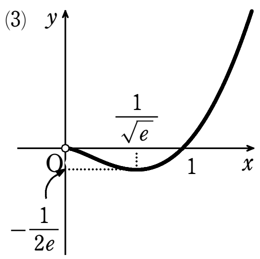
$y'=0$ とすると　　$x=1$

ここで，常に $e^{-x}>0$ であるから，y の増減表は次のようになる。

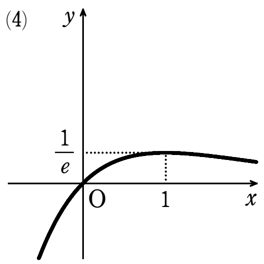
x	……	1	……
y'	$+$	0	$-$
y	↗	極大 $\frac{1}{e}$	↘

よって，y は $x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。また，極小値はない。

参考　(3)



(4)



$\boxed{3}$ 関数 $y=|x|\sqrt{x+1}$ の極値を求めよ。

解答　$x=-\dfrac{2}{3}$ で極大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，$x=0$ で極小値 0

解説

この関数の定義域は $x\geqq -1$ である。

$x\geqq 0$ のとき，$y=x\sqrt{x+1}$ であるから，$x>0$ では

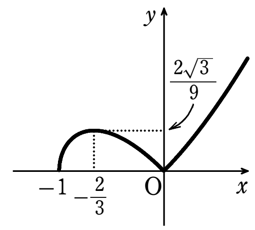
$$y'=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

よって，$x>0$ では常に　　$y'>0$

$-1\leqq x<0$ のとき，$y=-x\sqrt{x+1}$

であるから，$-1<x<0$ では

$$y'=-\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$



$y'=0$ とすると　　$x=-\dfrac{2}{3}$

ゆえに，y の増減表は次のようになる。

x	-1	……	$-\frac{2}{3}$	……	0	……
y'	／	$+$	0	$-$	／	$+$
y	0	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	極小 0	↗

よって，y は $x=-\dfrac{2}{3}$ で極大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$，$x=0$ で極小値 0 をとる。

$\boxed{4}$ 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=|x-3|\sqrt{x}$　　(2)　$y=|x^2-2x|+3$

解答　(1)　$x=1$ で極大値 2，$x=3$ で極小値 0

(2)　$x=0,\ 2$ で極小値 3；$x=1$ で極大値 4

解説

(1)　この関数の定義域は $x\geqq 0$ である。

$x\geqq 3$ のとき，$y=(x-3)\sqrt{x}$ であるから，

$x>3$ では

$$y'=\sqrt{x}+\frac{x-3}{2\sqrt{x}}=\frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

ゆえに，$x>3$ では常に　　$y'>0$

$0\leqq x<3$ のとき，$y=(-x+3)\sqrt{x}$ であるから，

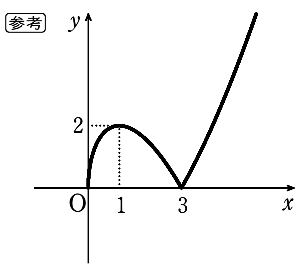
$0<x<3$ では

$$y'=-\sqrt{x}+\frac{-x+3}{2\sqrt{x}}=\frac{-3(x-1)}{2\sqrt{x}}$$

$y'=0$ とすると　　$x=1$

よって，y の増減表は次のようになる。

参考

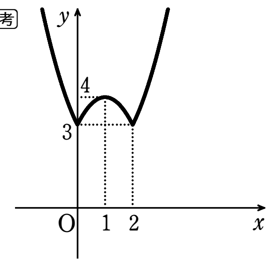


x	0	……	1	……	3	……
y'	／	$+$	0	$-$	／	$+$
y	0	↗	極大 2	↘	極小 0	↗

ゆえに，y は $x=1$ で極大値 2，$x=3$ で極小値 0 をとる。

(2) この関数の定義域は実数全体である。

参考



$x\leqq 0$，$2\leqq x$ のとき，$y=x^2-2x+3$ であるから，

$x<0$，$2<x$ では

$$y'=2x-2=2(x-1)$$

ゆえに，$x<0$ では常に　$y'<0$

　　$2<x$ では常に　$y'>0$

$0<x<2$ のとき，$y=-x^2+2x+3$ であるから，

$0<x<2$ では

$$y'=-2x+2=-2(x-1)$$

$y'=0$ とすると　$x=1$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	……	0	……	1	……	2	……
y'	$-$	／	$+$	0	$-$	／	$+$
y	↘	極小 3	↗	極大 4	↘	極小 3	↗

ゆえに，y は $x=0$，2 で極小値 3，$x=1$ で極大値 4 をとる。

5 次の関数が $x=-1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。

$$f(x)=\frac{x^2+x+a}{x-1}$$

解答　$a=2$

解説

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-1)-(x^2+x+a)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1-a}{(x-1)^2}$$

$f(x)$ は $x=-1$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば　$f'(-1)=0$

よって　$\frac{2-a}{4}=0$　　ゆえに　$a=2$

逆に，$a=2$ のとき

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1},\quad f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

ここで，常に $(x-1)^2>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……	1	……	3	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -1	↘	／	↘	極小 7	↗

よって，$f(x)$ は $x=-1$ で極大値 -1 をとる。

ゆえに，求める a の値は　$a=2$

6 関数 $f(x)=(ax+1)e^x$ が $x=0$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=-1$

解説

$$f'(x)=ae^x+(ax+1)e^x=(ax+a+1)e^x$$

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから，$f(x)$ が $x=0$ で極値をとるならば　$f'(0)=0$

よって　$a+1=0$　　ゆえに　$a=-1$

逆に，$a=-1$ のとき

$$f(x)=(-x+1)e^x,\quad f'(x)=-xe^x$$

ここで，常に $e^x>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	0	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 1	↘

よって，$f(x)$ は $x=0$ で極大値 1 をとる。

ゆえに，求める a の値は　$a=-1$

7 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y=\sqrt[3]{x^2}$　　(2) $y=x^2+\log(9-x^2)$

(3) $y=x+\sqrt{3}\sin x-\cos x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

解答　(1) $x=0$ で極小値 0　(2) $x=0$ で極小値 $2\log 3$，$x=\pm 2\sqrt{2}$ で極大値 8

(3) $x=\frac{5}{6}\pi$ で極大値 $\frac{5}{6}\pi+\sqrt{3}$，$x=\frac{3}{2}\pi$ で極小値 $\frac{3}{2}\pi-\sqrt{3}$

解説

(1) この関数の定義域は実数全体である。

$x\neq 0$ のとき　$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$x=0$ のとき　微分可能でない。

