群数列クイズ

$\boxed{1}$ 正の奇数の列を，次のように群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の奇数が入るものとする。

$$1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ \cdots\cdots$$

第 1 群　第 2 群　　第 3 群

(1)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。

(2)　第 n 群にあるすべての奇数の和を求めよ。

解答　(1)　n^2-n+1　　(2)　n^3

解説

(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の

個数は　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{1}{2}(n-1)n$

よって，第 n 群の最初の奇数は，もとの奇数の列の

$\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 番目の項であるから

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，第 n 群の最初の奇数は　n^2-n+1

(2)　第 n 群にある奇数の列は，初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列である。よって，求める和は

$$\frac{1}{2}n\{2(n^2-n+1)+(n-1)\cdot 2\}=n^3$$

$\boxed{2}$ 自然数の列を，次のように群に分ける。ただし，第 n 群には $(2n-1)$ 個の自然数が入るものとする。

$$1 \mid 2,\ 3,\ 4 \mid 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \mid 10,\ \cdots\cdots$$

第 1 群　第 2 群　　　第 3 群

(1)　第 n 群の最初の自然数を求めよ。

(2)　第 10 群にあるすべての自然数の和を求めよ。

解答　(1)　n^2-2n+2　　(2)　1729

解説

(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)=(n-1)^2$$

よって，第 n 群の最初の自然数は，もとの自然数の列の $\{(n-1)^2+1\}$ 番目の項であるから

$$(n-1)^2+1=n^2-2n+2$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，第 n 群の最初の自然数は

$$n^2-2n+2$$

(2)　第 10 群の最初の自然数は，(1) から

$$10^2-2\cdot 10+2=82$$

また，第 10 群の項数は

$$2\cdot 10-1=19$$

よって，第 10 群にある自然数の列は，初項 82，公差 1，項数 19 の等差数列である。

ゆえに，求める和は

$$\frac{1}{2}\cdot 19(2\cdot 82+18\cdot 1)=1729$$

$\boxed{3}$ 自然数 n が n 個ずつ続く次のような数列がある。

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \cdots\cdots$$

(1)　自然数 n が初めて現れるのは第何項か。

(2)　第 100 項を求めよ。

解答　(1)　第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項　　(2)　14

解説

(1)　与えられた数列を次のような群に分ける。

$$1 \mid 2,\ 2 \mid 3,\ 3,\ 3 \mid 4,\ 4,\ 4,\ 4 \mid 5,\ \cdots\cdots$$

第 1 群 第 2 群　第 3 群　　　第 4 群　　　……

第 k 群には k 個の自然数が入っているから，$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までの項数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{1}{2}(n-1)n$$

n が初めて現れるのは第 n 群の最初の項，すなわち 第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項である。これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，自然数 n が初めて現れるのは第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項である。

(2)　第 1 群から第 13 群までの項数は　$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$

第 1 群から第 14 群までの項数は　$\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15=105$

よって，第 92 項から第 105 項は第 14 群の項である。

したがって，第 100 項は　14

$\boxed{4}$ 自然数の列を次のように区切っていき，第 k 群が 2^{k-1} 個の自然数を含むようにする。

$$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6,\ 7 \mid 8,\ \cdots\cdots$$

第 1 群　第 2 群　　第 3 群

[各 15 点]

(1)　第 n 群の最初の数を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる数の和を求めよ。

解答　(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある自然数の個数は

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-2}=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}-1$$

よって，第 n 群の最初の数は，2^{n-1} 番目の自然数，すなわち 2^{n-1} である。

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，第 n 群の最初の数は　2^{n-1}

(2)　第 n 群にある自然数の列は，初項 2^{n-1}，公差 1，項数 2^{n-1} の等差数列であるから，その和は

$$\frac{2^{n-1}}{2}\{2\cdot 2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\cdot 1\}=3\cdot 2^{2n-3}-2^{n-2}$$

解説

(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある自然数の個数は

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-2}=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}-1$$

よって，第 n 群の最初の数は，2^{n-1} 番目の自然数，すなわち 2^{n-1} である。

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，第 n 群の最初の数は　2^{n-1}

(2)　第 n 群にある自然数の列は，初項 2^{n-1}，公差 1，項数 2^{n-1} の等差数列であるから，その和は

$$\frac{2^{n-1}}{2}\{2\cdot 2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\cdot 1\}=3\cdot 2^{2n-3}-2^{n-2}$$

$\boxed{5}$ 正の偶数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ \cdots\cdots$$

第 1 群　第 2 群　　第 3 群　　　　第 4 群

(1)　第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2)　第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

解答　(1)　n^2-n+2　　(2)　1010

解説

(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

求める数は，偶数の列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項であるから

$$2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}=n^2-n+2$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，第 n 群の最初の数は　　n^2-n+2

(2)　第 10 群の最初の数は，(1) の結果を用いて　　$10^2-10+2=92$

よって，和 S は，初項 92，公差 2，項数 10 の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot 92+(10-1)\cdot 2\}=1010$$

$\boxed{6}$ 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ 15,\ 17,\ 19 \mid 21,\ \cdots\cdots$$

第 1 群　第 2 群　　第 3 群　　　　第 4 群

(1)　第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2)　第 15 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

解答　(1)　n^2-n+1　　(2)　3375

解説

(1)　$n \geqq 2$ のとき，正の奇数の列の第 k 項は $2k-1$ である。

第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

求める数は，正の奇数の列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項であるから

$$2\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=n^2-n+1$$

これは，$n=1$ のときにも成り立つ。

よって，第 n 群の最初の数は　n^2-n+1

(2)　第 15 群の最初の数は，(1) の結果を用いて　$15^2-15+1=211$

よって，和 S は，初項 211，公差 2，項数 15 の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot15\{2\cdot211+(15-1)\cdot2\}=3375$$