また，$x>0$ のとき　$y'>0$

　　$x<0$ のとき　$y'<0$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	……	0	……
y'	$-$	／	$+$
y	↘	極小 0	↗

ゆえに，y は $x=0$ で極小値 0 をとる。

(2) この関数の定義域は，$9-x^2>0$ より $-3<x<3$ である。

$-3<x<3$ では　$y'=2x-\frac{2x}{9-x^2}=\frac{2x(x^2-8)}{x^2-9}$

$y'=0$ とすると　$x=0$，$\pm 2\sqrt{2}$

$-3<x<3$ において $x^2-9<0$ であるから，y の増減表は次のようになる。

x	-3	……	$-2\sqrt{2}$	……	0	……	$2\sqrt{2}$	……	3
y'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y	／	↗	極大 8	↘	極小 $2\log 3$	↗	極大 8	↘	／

よって，y は $x=0$ で極小値 $2\log 3$，$x=\pm 2\sqrt{2}$ で極大値 8 をとる。

(3) $y=x+2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから　$y'=1+2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$y'=0$ とすると　$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$0<x<2\pi$ のとき，$-\frac{\pi}{6}<x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$ であるから　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

よって　$x=\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	……	$\frac{5}{6}\pi$	……	$\frac{3}{2}\pi$	……	2π
y'	／	$+$	0	$-$	0	$+$	／
y	-1	↗	極大 $\frac{5}{6}\pi+\sqrt{3}$	↘	極小 $\frac{3}{2}\pi-\sqrt{3}$	↗	$2\pi-1$

したがって，y は $x=\frac{5}{6}\pi$ で極大値 $\frac{5}{6}\pi+\sqrt{3}$，$x=\frac{3}{2}\pi$ で極小値 $\frac{3}{2}\pi-\sqrt{3}$ をとる。

8 次の関数の増減を調べ，極値があればそれを求めよ。[各 15 点]

(1) $y=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$　　(2) $y=\log(x^2+1)$

解答　(1) この関数の定義域は，$x\neq 2$ である。

$y=x-3+\frac{1}{x-2}$ であるから

$$y'=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

x	…	1	…	2	…	3	…
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↗	極大 -3	↘	／	↘	極小 1	↗

$y'=0$ とすると　$x=1$，3

よって，y の増減表は右のようになる。

ゆえに，y は区間 $x\leqq 1$，$3\leqq x$ で単調に増加し，区間 $1\leqq x<2$，$2<x\leqq 3$ で単調に減少する。

また，y は $x=1$ で極大値 -3，$x=3$ で極小値 1 をとる。

(2) $y'=\frac{2x}{x^2+1}$　　$y'=0$ とすると　$x=0$

x	…	0	…
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 0	↗

よって，y の増減表は右のようになる。

ゆえに，y は区間 $x\geqq 0$ で単調に増加し，区間 $x\leqq 0$ で単調に減少する。

また，y は $x=0$ で極小値 0 をとる。

解説

(1) この関数の定義域は，$x\neq 2$ である。

$y=x-3+\frac{1}{x-2}$ であるから

$$y'=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

x	…	1	…	2	…	3	…
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y	↗	極大 -3	↘	／	↘	極小 1	↗

$y'=0$ とすると　$x=1$，3

よって，y の増減表は右のようになる。

ゆえに，y は区間 $x\leqq 1$，$3\leqq x$ で単調に増加し，区間 $1\leqq x<2$，$2<x\leqq 3$ で単調に減少する。

また，y は $x=1$ で極大値 -3，$x=3$ で極小値 1 をとる。

(2) $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$　　$y'=0$ とすると　$x=0$

よって，y の増減表は右のようになる。
ゆえに，y は区間 $x\geqq 0$ で単調に増加し，区間 $x\leqq 0$ で単調に減少する。
また，y は $x=0$ で極小値 0 をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 0	↗

9 関数 $y=\lvert x-2\rvert e^x$ の極値を求めよ。[20 点]

解答　$x\geqq 2$ のとき，$y=(x-2)e^x$ であるから，$x>2$ では

$y'=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$

ゆえに，$x>2$ では常に　$y'>0$

$x<2$ のとき，$y=(-x+2)e^x$ であるから

$y'=-e^x+(-x+2)e^x=-(x-1)e^x$

$y'=0$ とすると　$x=1$

よって，y の増減表は右のようになる。

ゆえに，y は $x=1$ で極大値 e，$x=2$ で極小値 0 をとる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$+$
y	↗	極大 e	↘	極小 0	↗

解説

$x\geqq 2$ のとき，$y=(x-2)e^x$ であるから，$x>2$ では

$y'=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$

ゆえに，$x>2$ では常に　$y'>0$

$x<2$ のとき，$y=(-x+2)e^x$ であるから

$y'=-e^x+(-x+2)e^x=-(x-1)e^x$

$y'=0$ とすると　$x=1$

よって，y の増減表は右のようになる。

ゆえに，y は $x=1$ で極大値 e，$x=2$ で極小値 0 をとる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$+$
y	↗	極大 e	↘	極小 0	↗

10 関数 $y=\lvert 2x\rvert\sqrt{4-x^2}$ の極値を求めよ。[25 点]

解答　この関数の定義域は，$4-x^2\geqq 0$ から　$-2\leqq x\leqq 2$

[1] $-2\leqq x<0$ のとき，$y=-2x\sqrt{4-x^2}$ であるから，$-2<x<0$ では

$$y'=-2\left(1\cdot\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)=\frac{4(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$y'=0$ とすると　$x=-\sqrt{2}$

[2] $0\leqq x\leqq 2$ のとき，$y=2x\sqrt{4-x^2}$ であるから，$0<x<2$ では

$y'=-\dfrac{4(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$　　$y'=0$ とすると　$x=\sqrt{2}$

以上により，$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-2	……	$-\sqrt{2}$	……	0	……	$\sqrt{2}$	……	2
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	極大 4	↘	0

よって，y は $x=\pm\sqrt{2}$ で極大値 4，$x=0$ で極小値 0 をとる。

解説

この関数の定義域は，$4-x^2\geqq 0$ から　$-2\leqq x\leqq 2$

[1] $-2\leqq x<0$ のとき，$y=-2x\sqrt{4-x^2}$ であるから，$-2<x<0$ では

$$y'=-2\left(1\cdot\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}\right)=\frac{4(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$y'=0$ とすると　$x=-\sqrt{2}$

[2] $0\leqq x\leqq 2$ のとき，$y=2x\sqrt{4-x^2}$ であるから，$0<x<2$ では

$y'=-\dfrac{4(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$　　$y'=0$ とすると　$x=\sqrt{2}$

以上により，$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-2	……	$-\sqrt{2}$	……	0	……	$\sqrt{2}$	……	2
y'		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	極大 4	↘	0