$\boxed{7}$ 自然数の列を次のような群に分ける。ただし，第 n 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

$$\underset{第1群}{1}\ \Big|\ \underset{第2群}{2,\ 3,\ 4}\ \Big|\ \underset{第3群}{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9}\ \Big|\ 10,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最初の自然数を n の式で表せ。

(2)　第 n 群に入るすべての自然数の和 S を求めよ。

解答　(1)　n^2-2n+2　　(2)　$(2n-1)(n^2-n+1)$

解説

(1)　$n\geqq2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)$$
$$=(n-1)^2$$

この自然数の個数は，第 $(n-1)$ 群の最後の数と一致する。

よって，第 n 群の最初の自然数は

$$(n-1)^2+1=n^2-2n+2$$

これは，$n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，第 n 群の最初の数は　n^2-2n+2

(2)　和 S は，初項 n^2-2n+2，公差 1，項数 $(2n-1)$ の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}(2n-1)[2(n^2-2n+2)+\{(2n-1)-1\}\cdot1]$$
$$=(2n-1)(n^2-n+1)$$

$\boxed{8}$ 分数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の分数が入り，その分母は n，分子は 1 から n までの自然数であるとする。

$$\underset{第1群}{\frac{1}{1}}\ \Big|\ \underset{第2群}{\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}}\ \Big|\ \underset{第3群}{\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}}\ \Big|\ \underset{第4群}{\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

(1)　$\frac{3}{10}$ は第何項か。　　(2)　第 100 項を求めよ。

解答　(1)　第 48 項　　(2)　$\frac{9}{14}$

解説

(1)　$\frac{3}{10}$ は第 10 群の 3 番目の数である。

第 1 群から第 9 群までに入る数の個数は

$$\frac{1}{2}\cdot9(9+1)=45$$

よって，$45+3=48$ から，$\frac{3}{10}$ はこの数列の第 48 項である。

(2)　第 100 項が第 n 群に入る数であるとすると

$$\sum_{k=1}^{n-1}k<100\leqq\sum_{k=1}^{n}k$$

すなわち　$(n-1)n<200\leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は　　$n=14$

$$100-\sum_{k=1}^{13}k=100-\frac{1}{2}\cdot13(13+1)=100-91=9$$

であるから，第 100 項は　　$\frac{9}{14}$

$\boxed{9}$ 正の偶数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

$$2\ |\ 4,\ 6,\ 8\ |\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18\ |\ 20,\ \cdots\cdots$$

[10点×2＝20点]

(1)　第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2)　第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

解答　(1)　$n\geqq2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の総数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+\{2(n-1)-1\}=(n-1)^2$$

よって，第 n 群の最初の数は　　$2\{(n-1)^2+1\}=2n^2-4n+4$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。よって，第 n 群の最初の数は　$2n^2-4n+4$

(2)　第 n 群には $(2n-1)$ 個の項が入るので，第 10 群に入る項数は　$2\cdot10-1=19$

また，第 10 群の最初の数は，(1) の結果を用いて　$2\cdot10^2-4\cdot10+4=164$

よって，和 S は，初項 164 公差 2，項数 19 の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot19\{2\cdot164+(19-1)\cdot2\}=3458$$

解説

(1)　$n\geqq2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の総数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+\{2(n-1)-1\}=(n-1)^2$$

よって，第 n 群の最初の数は　　$2\{(n-1)^2+1\}=2n^2-4n+4$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，第 n 群の最初の数は　$2n^2-4n+4$

(2)　第 n 群には $(2n-1)$ 個の項が入るので，第 10 群に入る項数は　$2\cdot10-1=19$

また，第 10 群の最初の数は，(1) の結果を用いて　$2\cdot10^2-4\cdot10+4=164$

よって，和 S は，初項 164 公差 2，項数 19 の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot19\{2\cdot164+(19-1)\cdot2\}=3458$$

$\boxed{10}$ 分数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には 2^{n-1} 個の分数が入る。

$$\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\,\Big|\,\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}\,\Big|\,\frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16},\ \cdots\cdots,\ \frac{15}{16}\,\Big|\,\frac{1}{32},\ \cdots\cdots$$

[15点×2＝30点]

(1)　$\frac{7}{256}$ は第何項か。　　(2)　この数列の第 800 項を求めよ。

解答　(1)　$\frac{7}{256}=\frac{7}{2^8}$ であるから，第 8 群の 4 番目の項である。

第 n 群には 2^{n-1} 個の分数が入るから

$$\sum_{k=1}^{7}2^{k-1}+4=\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}+4=131$$

よって，$\frac{7}{256}$ は　　第 131 項

(2)　第 800 項が第 n 群に含まれるとすると　　$\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}<800\leqq\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$

よって　　$2^{n-1}-1<800\leqq2^n-1$　すなわち　$2^{n-1}<801\leqq2^n$

これを満たす自然数 n は　　$n=10$

第 9 群までの項数は　　$2^9-1=511$

よって，第 800 項は第 10 群の $800-511=289$ 番目の項である。

数列 1，3，5，7，…… の第 n 項は $2n-1$ であるから，第 10 群の 289 番目の数は　　$\frac{2\times289-1}{2^{10}}=\frac{577}{1024}$

したがって，第 800 項は　　$\frac{577}{1024}$

解説

(1)　$\frac{7}{256}=\frac{7}{2^8}$ であるから，第 8 群の 4 番目の項である。

第 n 群には 2^{n-1} 個の分数が入るから

$$\sum_{k=1}^{7}2^{k-1}+4=\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}+4=131$$

よって，$\frac{7}{256}$ は　　第 131 項

(2)　第 800 項が第 n 群に含まれるとすると　　$\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}<800\leqq\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$

よって　　$2^{n-1}-1<800\leqq2^n-1$　すなわち　$2^{n-1}<801\leqq2^n$

これを満たす自然数 n は　　$n=10$

第 9 群までの項数は　　$2^9-1=511$

よって，第 800 項は第 10 群の $800-511=289$ 番目の項である。

数列 1，3，5，7，…… の第 n 項は $2n-1$ であるから，第 10 群の 289 番目の数は

$$\frac{2\times289-1}{2^{10}}=\frac{577}{1024}$$

したがって，第 800 項は　　$\frac{577}{1024}$

$\boxed{11}$ 自然数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

$$\underset{第1群}{1}\ \Big|\ \underset{第2群}{2,\ 3}\ \Big|\ \underset{第3群}{4,\ 5,\ 6}\ \Big|\ \underset{第4群}{7,\ 8,\ 9,\ 10}\ \Big|\ 11,\ \cdots\cdots$$

(1)　$n\geqq2$ のとき，第 n 群の最初の数を n の式で表せ。

(2)　第 10 群に入るすべての数の和 S を求めよ。

解答　(1)　$\frac{1}{2}n(n-1)+1$　　(2)　505

解説

自然数の列の第 k 項は k である。

(1)　第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって，第 n 群の最初の数は，もとの自然数の列の第 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 項であるから

$$\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

(2)　第 10 群の最初の数は，(1) の結果を用いて

$$\frac{1}{2}\cdot10(10-1)+1=46$$

よって，和 S は，初項 46，公差 1，項数 10 の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot 46+(10-1)\cdot 1\}=505$$

12 正の奇数の数列を

$$1\mid 3,\ 5\mid 7,\ 9,\ 11\mid 13,\ 15,\ 17,\ 19\mid 21,\ \cdots\cdots$$

のように，第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき

(1)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。　　(2)　第 n 群の総和を求めよ。

(3)　621 は第何群の何番目に並ぶ数か。

解答　(1)　n^2-n+1　　(2)　n^3　　(3)　第 25 群の 11 番目

解説

(1)　$n\geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって，第 n 群の最初の奇数は $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 番目の奇数で

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2)　(1) から，第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列をなす。

よって，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{2\cdot(n^2-n+1)+(n-1)\cdot 2\}=n^3$$

(3)　621 が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2-n+1\leqq 621<(n+1)^2-(n+1)+1$$

よって　$(n-1)n\leqq 620<n(n+1)$　……①

$(n-1)n$，$n(n+1)$ は単調に増加し，$24\cdot 25=600$，$25\cdot 26=650$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=25$

621 が第 25 群の m 番目であるとすると　$(25^2-25+1)+(m-1)\cdot 2=621$

ゆえに　$601+2m-2=621$　　よって　$m=11$

したがって，621 は第 25 群の 11 番目に並ぶ数である。

別解　(前半)　$2k-1=621$ とすると　$k=311$

よって，621 はもとの数列において，311 番目の奇数である。

621 が第 n 群に含まれるとすると　$\frac{1}{2}n(n-1)<311\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

ゆえに　$n(n-1)<622\leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は，上の解答と同様にして　$n=25$

13 自然数の列を，次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\underbrace{1,\ 2,\ 3}_{\text{第1群}}\mid\underbrace{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8}_{\text{第2群}}\mid\underbrace{9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15}_{\text{第3群}}\mid 16,\ \cdots\cdots$$

(1)　第 n 群の最初の数と最後の数を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれるすべての数の和を求めよ。

(3)　2014 は第何群の何番目の数であるか。

解答　(1)　最初の数は n^2，最後の数は n^2+2n　　(2)　$n(n+1)(2n+1)$

(3)　第 44 群の 79 番目

解説

(1)　$n\geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=n^2-1\ (\text{個})$$

よって，第 n 群の最初の数は，自然数の列の第 $\{(n^2-1)+1\}=n^2$ (項) であり，

このことは $n=1$ のときも成り立つ。ゆえに，第 n 群の最初の数は　n^2

また，第 n 群の最後の数は，第 n 群までに含まれる自然数の列の項の個数に一致するから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n^2+2n$$

(2)　(1) より，第 n 群の初項は n^2，末項は n^2+2n であり，第 n 群には $(2n+1)$ 個の数がある。

よって，第 n 群に含まれるすべての数の和は

$$\frac{1}{2}(2n+1)\{n^2+(n^2+2n)\}=n(n+1)(2n+1)$$

(3)　2014 が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2\leqq 2014<(n+1)^2\quad\cdots\cdots①$$

n^2，$(n+1)^2$ は単調に増加し，$44^2=1936$，$45^2=2025$ であるから，

① を満たす自然数 n は　$n=44$

2014 が第 44 群の m 番目であるとすると

$$m=2014-1936+1=79$$

したがって，2014 は第 44 群の 79 番目の数である。

14 数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，…… において，初項から第 800 項までの和を求めよ。

解答　$\frac{16200}{41}$

解説

分母が等しいものを群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big|\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \cdots\cdots$$

第 1 群から第 n 群までの項数は　$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

第 800 項が第 n 群に属するとすると　$\frac{1}{2}(n-1)n<800\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