よって，y は $x=\pm\sqrt{2}$ で極大値 4，$x=0$ で極小値 0 をとる。

11 次の関数に極値があればそれを求めよ。[各 15 点]

(1) $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$　$(-\pi\leqq x\leqq\pi)$　　(2) $y=(3x^2-2x-1)e^{2x}$

解答 (1) この関数の定義域は，$1-\cos x\neq 0$ から　$-\pi\leqq x<0$，$0<x\leqq\pi$

$$y'=\frac{\cos x(1-\cos x)-\sin x\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}=-\frac{1}{1-\cos x}$$

よって，$-\pi\leqq x<0$，$0<x\leqq\pi$ では，$1-\cos x>0$ より，常に $y'<0$ である。
ゆえに，極値はない。

(2) $y'=(6x-2)e^{2x}+(3x^2-2x-1)\cdot 2e^{2x}$
$=2(3x^2+x-2)e^{2x}$
$=2(x+1)(3x-2)e^{2x}$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ \dfrac{2}{3}$

よって，y の増減表は右のようになる。
ゆえに，y は

$x=-1$ で極大値 $4e^{-2}$

$x=\dfrac{2}{3}$　で極小値 $-e^{\frac{4}{3}}$

をとる。

x	……	-1	……	$\frac{2}{3}$	……
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 $4e^{-2}$	↘	極小 $-e^{\frac{4}{3}}$	↗

解説

(1) この関数の定義域は，$1-\cos x\neq 0$ から　$-\pi\leqq x<0$，$0<x\leqq\pi$

$$y'=\frac{\cos x(1-\cos x)-\sin x\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}=-\frac{1}{1-\cos x}$$

よって，$-\pi\leqq x<0$，$0<x\leqq\pi$ では，$1-\cos x>0$ より，常に $y'<0$ である。
ゆえに，極値はない。

(2) $y'=(6x-2)e^{2x}+(3x^2-2x-1)\cdot 2e^{2x}$
$=2(3x^2+x-2)e^{2x}$
$=2(x+1)(3x-2)e^{2x}$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ \dfrac{2}{3}$

よって，y の増減表は右のようになる。
ゆえに，y は

$x=-1$ で極大値 $4e^{-2}$

$x=\dfrac{2}{3}$　で極小値 $-e^{\frac{4}{3}}$

をとる。

x	……	-1	……	$\frac{2}{3}$	……
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 $4e^{-2}$	↘	極小 $-e^{\frac{4}{3}}$	↗

12 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y=x^2\log x$　　(2) $y=(x+5)\sqrt[3]{x^2}$

解答 (1) $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$

(2) $x=-2$ で極大値 $3\sqrt[3]{4}$，$x=0$ で極小値 0

解説

(1) 関数 y の定義域は $x>0$ である。

$$y'=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\log x+1)$$

$y'=0$ とすると，$x>0$ であるから

$\log x=-\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　　$x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

y の増減表は右のようになる。

よって　　$x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2e}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	極小 $-\frac{1}{2e}$	↗

(2) $y=(x+5)\sqrt[3]{x^2}=(x+5)x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{5}{3}}+5x^{\frac{2}{3}}$

$$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2)=\frac{5(x+2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$y'=0$ とすると　　$x=-2$

関数 $y=(x+5)\sqrt[3]{x^2}$ は $x=0$ で微分可能ではない。

y の増減表は右のようになる。

よって　　$x=-2$ で極大値 $3\sqrt[3]{4}$，
　　　　　$x=0$　で極小値 0

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$+$
y	↗	極大 $3\sqrt[3]{4}$	↘	極小 0	↗

13 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y=\dfrac{3x-1}{x^3+1}$　　(2) $y=x+2\sin x$　$(0<x<2\pi)$

(3) $y=x^2e^{-x}$　　(4) $y=\lvert x\rvert\sqrt{x+2}$

解答 (1) $x=1$ で極大値 1

(2) $x=\dfrac{2}{3}\pi$ で極大値 $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$，$x=\dfrac{4}{3}\pi$ で極小値 $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

(3) $x=0$ で極小値 0，$x=2$ で極大値 $4e^{-2}$

(4) $x=-\dfrac{4}{3}$ で極大値 $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$，$x=0$ で極小値 0

解説

(1) $x^3+1\neq 0$ から，関数 y の定義域は $x\neq -1$ である。

$$y'=\frac{3(x^3+1)-(3x-1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}=\frac{-3(2x^3-x^2-1)}{(x^3+1)^2}$$

$$=\frac{-3(x-1)(2x^2+x+1)}{(x^3+1)^2}$$

$y'=0$ とすると　　$x=1$

y の増減表は右のようになる。

よって　$x=1$ で極大値 1

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$		$+$	0	$-$
y	↗		↗	極大 1	↘

(2) $y'=1+2\cos x$　$(0<x<2\pi)$

$y'=0$ とすると　　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$0<x<2\pi$ であるから　　$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	極大	↘	極小	↗	

よって　$x=\frac{2}{3}\pi$ で極大値 $\frac{2}{3}\pi+2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$，

$x=\frac{4}{3}\pi$ で極小値 $\frac{4}{3}\pi+2\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

(3)　$y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$=-x(x-2)e^{-x}$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

y の増減表は右のようになる。

よって　$x=0$ で極小値 0，

$x=2$ で極大値 $4e^{-2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 0	↗	極大 $4e^{-2}$	↘

(4)　関数 y の定義域は $x\geqq-2$ である。

$-2<x<0$ のとき　$y=-x\sqrt{x+2}$，$y'=-\frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$

$y'=0$ とすると　$x=-\frac{4}{3}$

$x=0$ のとき　$y=0$

関数 $y=|x|\sqrt{x+2}$ は $x=0$ で微分可能ではない。

$0<x$ のとき　$y=x\sqrt{x+2}$

$y'=\frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}>0$

y の増減表は右のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$		$+$
y	0	↗	極大 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	極小 0	↗

よって　$x=-\frac{4}{3}$ で極大値 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$，

$x=0$ で極小値 0

$\boxed{14}$ 関数 $f(x)=\frac{ax^2+bx}{2x^2+1}$ が $x=1$ で極小値 -2 をとるとき，実数の定数 a，b の値を求めよ。

解答　$a=-2$，$b=-4$

解説

$f'(x)=\frac{(2ax+b)(2x^2+1)-(ax^2+bx)\cdot4x}{(2x^2+1)^2}=\frac{-2bx^2+2ax+b}{(2x^2+1)^2}$