すなわち　$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

$(n-1)n$，$n(n+1)$ は単調に増加し，$39\cdot 40=1560$，$40\cdot 41=1640$ であるから

$n=40$

よって，第 800 項は第 40 群の　$800-780=20$ (番目) の数である。

また，第 n 群に属するすべての数の和は

$$\frac{1}{n+1}(1+2+\cdots\cdots+n)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n}{2}$$

したがって，初項から第 800 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{39}\frac{k}{2}+\frac{1}{41}(1+2+\cdots\cdots+20)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40+\frac{1}{41}\cdot\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21$$

$$=\frac{10(39\cdot 41+21)}{41}=\frac{16200}{41}$$

15 数列 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{3}{16}$，…… において，$\frac{9}{128}$ は第何項であるか。

また，初項からその項までの和を求めよ。

解答　第 68 項，$\frac{4057}{128}$

解説

分母が等しいものを群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}\ \Big|\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \cdots\cdots$$

第 n 群の項数は　2^{n-1}

(前半)　$\frac{9}{128}=\frac{2\cdot 5-1}{2^7}$ であるから，$\frac{9}{128}$ は第 7 群の 5 番目の数である。

第 1 群から第 6 群までの項数は

$$1+2+\cdots\cdots+2^5=\frac{1\cdot(2^6-1)}{2-1}=63$$

$63+5=68$ であるから，$\frac{9}{128}$ は　第 68 項

(後半)　第 n 群に属する数の総和は

$$\frac{1}{2^n}\{1+3+\cdots\cdots+(2\cdot 2^{n-1}-1)\}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\{1+(2\cdot 2^{n-1}-1)\}=2^{n-2}$$

よって，初項から第 68 項までの和は

$$2^{-1}+2^0+2^1+\cdots\cdots+2^4+\frac{1}{2^7}(1+3+5+7+9)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^6-1}{2-1}+\frac{25}{2^7}=\frac{4057}{128}$$

16 自然数 1，2，3，…… を，右の図のように並べていく。

1	2	5	10	17	…
4	3	6	11	18	…
9	8	7	12	…	…
16	15	14	13	…	…
…	…	…	…	…	…

(1)　左から m 番目，上から m 番目の位置にある自然数を m を用いて表せ。

(2)　90 は左から何番目，上から何番目の位置にあるか。

(3)　自然数 n を $n=k^2+l$ (k は負でない整数，$1\leqq l\leqq 2k+1$) と表すとき，n は左から何番目，上から何番目の位置にあるか。k，l を用いて表せ。

解答　(1)　m^2-m+1　　(2)　左から 10 番目，上から 9 番目

(3)　$1\leqq l\leqq k+1$ のとき　　左から $k+1$ 番目，上から l 番目

$k+2\leqq l\leqq 2k+1$ のとき　左から $2k-l+2$ 番目，上から $k+1$ 番目

解説

並べられた自然数を，次のように区分する。

$$1\mid 2,\ 3,\ 4\mid 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\mid 10,\ 11,\ \cdots\cdots\qquad\cdots\cdots①$$

(1)　① の第 m 群までの項数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2m-1)=m^2\qquad\cdots\cdots②$$

左から m 番目，上から m 番目は，① の第 m 群の m 番目であるから

$$(m-1)^2+m=m^2-m+1$$

(2)　90 が ① の第 m 群に属するとすると　$(m-1)^2<90\leqq m^2$

$9^2<90<10^2$ から，これを満たす自然数 m は　$m=10$

第 9 群までの項数は $9^2=81$ であるから，90 は第 10 群の　$90-81=9$ (番目)

また，第 10 群の中央は 10 番目の項で，$9<10$ である。

よって，90 の位置は　左から 10 番目，上から 9 番目

(3)　① の第 k 群までの項数は，② により　k^2 個

よって，$n=k^2+l$　($1\leqq l\leqq 2k+1$) と表される自然数 n は，① の第 $k+1$ 群の l 番目の項である。

また，第 $k+1$ 群の中央は $k+1$ 番目の項である。

したがって，n の位置は

$1 \leqq l \leqq k+1$ のとき　左から $k+1$ 番目，上から l 番目

$k+2 \leqq l \leqq 2k+1$ のとき　左から $(2k+1)-l+1=2k-l+2$ 番目，
上から $k+1$ 番目

17 自然数を右の図のように並べる。

(1)　n が偶数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(2)　n が奇数のとき，1 番上の段の左から n 番目の数を n の式で表せ。

(3)　1000 は左から何番目，上から何段目にあるか。

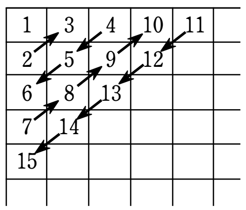
1	3	4	10	11	…
2	5	9	12	…	…
6	8	13	…	…	…
7	14	…	…	…	…
15	17	…	…	…	…
16	…	…	…	…	…

解答　(1)　$\frac{1}{2}n(n+1)$　(2)　$\frac{1}{2}(n^2-n+2)$　(3)　左から 36 番目，上から 10 段目

解説

並べられた自然数を，次のように区切って考える。

$1 \mid 2,\ 3 \mid 4,\ 5,\ 6 \mid 7,\ 8,\ 9,\ 10 \mid \cdots\cdots$　……①



(1)　1 番上の段の左から n 番目の数は，n が偶数のとき，① の第 n 群の末項である。

よって，求める数は　$1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　1 番上の段の左から n 番目の数は，n が奇数のとき，① の第 n 群の初項である。

$n \geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の末項は

$$1+2+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって，n が 3 以上の奇数のとき，求める数は

$$\frac{1}{2}(n-1)n+1=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$$

これは $n=1$ のときにも適する。

ゆえに　$\frac{1}{2}(n^2-n+2)$

(3)　1000 が ① の第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<1000 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

また，$\frac{1}{2}(n-1)n$，$\frac{1}{2}n(n+1)$ は単調に増加する。

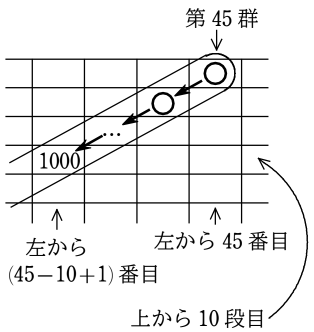
$\frac{44 \cdot 45}{2}=990$，$\frac{45 \cdot 46}{2}=1035$ であるから

$n=45$

よって，1000 は第 45 群の $1000-990=10$ (番目) の数である。

したがって，1000 は，左から

$45-10+1=36$ (番目)，上から 10 段目にある。



18 自然数 p，q の組 $(p,\ q)$ を

(A)　$p+q$ の値の小さい組から大きい組へ

(B)　$p+q$ の値の同じ組では，p の値が大きい組から小さい組へ

という規則に従って，次のように 1 列に並べる。

$(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(1,\ 3)$，……

このとき，初めから 100 番目にある組を求めよ。

解答　(A) により，$p+q$ の値が等しいものを第 $(p+q-1)$ 群とする群を作る。

$(1,\ 1) \mid (2,\ 1),\ (1,\ 2) \mid (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3) \mid (1,\ 4),\ \cdots\cdots$

初めから 100 番目にある組が第 l 群に属するとする。

それぞれの群に含まれる組の個数を考えると　$\frac{(l-1)l}{2}<100 \leqq \frac{l(l+1)}{2}$

$l=14$ のとき　$\frac{(l-1)l}{2}=91$，$\frac{l(l+1)}{2}=105$ であるから，この組は第 14 群に含まれる。

また，$100-91=9$ より，この組は，第 14 群の 9 番目である。

よって　$p+q-1=14$，$q=9$ から求める組は　$(6,\ 9)$

解説

(A) により，$p+q$ の値が等しいものを第 $(p+q-1)$ 群とする群を作る。

$(1,\ 1) \mid (2,\ 1),\ (1,\ 2) \mid (3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3) \mid (1,\ 4),\ \cdots\cdots$

初めから 100 番目にある組が第 l 群に属するとする。

それぞれの群に含まれる組の個数を考えると　$\frac{(l-1)l}{2}<100 \leqq \frac{l(l+1)}{2}$

$l=14$ のとき　$\frac{(l-1)l}{2}=91$，$\frac{l(l+1)}{2}=105$ であるから，この組は第 14 群に含まれる。

また，$100-91=9$ より，この組は，第 14 群の 9 番目である。

よって　$p+q-1=14$，$q=9$ から求める組は　$(6,\ 9)$

19 奇数の数列を $1 \mid 3,\ 5 \mid 7,\ 9,\ 11 \mid 13,\ 15,\ 17,\ 19 \mid 21,\ \cdots\cdots$ のように，第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき

(1)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。　(2)　第 n 群の総和を求めよ。

(3)　301 は第何群の何番目に並ぶ数か。

解答　(1)　n^2-n+1　(2)　n^3　(3)　第 17 群の 15 番目

解説

(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって，第 n 群の最初の奇数は $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 番目の奇数で

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2)　(1) より，第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列をなす。

よって，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{2 \cdot (n^2-n+1)+(n-1) \cdot 2\}=n^3$$

(3)　301 が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2-n+1 \leqq 301<(n+1)^2-(n+1)+1$$

よって　$n(n-1) \leqq 300<(n+1)n$　……①

$n(n-1)$ は単調に増加し，$17 \cdot 16=272$，$18 \cdot 17=306$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=17$

301 が第 17 群の m 番目であるとすると

$(17^2-17+1)+(m-1) \cdot 2=301$　　これを解いて　$m=15$

したがって，301 は第 17 群の 15 番目に並ぶ数である。

別解　(前半)　$2k-1=301$ から　$k=151$

よって，301 はもとの数列において，151 番目の奇数である。

301 が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<151 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに　$n(n-1)<302 \leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は，上の解答と同様にして　$n=17$

20 第 n 群が n 個の数を含む群数列

$1 \mid 2,\ 3 \mid 3,\ 4,\ 5 \mid 4,\ 5,\ 6,\ 7 \mid 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \mid 6,\ \cdots\cdots$ について

(1)　第 n 群の総和を求めよ。

(2)　初めて 99 が現れるのは，第何群の何番目か。

(3)　最初の項から 1999 番目の項は，第何群の何番目か。また，その数を求めよ。

解答　(1)　$\frac{1}{2}n(3n-1)$　(2)　第 50 群の 50 番目　(3)　第 63 群の 46 番目，108

解説

(1)　第 n 群は初項 n，公差 1，項数 n の等差数列をなすから，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{2n+(n-1) \cdot 1\}=\frac{1}{2}n(3n-1)$$