$f(x)$ が $x=1$ で極小値 -2 をとるから　$f'(1)=0$，$f(1)=-2$

$f'(1)=0$ から　$\frac{2a-b}{9}=0$　　よって　$b=2a$ ……①

$f(1)=-2$ から　$\frac{a+b}{3}=-2$　　よって　$a+b=-6$ ……②

①，② を解くと　$a=-2$，$b=-4$

逆に，このとき

$f(x)=\frac{-2x^2-4x}{2x^2+1}$，

$f'(x)=\frac{8x^2-4x-4}{(2x^2+1)^2}=\frac{4(2x+1)(x-1)}{(2x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-\frac{1}{2}$，1

$f(x)$ の増減表は右のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 1	↘	極小 -2	↗

したがって　$a=-2$，$b=-4$

$\boxed{15}$ 関数 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2+2}$ （a，b，c は定数）が $x=-2$ で極小値 $\frac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 2 をもつ。このとき a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=2$，$c=3$

解説

$f'(x)=\frac{-bx^2+(4a-2c)x+2b}{(x^2+2)^2}$

$x=-2$ で極小値 $\frac{1}{2}$ をもつから　$f'(-2)=0$，$f(-2)=\frac{1}{2}$

$x=1$ で極大値 2 をもつから　$f'(1)=0$，$f(1)=2$

$f'(-2)=0$ から　$\frac{-8a-2b+4c}{36}=0$

$f'(1)=0$ から　$\frac{4a+b-2c}{9}=0$

よって　$4a+b-2c=0$ ……①

$f(-2)=\frac{1}{2}$ から　$4a-2b+c=3$ ……②

$f(1)=2$ から　$a+b+c=6$ ……③

①，②，③ から　$a=1$，$b=2$，$c=3$

逆に，このとき　$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2}$

$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$，1

$f(x)$ の増減表は次のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	2	↘

以上から　$a=1$，$b=2$，$c=3$

$\boxed{16}$ a を定数とする。関数 $f(x)=\frac{x-a}{x^2+1}$ の極値の 1 つが $\frac{1}{2}$ のとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=0$

解説

$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x-a)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+2ax+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ から　$x^2-2ax-1=0$ ……①

① の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=a^2+1$

$D>0$ であるから，① は異なる 2 つの実数解をもつ。

ゆえに，$f(x)$ は極値をもつ。

① の解は　$x=a\pm\sqrt{a^2+1}$

よって　$f(a+\sqrt{a^2+1})=\frac{a+\sqrt{a^2+1}-a}{(a+\sqrt{a^2+1})^2+1}$

$=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2(a^2+1)+2a\sqrt{a^2+1}}$

$=\frac{1}{2(\sqrt{a^2+1}+a)}$

同様に　$f(a-\sqrt{a^2+1})=\frac{a-\sqrt{a^2+1}-a}{(a-\sqrt{a^2+1})^2+1}$

$=\frac{-1}{2(\sqrt{a^2+1}-a)}$

$\frac{1}{2(\sqrt{a^2+1}+a)}=\frac{1}{2}$ のとき　$\sqrt{a^2+1}=1-a$

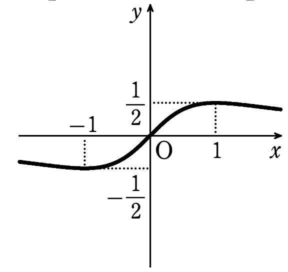
よって，$a\leqq1$，$a^2+1=(1-a)^2$ から　$a=0$

$\frac{-1}{2(\sqrt{a^2+1}-a)}=\frac{1}{2}$ のとき　$\sqrt{a^2+1}=a-1$

よって，$a\geqq1$，$a^2+1=(a-1)^2$ から　解なし

したがって，求める a の値は　$a=0$

［$y=\frac{x}{x^2+1}$ のグラフ］



$\boxed{17}$ 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=\frac{2x-3}{x^2+4}$　　(2)　$y=\frac{x^2-5x+6}{x-1}$

(3)　$y=\frac{1}{x}-\frac{4}{x-1}$　　(4)　$y=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$

(5)　$y=(x+1)e^x$　　(6)　$y=2\sin x+\cos2x$　$(0\leqq x\leqq2\pi)$

解答　(1)　$x=-1$ で極小値 -1，$x=4$ で極大値 $\frac{1}{4}$

(2)　$x=1-\sqrt{2}$ で極大値 $-3-2\sqrt{2}$，$x=1+\sqrt{2}$ で極小値 $-3+2\sqrt{2}$

(3)　$x=-1$ で極大値 1，$x=\frac{1}{3}$ で極小値 9

(4)　$x=2$ で極小値 2　　(5)　$x=-2$ で極小値 $-\frac{1}{e^2}$

(6)　$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ で極大値 $\frac{3}{2}$；$x=\frac{\pi}{2}$ で極小値 1；$x=\frac{3}{2}\pi$ で極小値 -3

解説

(1)　$y'=\frac{2(x^2+4)-(2x-3)\cdot2x}{(x^2+4)^2}=-\frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$

$y'=0$ とすると　$x=-1$，4

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -1	↗	極大 $\frac{1}{4}$	↘

ゆえに，y は $x=-1$ で極小値 -1，$x=4$ で極大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

(2)　この関数の定義域は　$x\neq1$

$y=x-4+\frac{2}{x-1}$ であるから　$y'=1-\frac{2}{(x-1)^2}$

$y'=0$ とすると　$x=1\pm\sqrt{2}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘		↘	極小	↗

ゆえに，y は $x=1-\sqrt{2}$ で極大値 $-3-2\sqrt{2}$，$x=1+\sqrt{2}$ で極小値 $-3+2\sqrt{2}$ をとる。

(3)　この関数の定義域は　$x\neq 0,\ x\neq 1$

$$y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(3x-1)}{x^2(x-1)^2}$$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ \frac{1}{3}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y	↗	極大 1	↘		↘	極小 9	↗		↗

ゆえに，y は $x=-1$ で極大値 1，$x=\frac{1}{3}$ で極小値 9 をとる。

(4)　この関数の定義域は，$x-1>0$ から　$x>1$

$$y'=\frac{1\cdot\sqrt{x-1}-\frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$y'=0$ とすると　$x=2$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	極小 2	↗

ゆえに，y は $x=2$ で極小値 2 をとる。

(5)　$y'=(x+2)e^x$

$y'=0$ とすると　$x=-2$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 $-\frac{1}{e^2}$	↗

ゆえに，y は $x=-2$ で極小値 $-\frac{1}{e^2}$ をとる。

(6)　$y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-2\cdot 2\sin x\cos x$
$=2\cos x(1-2\sin x)$

$0<x<2\pi$ において $y'=0$ とすると　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\frac{3}{2}$	↘	極小 1	↗	極大 $\frac{3}{2}$	↘	極小 -3	↗	1

ゆえに，y は $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ で極大値 $\frac{3}{2}$；$x=\frac{\pi}{2}$ で極小値 1；$x=\frac{3}{2}\pi$ で極小値 -3 をとる。

18 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=|x-1|\sqrt{x+3}$　　(2)　$y=|x^2-3x|$

(3)　$y=\sqrt[5]{x^2}$　　(4)　$y=\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

解答　(1)　$x=-\frac{5}{3}$ で極大値 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$，$x=1$ で極小値 0

(2)　$x=0$ で極小値 0，$x=\frac{3}{2}$ で極大値 $\frac{9}{4}$，$x=3$ で極小値 0

(3)　$x=0$ で極小値 0　　(4)　極値はない

解説

(1)　この関数の定義域は，$x+3\geqq 0$ から　$x\geqq -3$

[1]　$-3\leqq x\leqq 1$ のとき　$y=-(x-1)\sqrt{x+3}$

よって，$-3<x<1$ では　$y'=-\left(\sqrt{x+3}+\frac{x-1}{2\sqrt{x+3}}\right)=-\frac{3x+5}{2\sqrt{x+3}}$

$y'=0$ とすると　$x=-\frac{5}{3}$

[2]　$x\geqq 1$ のとき　$y=(x-1)\sqrt{x+3}$

よって，$x>1$ では　$y'=\frac{3x+5}{2\sqrt{x+3}}>0$

以上から，y の増減表は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	$-\frac{5}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$		$+$
y	0	↗	極大 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	極小 0	↗

よって，y は $x=-\frac{5}{3}$ で極大値 $\frac{16\sqrt{3}}{9}$，$x=1$ で極小値 0 をとる。

(2)　[1]　$x\leqq 0,\ 3\leqq x$ のとき　$y=x^2-3x$

よって，$x<0,\ 3<x$ では　$y'=2x-3$

ゆえに，$x<0$ のとき　$y'<0$

$3<x$ のとき　$y'>0$

[2]　$0\leqq x\leqq 3$ のとき　$y=-x^2+3x$

よって，$0<x<3$ では　$y'=-2x+3$

$y'=0$ とすると　$x=\frac{3}{2}$

以上から，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$		$+$	0	$-$		$+$
y	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{9}{4}$	↘	極小 0	↗

よって，y は $x=0$ で極小値 0，$x=\frac{3}{2}$ で極大値 $\frac{9}{4}$，$x=3$ で極小値 0 をとる。

(3)　$y=x^{\frac{2}{5}}$ であるから $x\neq 0$ のとき

$$y'=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

y の増減表は右のようになる。

よって，$x=0$ で極小値 0 をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$		$+$
y	↘	極小 0	↗

(4)　この関数の定義域は　$x\neq 0$

$y=x^{-\frac{4}{3}}$ であるから　$y'=-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}=-\frac{4}{3x^2\sqrt[3]{x}}$

y の増減表は右のようになる。

よって，極値はない。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$		$-$
y	↗		↘

19 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=\frac{(1-x)^3}{1-2x}$　　(2)　$y=(x+3)\sqrt[3]{(x+2)^2}$

(3)　$y=\frac{\sin x}{1-\cos x}$　$(0<x<2\pi)$　　(4)　$y=\frac{\sin x}{1+2\sin^2 x}$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(5)　$y=\frac{\log x}{x^2}$　　(6)　$y=x^3e^{-3x}$

解答　(1)　$x=\frac{1}{4}$ で極小値 $\frac{27}{32}$　　(2)　$x=-\frac{12}{5}$ で極大値 $\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$，$x=-2$ で極小値 0

(3)　極値はない

(4)　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$ で極大値 $\frac{\sqrt{2}}{4}$；$x=\frac{\pi}{2}$ で極小値 $\frac{1}{3}$；

$x=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ で極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$；$x=\frac{3}{2}\pi$ で極大値 $-\frac{1}{3}$

(5)　$x=\sqrt{e}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$　　(6)　$x=1$ で極大値 $\frac{1}{e^3}$

解説

(1)　この関数の定義域は　$x\neq\frac{1}{2}$

$$y'=\frac{-3(1-x)^2(1-2x)-(1-x)^3\cdot(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{(1-x)^2(4x-1)}{(1-2x)^2}$$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ \frac{1}{4}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
y	↘	極小 $\frac{27}{32}$	↗		↗	0	↗

ゆえに，y は $x=\dfrac{1}{4}$ で極小値 $\dfrac{27}{32}$ をとる。

(2)　$y'=1\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}+(x+3)\cdot\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}=\dfrac{5x+12}{3\sqrt[3]{x+2}}$

$y'=0$ とすると　　$x=-\dfrac{12}{5}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{12}{5}$	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$+$
y	↗	極大 $\frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$	↘	極小 0	↗

ゆえに，y は $x=-\dfrac{12}{5}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt[3]{20}}{25}$，$x=-2$ で極小値 0 をとる。

(3)　$0<x<2\pi$ のとき

$$y'=\frac{\cos x(1-\cos x)-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x-1}$$

よって，$0<x<2\pi$ における y の増減表は右のようになる。

ゆえに，極値はない。

x	0	$\cdots$	2π
y'		$-$	
y		↘	

(4)　$0<x<2\pi$ のとき

$$y'=\frac{\cos x(1+2\sin^2 x)-\sin x\cdot 4\sin x\cos x}{(1+2\sin^2 x)^2}=\frac{\cos x(1-2\sin^2 x)}{(1+2\sin^2 x)^2}$$

$y'=0$ とすると　　$\cos x=0$　または　$1-2\sin^2 x=0$

$0<x<2\pi$ であるから，$\cos x=0$ より　　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

また，$1-2\sin^2 x=0$ から　　$\sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0<x<2\pi$ であるから，$\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より　　$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$

$\sin x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より　　$x=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 $\frac{\sqrt{2}}{4}$	↘	極小 $\frac{1}{3}$	↗	極大 $\frac{\sqrt{2}}{4}$	↘	極小 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$	↗	極大 $-\frac{1}{3}$	↘	極小 $-\frac{\sqrt{2}}{4}$	↗	0

ゆえに，y は $x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ で極大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；$x=\dfrac{\pi}{2}$ で極小値 $\dfrac{1}{3}$；

$x=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$ で極小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；$x=\dfrac{3}{2}\pi$ で極大値 $-\dfrac{1}{3}$　をとる。

(5)　この関数の定義域は　　$x>0$

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

$y'=0$ とすると　　$x=\sqrt{e}$

よって，y の増減表は右のようになる。

ゆえに，y は $x=\sqrt{e}$ で極大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		↗	極大 $\frac{1}{2e}$	↘