(2)　第 k 群は数列 k，$k+1$，$k+2$，……，$2k-1$ であるから，99 が第 k 群の第 l 項であるとすると

$k \leqq 99 \leqq 2k-1$　すなわち　$50 \leqq k \leqq 99$

よって　$50+(l-1) \cdot 1=99$　ゆえに　$l=50$

したがって，第 50 群の 50 番目に初めて 99 が現れる。

(3)　$1+2+3+\cdots\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1)$

ゆえに，第 m 群の末項はもとの数列の第 $\frac{1}{2}m(m+1)$ 項である。

第 1999 項が第 m 群にあるとすると　$\frac{1}{2}(m-1)m<1999 \leqq \frac{1}{2}m(m+1)$

すなわち　$(m-1)m<3998 \leqq m(m+1)$　……①

$(m-1)m$ は単調に増加し，$62 \cdot 63=3906$，$63 \cdot 64=4032$ であるから，① を満たす自然数 m は　$m=63$

$m=63$ のとき　$\frac{1}{2}(m-1)m=\frac{1}{2} \cdot 62 \cdot 63=1953$

また　$1999-1953=46$

よって，第 1999 項は第 63 群の 46 番目の項である。

そして，その数は　$63+(46-1) \cdot 1=108$

21 $\frac{1}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{6}{3}$，$\frac{7}{4}$，$\frac{8}{4}$，$\frac{9}{4}$，$\frac{10}{4}$，$\frac{11}{5}$，…… の分数の数列について，初項から第 210 項までの和を求めよ。

解答　1445

解説

分母が等しいものを群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{1} \,\Big|\, \frac{2}{2},\ \frac{3}{2} \,\Big|\, \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{3} \,\Big|\, \frac{7}{4},\ \frac{8}{4},\ \frac{9}{4},\ \frac{10}{4} \,\Big|\, \frac{11}{5},\ \cdots\cdots$$

第 1 群から第 n 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

第 210 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<210 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

よって　$(n-1)n<420 \leqq n(n+1)$　……①

$(n-1)n$ は単調に増加し，$19 \cdot 20=380$，$20 \cdot 21=420$ であるから，① を満たす自然数 n

は　$n=20$

また，第 210 項は分母が 20 である分数のうちで最後の数である。

ここで，第 n 群に含まれるすべての数の和は

$$\frac{1}{2}n\left[2\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}+(n-1)\cdot 1\right]\div n=\frac{n^2+1}{2}$$

ゆえに，求める和は

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k^2+1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=1}^{20}1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{20\cdot21\cdot41}{6}+20\right)=1445$$

22 2 の累乗を分母とする既約分数を，次のように並べた数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16},\ \cdots\cdots,\ \frac{15}{16},\ \frac{1}{32},\ \cdots\cdots$$

について，第 1 項から第 100 項までの和を求めよ。

解答　$\dfrac{5401}{128}$

解説

分母が等しいものを群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\,\Big|\,\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8}\,\Big|\,\frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16},\ \cdots\cdots,\ \frac{15}{16}\,\Big|\,\frac{1}{32},\ \cdots\cdots$$

第 k 群には 2^{k-1} 個の項があるから，第 1 群から第 n 群までの項の総数は

$$1+2+2^2+\ \cdots\cdots\ +2^{n-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

第 100 項が第 n 群の項であるとすると　$2^{n-1}-1<100\leqq 2^n-1$　……①

$2^{n-1}-1$ は単調に増加し，$2^6-1=63$，$2^7-1=127$ であるから，① を満たす自然数 n は

$n=7$

第 6 群の末項が第 63 項となるから　$100-63=37$

したがって，第 100 項は第 7 群の第 37 項である。

ここで，第 n 群の項の和は

$$\frac{1}{2^n}\{1+3+\ \cdots\cdots\ +(2^n-1)\}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\{1+(2^n-1)\}=2^{n-2}$$

更に，各群の k 番目の項の分子は $2k-1$ である。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{6}2^{k-2}+\frac{1}{2^7}\{1+3+\cdots\cdots+(2\cdot37-1)\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^6-1}{2-1}+\frac{1}{128}\cdot 37^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 63+\frac{1369}{128}=\frac{5401}{128}$$

23 自然数 1，2，3，…… を，右の図のように並べる。

(1)　左から m 番目，上から m 番目の位置にある自然数を m を用いて表せ。

(2)　150 は左から何番目，上から何番目の位置にあるか。

1	2	5	10	17	…
4	3	6	11	18	…
9	8	7	12	…	…
16	15	14	13	…	…
…	…	…	…	…	…

解答　(1)　m^2-m+1　　(2)　左から 13 番目，上から 6 番目

解説

並べられた自然数を，次のように群に分けて考える。

$1\,|\,2,\ 3,\ 4\,|\,5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\,|\,10,\ 11,\ \cdots\cdots$　　……①

(1)　① の第 1 群から第 m 群までの項数は

$$1+3+5+\ \cdots\cdots\ +(2m-1)=m^2$$

左から m 番目，上から m 番目は，① の第 m 群の m 番目の位置にあるから

$$(m-1)^2+m=m^2-m+1$$

(2)　150 が第 m 群に含まれるとすると

$$(m-1)^2<150\leqq m^2$$

$12^2<150<13^2$ から，この不等式を満たす自然数 m は　$m=13$

第 12 群までの項数は $12^2=144$ であるから，150 は第 13 群の $150-144=6$ (番目) である。

また，第 13 群の中央の数は 13 番目の項で　$6<13$

よって，150 は左から 13 番目，上から 6 番目の位置にある。

24 自然数 1，2，3，…… を，右の図のように並べる。

(1)　左から m 番目，上から 1 番目の位置にある自然数を m を用いて表せ。

(2)　150 は左から何番目，上から何番目の位置にあるか。

1	2	4	7	…
3	5	8	…	…
6	9	…	…	…
10	…	…	…	…
…	…	…	…	…

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}m+1$　　(2)　左から 4 番目，上から 14 番目