(6)　$y'=3x^2e^{-3x}+x^3e^{-3x}\cdot(-3)=3x^2(1-x)e^{-3x}$

$y'=0$ とすると　　$x=0$，1

よって，y の増減表は右のようになる。

ゆえに，y は $x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{e^3}$ をとる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	↗	0	↗	極大 $\frac{1}{e^3}$	↘

$\boxed{20}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x-a}{x^2+x+1}$ が $x=-1$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=0$

解説

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+x+1)-(x-a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-x^2+2ax+a+1}{(x^2+x+1)^2}$$

$f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるならば　　$f'(-1)=0$

よって　　$-1-2a+a+1=0$　　　ゆえに　　$a=0$

逆に，$a=0$ のとき　　$f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

$$f'(x)=\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 1$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -1	↗	極大 $\frac{1}{3}$	↘

よって，$f(x)$ は $x=-1$ で極小値 -1 をとる。

ゆえに　　$a=0$

$\boxed{21}$ (1)　関数 $y=xe^{-x^2+x}$ の極値を求めよ。

(2)　2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，$F(x)=xe^{f(x)}$ で定義された関数 $y=F(x)$ が極値をもつための，定数 a，b，c についての必要十分条件を求めよ。

解答　(1)　$x=-\dfrac{1}{2}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$，$x=1$ で極大値 1

(2)　$8a<b^2$，$a\fallingdotseq 0$，c は任意の実数

解説

(1)　$y'=1\cdot e^{-x^2+x}+x(-2x+1)e^{-x^2+x}=-(2x+1)(x-1)e^{-x^2+x}$

$y'=0$ とすると　　$x=-\dfrac{1}{2}$，1

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$	↗	極大 1	↘

よって，y は $x=-\dfrac{1}{2}$ で極小値 $-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$，$x=1$ で極大値 1 をとる。

(2)　$F'(x)=1\cdot e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}=\{xf'(x)+1\}e^{f(x)}$

$=\{x(2ax+b)+1\}e^{f(x)}=(2ax^2+bx+1)e^{f(x)}$

関数 $y=F(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，方程式 $F'(x)=0$ が実数解をもち，かつその解の前後で $F'(x)$ の符号が変わることである。

$F'(x)=0$ とすると，$e^{f(x)}>0$ であるから　　$2ax^2+bx+1=0$　……①

$f(x)=ax^2+bx+c$ は 2 次関数であるから　　$a\fallingdotseq 0$　……②

よって，① は x の 2 次方程式で，① の左辺を $g(x)$ とすると，$g(x)$ は 2 次関数である。

① が異なる 2 つの実数解をもてば，$y=g(x)$ のグラフは，x 軸と異なる 2 点で交わり，その前後で符号が変わる。

よって，① の判別式を D とすると，求める必要十分条件は　　$D>0$　かつ　②

$D=b^2-4\cdot 2a\cdot 1=b^2-8a>0$ から　　$8a<b^2$　……③

②，③ から，求める a，b，c についての必要十分条件は

$8a<b^2$，$a\fallingdotseq 0$，c は任意の実数

$\boxed{22}$ 関数 $y=x+\dfrac{a}{x-1}$ の極大値が -1 となるように，定数 a の値を定めよ。ただし，$a\fallingdotseq 0$ とする。

解答　$a=1$

解説

この関数の定義域は　　$x\fallingdotseq 1$

$$y'=1-\frac{a}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-a}{(x-1)^2}$$

$a<0$ のとき

常に $y'>0$ であるから y は極値をもたない。

$a>0$ のとき

$y'=0$ とすると　　$x=1\pm\sqrt{a}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$1-\sqrt{a}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘		↘	極小	↗

したがって，y は $x=1-\sqrt{a}$ で極大値をとる。

よって，極大値が -1 であるとき　　$(1-\sqrt{a})+\dfrac{a}{(1-\sqrt{a})-1}=-1$

これを解いて　　$a=1$

$\boxed{23}$ 関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+1}$ が $x=2$ で極小値 -1 をとるように，定数 a，b の値を定めよ。

また，$f(x)$ の極大値を求めよ。

解答　$a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$；$x=-\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{3}{2}$

解説

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2+1)-(ax^2+bx+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{bx^2-2(a-1)x-b}{(x^2+1)^2}$$

$x=2$ で極小値 -1 をとるとき　　$f'(2)=0$，$f(2)=-1$

$f'(2)=0$ から　　$-4a+3b+4=0$　……①

$f(2)=-1$ から　　$\frac{4a+2b+1}{5}=-1$　……②

①，② を解いて　　$a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$

逆に，$a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$ のとき

$$f(x)=\frac{-x^2-4x+2}{2(x^2+1)}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-3x-2}{(x^2+1)^2}=\frac{(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-\frac{1}{2}$，2

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{3}{2}$	↘	極小 -1	↗

よって，$f(x)$ は $x=2$ で極小値 -1 をとる。

ゆえに　　$a=-\frac{1}{2}$，$b=-2$

また，$f(x)$ は $x=-\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

24 関数 $f(x)=x+\frac{2a}{x}$ の極小値が 2 となるように，定数 a の値を定めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

解答　$a=\frac{1}{2}$

解説

この関数の定義域は $x\neq 0$ で　　$f'(x)=1-\frac{2a}{x^2}=\frac{x^2-2a}{x^2}$

$a<0$ のとき　常に $f'(x)>0$ であるから極値をもたない。

$a>0$ のとき　$f'(x)=\frac{(x+\sqrt{2a})(x-\sqrt{2a})}{x^2}$

このとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2a}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘		↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は $x=\sqrt{2a}$ で極小値をとる。

このとき，極小値は　　$f(\sqrt{2a})=2\sqrt{2a}$

条件より　　$2\sqrt{2a}=2$

ゆえに　　$a=\frac{1}{2}$

25 (1) 曲線 $y=x\cos x$ の接線で，原点を通るものをすべて求めよ。

(2) 関数 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}$ の極値を求めよ。

(3) $x\log x-2x$ の $x>0$ における最小値は $\boxed{}$ である。

(4) 曲線 $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ の $x>0$ における変曲点の x 座標を求めよ。

解答　(1) $y=x$，$y=-x$　　(2) $x=-2$ で極小値 $-\frac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 1

(3) $-e$　　(4) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

解説

(1) $y'=\cos x-x\sin x$

原点を通る接線の接点の座標を $(t,\ t\cos t)$ とすると，接線の方程式は

$$y-t\cos t=(\cos t-t\sin t)(x-t)$$

すなわち　　$y=(\cos t-t\sin t)x+t^2\sin t$　……①

この直線が原点を通るから　　$t^2\sin t=0$

よって　　$t^2=0$　または　$\sin t=0$

ゆえに　　$t=0$　または　$t=n\pi$　(n は整数)