解説

並べられた整数を，次のように群に分けて考える。

$1\,|\,2,\ 3\,|\,4,\ 5,\ 6\,|\,7,\ \cdots\cdots$

(1)　第 1 群から第 m 群までの項数は　$1+2+3+\cdots\cdots+m=\dfrac{1}{2}m(m+1)$

左から m 番目，上から 1 番目は第 m 群の 1 番目であるから

$$\frac{1}{2}(m-1)m+1=\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m+1$$

(2)　150 が第 m 群に含まれるとすると　$\dfrac{1}{2}(m-1)m<150\leqq\dfrac{1}{2}m(m+1)$

よって　$(m-1)m<300\leqq m(m+1)$

この不等式を満たす自然数 m は　$m=17$

第 17 群の最初の項は　$\dfrac{1}{2}\cdot(17-1)\cdot17+1=137$

150 は第 17 群の $150-137+1=14$ (番目) である。

ゆえに，左から　$17-14+1=4$ (番目)

よって，150 は左から 4 番目，上から 14 番目の位置にある。

25 数列 1，1，3，1，3，5，1，3，5，7，1，3，5，7，9，1，…… について，次の問いに答えよ。ただし，k，m，n は自然数とする。

(1)　$(k+1)$ 回目に現れる 1 は第何項か。

(2)　m 回目に現れる 17 は第何項か。

(3)　初項から $(k+1)$ 回目の 1 までの項の和を求めよ。

(4)　初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n>1300$ となる最小の n を求めよ。

解答　(1)　第 $\dfrac{1}{2}(k^2+k+2)$ 項　　(2)　第 $\dfrac{1}{2}(m^2+15m+74)$ 項

(3)　$\dfrac{1}{6}(k+2)(2k^2-k+3)$　　(4)　$n=128$

解説

与えられた数列を

$1\,|\,1,\ 3\,|\,1,\ 3,\ 5\,|\,1,\ 3,\ 5,\ 7\,|\,1,\ \cdots\cdots$

のように，第 k 群に k 個の項が含まれるように群に分ける。

(1)　$(k+1)$ 回目に現れる 1 は，第 $(k+1)$ 群の最初の項である。

第 1 群から第 k 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\sum_{i=1}^{k}i=\frac{1}{2}k(k+1)$$

$\dfrac{1}{2}k(k+1)+1=\dfrac{1}{2}(k^2+k+2)$ であるから，$(k+1)$ 回目に現れる 1 は，第 $\dfrac{1}{2}(k^2+k+2)$ 項である。

(2)　$2n-1=17$ とすると　$n=9$

よって，1 回目に現れる 17 は，第 9 群の第 9 項である。

ゆえに，m 回目に現れる 17 は，第 $(m+8)$ 群の第 9 項である。

第 1 群から第 $(m+7)$ 群までの項数は　$\displaystyle\sum_{i=1}^{m+7}i=\frac{1}{2}(m+7)(m+8)$

$\dfrac{1}{2}(m+7)(m+8)+9=\dfrac{1}{2}(m^2+15m+74)$ であるから，m 回目に現れる 17 は，第 $\dfrac{1}{2}(m^2+15m+74)$ 項である。

(3)　第 i 群に含まれる項の和は　$\displaystyle\sum_{h=1}^{i}(2h-1)=i^2$

よって，初項から $(k+1)$ 回目の 1 までの項の和は

$$\sum_{i=1}^{k}i^2+1=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+1=\frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k+6)$$

$$=\frac{1}{6}(k+2)(2k^2-k+3)$$

(4)　第 1 群から第 k 群までに含まれる項の和を T_k とすると

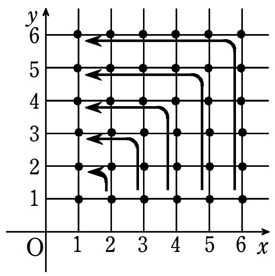
$$T_k=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

よって　$T_{15}=\dfrac{1}{6}\cdot15\cdot16\cdot31=1240$，$T_{16}=\dfrac{1}{6}\cdot16\cdot17\cdot33=1496$

また　$T_{15}+7^2=1289$，　$T_{15}+8^2=1304$

ゆえに，初項から第 16 群の第 8 項までの和が初めて 1300 より大きくなるから，求める n の値は　$n=\displaystyle\sum_{i=1}^{15}i+8=\frac{1}{2}\cdot15\cdot16+8=128$

26 座標平面上の自然数を成分とする点 $(m,\ n)$ に，有理数 $\dfrac{n}{m}$ を対応させる。右の図のように，点 $(1,\ 1)$ から矢印の順番に従って，対応する有理数を並べ，次のような数列を作る。



$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots$$

(1)　有理数 $\dfrac{11}{8}$ が初めて現れるのは第何項かを求めよ。

(2)　第 160 項を求めよ。

(3)　第 1000 項までに，値が 2 となる項の総数を求めよ。

解答　(1)　第 114 項　　(2)　$\dfrac{13}{10}$　　(3)　15 個

解説

与えられた数列を，

$$\frac{1}{1}\,\Big|\,\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{2}{1}\,\Big|\,\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{1}\,\Big|\,\frac{1}{4},\ \cdots\cdots$$

のように，第 k 群が $(2k-1)$ 個の項を含むように群に分ける。

このとき，第 l 群までの数列の項の総数は

$$\sum_{k=1}^{l}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}l(l+1)-l=l^2\ (個)\quad\cdots\cdots①$$