まとめると　　$t=n\pi$　(n は整数)

このとき，① は　　$y=(\cos n\pi)x$

n が偶数のとき　　$\cos n\pi=1$

n が奇数のとき　　$\cos n\pi=-1$

したがって，求める接線の方程式は　　$y=x$，$y=-x$

(2) $f'(x)=\frac{2(x^2+2)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$$=-\frac{2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-2$，1

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	1	↘

よって，$f(x)$ は $x=-2$ で極小値 $-\frac{1}{2}$，

$x=1$ で極大値 1 をとる。

(3) $f(x)=x\log x-2x$ とおくと

$$f'(x)=\log x+1-2=\log x-1$$

$x>0$ において $f'(x)=0$ とすると　　$x=e$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e$	↗

よって，$f(x)$ は $x=e$ で最小値 $-e$ をとる。

したがって，$x\log x-2x$ の $x>0$ における最小値は　$-e$

(4) $y'=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$y''=\left(\frac{2}{x^3}\right)'e^{-\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'=\frac{2(2-3x^2)}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$x>0$ で，$y''=0$ とすると　　$x=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$0<x<\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき　$y''>0$，　$\frac{\sqrt{6}}{3}<x$ のとき　$y''<0$

したがって，変曲点の x 座標は　$\frac{\sqrt{6}}{3}$

26 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y=(x+2)e^x$　　(2) $y=\frac{2x}{x^2+2}$　　(3) $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) $y=\frac{\log x}{x^2}$　　(5) $y=2\sin x+\cos 2x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

解答　(1) $x=-3$ で極小値 $-\frac{1}{e^3}$

(2) $x=-\sqrt{2}$ で極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\sqrt{2}$ で極大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $x=1$ で極大値 $\sqrt{2}$

(4) $x=\sqrt{e}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$

(5) $x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ で極大値 $\frac{3}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$ で極小値 1，$x=\frac{3}{2}\pi$ で極小値 -3

解説

(1) $y'=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

$y'=0$ とすると　　$x=-3$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 $-\frac{1}{e^3}$	↗

よって　　$x=-3$ で極小値 $-\frac{1}{e^3}$

(2) $y'=\frac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=-\frac{2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{2}$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	極大 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘

よって　　$x=-\sqrt{2}$ で極小値 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$x=\sqrt{2}$ で極大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $y'=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-(x+1)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$

$= \dfrac{x^2+1-(x+1)x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$y'=0$ とすると　　$x=1$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	極大 $\sqrt{2}$	↘

よって　　$x=1$ で極大値 $\sqrt{2}$

(4)　定義域は　　$x>0$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-(\log x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2\log x}{x^3}$$

$y'=0$ とすると　　$\log x=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		↗	極大 $\dfrac{1}{2e}$	↘

よって　　$x=\sqrt{e}$ で極大値 $\dfrac{1}{2e}$

(5)　$y'=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-2\cdot 2\sin x\cos x$

$=2\cos x(1-2\sin x)$

$0<x<2\pi$ において $y'=0$ となる x の値は

$\cos x=0$ から　　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ から　　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\dfrac{3}{2}$	↘	極小 1	↗	極大 $\dfrac{3}{2}$	↘	極小 -3	↗	1

よって　　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ で極大値 $\dfrac{3}{2}$,

$x=\dfrac{\pi}{2}$ で極小値 1，$x=\dfrac{3}{2}\pi$ で極小値 -3

27 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=|x^2+2x|$　　　(2)　$y=|x|\sqrt{3-x}$　　　(3)　$y=\sqrt[5]{x^2}$

解答　(1)　$x=-1$ で極大値 1；$x=-2$，0 で極小値 0

(2)　$x=2$ で極大値 2，$x=0$ で極小値 0　　(3)　$x=0$ で極小値 0

解説

(1)　[1]　$x\leqq -2$，$0\leqq x$ のとき　　$y=x^2+2x$

よって，$x<-2$，$0<x$ のとき　　$y'=2x+2$

この範囲で $y'=0$ となる x の値は存在しない。

[2]　$-2\leqq x\leqq 0$ のとき　　$y=-x^2-2x$

よって，$-2<x<0$ のとき　　$y'=-2x-2$

この範囲で $y'=0$ となる x の値は　　$x=-1$

[3]　関数 y は $x=-2$，0 で微分可能でない。

以上から，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$		$+$	0	$-$		$+$
y	↘	極小 0	↗	極大 1	↘	極小 0	↗

よって　　$x=-1$ で極大値 1；

$x=-2$，0 で極小値 0

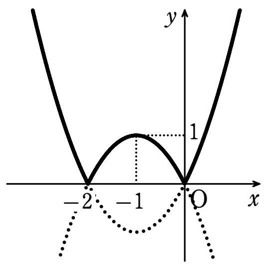
参考　$y=|x^2+2x|$ のグラフは右の図のようになる。

グラフから

$x=-1$ で極大値 1；

$x=-2$，0 で極小値 0

をとることがわかる。



(2)　$3-x\geqq 0$ であるから，定義域は　　$x\leqq 3$

[1]　$x\leqq 0$ のとき　　$y=-x\sqrt{3-x}$

よって，$x<0$ のとき

$$y'=-\sqrt{3-x}+\frac{x}{2\sqrt{3-x}}=\frac{3(x-2)}{2\sqrt{3-x}}$$

この範囲では　　$y'<0$

[2]　$0\leqq x\leqq 3$ のとき　　$y=x\sqrt{3-x}$

よって，$0<x<3$ のとき　　$y'=-\dfrac{3(x-2)}{2\sqrt{3-x}}$

この範囲で $y'=0$ となる x の値は　　$x=2$

[3]　関数 y は $x=0$，3 で微分可能でない。

以上から，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'	$-$		$+$	0	$-$	
y	↘	極小 0	↗	極大 2	↘	0

よって　　$x=2$ で極大値 2,

$x=0$ で極小値 0

(3)　$y=x^{\frac{2}{5}}$ であるから

$x\neq 0$ のとき　　$y'=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

関数 y は $x=0$ で微分可能でない。

y の増減表は右のようになる。

よって　　$x=0$ で極小値 0

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$		$+$
y	↘	極小 0	↗

28 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{4x}{x^2+1}$　　　(2)　$y=e^x\cos x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

解答　(1)　$x=1$ で極大値 2，$x=-1$ で極小値 -2

(2)　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$，$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$

解説

(1)　$y'=\dfrac{4(x^2+1)-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 1$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

よって　　$x=1$ で極大値 2,

$x=-1$ で極小値 -2

(2)　$y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(-\sin x+\cos x)$

$=\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$y'=0$ とすると　　$\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)=0$　……①

$0<x<2\pi$ のとき，$\dfrac{3}{4}\pi<x+\dfrac{3}{4}\pi<2\pi+\dfrac{3}{4}\pi$ であるから，

① より　　$x+\dfrac{3}{4}\pi=\pi,\ 2\pi$

すなわち　　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	極大 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	極小 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$	↗	$e^{2\pi}$

よって　　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$,

$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$

参考　$y'=0$ となる x の値は次のように求めてもよい。

$y'=0$ とすると，$e^x>0$ より　　$\sin x=\cos x$

このとき，$\cos x\neq 0$ であるから，両辺を $\cos x$ で割ると　　$\dfrac{\sin x}{\cos x}=1$

すなわち　　$\tan x=1$

$0<x<2\pi$ の範囲でこれを解くと　　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

29 次の関数に極値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$　　　(2)　$y=(x+3)\sqrt[3]{(x+2)^2}$

(3)　$y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$　　(4)　$y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(5)　$y=2\cos x+\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

解答　(1)　$x=1$ で極大値 -1，$x=3$ で極小値 3

(2)　$x=-\dfrac{12}{5}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt[3]{20}}{25}$，$x=-2$ で極小値 0　　(3)　極値はない

(4)　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で極大値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(5)　$x=\dfrac{\pi}{6}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解説

(1)　$x-2\neq 0$ であるから，定義域は

$x\neq 2$

x^2-3x+3 を $x-2$ で割った商は $x-1$，余りは 1 であるから，

$$y=x-1+\frac{1}{x-2}$$

と変形できる。

よって　$y'=1-\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

$y'=0$ とすると　$x=1$，3

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↗	極大 -1	↘		↘	極小 3	↗

よって　$x=1$ で極大値 -1，

$x=3$ で極小値 3

(2)　$x+2\neq 0$ すなわち $x\neq -2$ のとき

$y'=1\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}+(x+3)\cdot\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+2}}$

$=\dfrac{3(x+2)+2(x+3)}{3\sqrt[3]{x+2}}=\dfrac{5x+12}{3\sqrt[3]{x+2}}$

$y'=0$ とすると　$x=-\dfrac{12}{5}$

関数 y は $x=-2$ で微分可能でない。

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{12}{5}$	$\cdots$	-2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$+$
y	↗	極大 $\dfrac{3\sqrt[3]{20}}{25}$	↘	極小 0	↗

よって　$x=-\dfrac{12}{5}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt[3]{20}}{25}$，

$x=-2$ で極小値 0

(3)　$1-\sin x\neq 0$ であるから，定義域は

$$0\leqq x<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<x\leqq 2\pi$$

$y'=\dfrac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$

$=\dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\dfrac{1}{1-\sin x}$

$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<x\leqq 2\pi$ では　$1-\sin x>0$

よって，$y'>0$ であるから，極値はない。

(4)　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ を解くと

$$x+\frac{\pi}{4}=\pi,\ 2\pi$$

よって　$x=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

ゆえに，関数の定義域は

$$0\leqq x<\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<x\leqq 2\pi$$

また　$y'=\dfrac{-(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$

$y'=0$ とすると　$\sin x-\cos x=0$

すなわち　$\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$0<x<2\pi$ の範囲で，これを解くと

$$x-\frac{\pi}{4}=0,\ \pi$$

よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	1	↘	極小	↗		↗	極大	↘		↘	1

よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で極大値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(5)　$y'=-2\sin x+2\cos 2x=-2\sin x+2(1-2\sin^2 x)$

$=-4\sin^2 x-2\sin x+2=-2(2\sin^2 x+\sin x-1)$

$=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)$

$0<x<2\pi$ において $y'=0$ となる x の値は

$\sin x=-1$ から　$x=\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ から　$x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

したがって，y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	2	↗	極大	↘	極小	↗	0	↗	2

よって　$x=\dfrac{\pi}{6}$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

30　関数 $f(x)=\dfrac{x^2-5x+a}{x-1}$ が $x=2$ で極値をとるように，定数 a の値を定めよ。また，このとき，$f(x)$ の極値を求めよ。

解答　$a=5$，$x=0$ で極大値 -5，$x=2$ で極小値 -1

解説

$x-1\neq 0$ であるから，定義域は　$x\neq 1$

$f'(x)=\dfrac{(2x-5)(x-1)-(x^2-5x+a)\cdot 1}{(x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x+5-a}{(x-1)^2}$

$f(x)$ が $x=2$ で極値をとるための条件は　$f'(2)=0$

すなわち　$5-a=0$

これを解いて　$a=5$

このとき　$f(x)=\dfrac{x^2-5x+5}{x-1}$，$f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -5	↘		↘	極小 -1	↗

したがって　$a=5$

また，$x=0$ で極大値 -5，

$x=2$ で極小値 -1 をとる。

31　関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x^2+2}$ が $x=1$ で極小値 -1 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。また，$f(x)$ の極大値を求めよ。

解答　$a=2$，$b=-6$；$x=-2$ で極大値 $\dfrac{7}{2}$

解説

$f'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x^2+2)-(ax^2+bx+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$=-\dfrac{bx^2-2(2a-1)x-2b}{(x^2+2)^2}$

$x=1$ で極小値 -1 をとるから

$f'(1)=0$，$f(1)=-1$

よって　$-4a-b+2=0$，$\dfrac{a+b+1}{3}=-1$

すなわち　$4a+b=2$，$a+b=-4$

これを解いて　$a=2$，$b=-6$

このとき　$f(x)=\dfrac{2x^2-6x+1}{x^2+2}$，$f'(x)=\dfrac{6(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$

ゆえに，次の増減表が得られ，条件を満たす。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $\frac{7}{2}$	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

したがって　$a=2$，$b=-6$

また　$x=-2$ で極大値 $\frac{7}{2}$

$\boxed{32}$ $a \fallingdotseq 0$ とする。関数 $f(x)=x+\frac{a}{x+1}$ が極大値 -3 をとるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=1$

解説

定義域は $x \fallingdotseq -1$ である。　$f'(x)=1-\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-a}{(x+1)^2}$

$a<0$ のとき　$f'(x)>0$　よって，$f(x)$ は常に増加し，極値をもたない。

$a>0$ のとき

$f'(x)=0$ とすると

$x=-1\pm\sqrt{a}$

ゆえに，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-1-\sqrt{a}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-1+\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	/	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，極大値は　$f(-1-\sqrt{a})=-1-\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}}=-1-2\sqrt{a}$

条件から　$-1-2\sqrt{a}=-3$　これを解いて　$a=1$（$a>0$ を満たす）