(1) $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$, ……, $\frac{11}{11}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{11}{8}$, ……

有理数 $\frac{11}{8}$ は第 11 群の 14 番目に初めて現れる。

① より，第 10 群までの数列の項の総数は 100 個であるから，有理数 $\frac{11}{8}$ が初めて現れるのは　第 114 項

(2) ① から，第 12 群までの数列の項の総数は　144 個

第 13 群までの数列の項の総数は　169 個

よって，第 160 項は第 13 群の 16 番目の項である。

$\frac{1}{13}$, $\frac{2}{13}$, ……, $\frac{13}{13}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{13}{11}$, $\frac{13}{10}$, ……

ゆえに，第 160 項は　$\frac{13}{10}$

(3) 値が 2 となる項は，点 $(m,\ 2m)$ (m は自然数) に対応する有理数である。

そのような有理数は，偶数番目の群に 1 個ずつある。

① から，第 31 群までの数列の項の総数は　961 個

第 32 群までの数列の項の総数は　1024 個

よって，第 1000 項は第 32 群の 39 番目の項である。

$\frac{1}{32}$, $\frac{2}{32}$, ……, $\frac{32}{32}$, $\frac{32}{31}$, $\frac{32}{30}$, $\frac{32}{29}$, $\frac{32}{28}$, $\frac{32}{27}$, $\frac{32}{26}$, $\frac{32}{25}$, ……

第 32 群の 1 ～ 39 番目の項には，値が 2 となる項はない。

ゆえに，第 1000 項までに値が 2 となる項は，第 $2k$ 群 $(1\leqq k\leqq 15)$ に 1 個ずつあるから，その総数は　15 個

27 1 から順に自然数を並べて，下のように 1 個，2 個，4 個，…… となるように群に分ける。ただし，第 n 群が含む数の個数は 2^{n-1} 個である。

1 | 2, 3 | 4, 5, 6, 7 | 8, ……

(1) 第 5 群の初めの数と終わりの数を求めよ。

(2) 第 n 群に含まれる数の総和を求めよ。

解答　(1) 初めの数は 16，終わりの数は 31　(2) $2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)$

解説

(1) 第 4 群の末項までの項の総数は　$1+2+2^2+2^3=15$

第 5 群の末項までの項の総数は　$1+2+2^2+2^3+2^4=31$

よって，第 5 群の初めの数は 16，終わりの数は 31

(2) $n\geqq 2$ のとき，第 $(n-1)$ 群の末項までの項の総数は

$$\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}-1$$

ゆえに，第 n 群の初めの数は　$(2^{n-1}-1)+1$　すなわち　2^{n-1}

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，第 n 群に含まれる数の総和は，初項が 2^{n-1}，公差が 1，項数が 2^{n-1} の等差数列の和となるから，求める和は

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\{2\cdot 2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\cdot 1\}=2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)$$

28 正の奇数の列を次のように，第 n 群が $(2n-1)$ 個の奇数を含むように分ける。

1 | 3, 5, 7 | 9, 11, 13, 15, 17 | 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31 | ……

(1) 第 10 群の最初の奇数を求めよ。

(2) 第 10 群に属するすべての奇数の和を求めよ。

解答　(1) 163　(2) 3439

解説

(1) 第 9 群の末項までの項の総数は

$$\sum_{k=1}^{9}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{9}k-\sum_{k=1}^{9}1=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10-9=81$$

よって，第 10 群の最初の奇数は　$2\cdot 82-1=163$

(2) 第 10 群に属する項は　$2\cdot 10-1=19$ (個)

よって，第 10 群に属するすべての奇数の和は，初項が 163，公差が 2，項数が 19 の等差数列の和となる。

ゆえに，求める和は

$$\frac{1}{2}\cdot 19\{2\cdot 163+(19-1)\cdot 2\}=3439$$

29 数列 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{5}$, …… について

(1) $\frac{5}{8}$ は第何項か。　(2) この数列の第 800 項を求めよ。

(3) この数列の初項から第 800 項までの和を求めよ。

解答　(1) 第 31 項　(2) $\frac{39}{40}$　(3) 790

解説

$\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}\Big|\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}\Big|\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}\Big|\frac{1}{5}$, ……

のように群に分ける。

(1) $\frac{5}{8}$ は第 8 群の 3 番目の項である。

$\sum_{k=1}^{7}k+3=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8+3=31$ であるから　第 31 項

(2) 第 800 項が第 n 群に含まれるとすると　$\sum_{k=1}^{n-1}k<800\leqq\sum_{k=1}^{n}k$

よって　$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$

$39\cdot 40<1600\leqq 40\cdot 41$ から，これを満たす自然数 n は　$n=40$

$800-\sum_{k=1}^{39}k=800-\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40=20$ であるから　$\frac{39}{40}$

(3) 第 n 群の n 個の分数の和は　$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot n^2=n$

ゆえに，求める和は

$$\sum_{k=1}^{39}k+\left(\frac{1}{40}+\frac{3}{40}+\frac{5}{40}+\cdots\cdots+\frac{39}{40}\right)=\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40+\frac{1}{40}\left\{\frac{1}{2}\cdot 20(1+39)\right\}=790$$

30 数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, …… について $\frac{37}{50}$ は第何項か。また，第 1000 項を求めよ。

解答　順に，第 1213 項，$\frac{10}{46}$

解説

分母が同じもので区切った群数列　$\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}\Big|\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}\Big|$ …… において，$\frac{37}{50}$ は第 49 群の 37 番目の項である。

$\sum_{k=1}^{48}k+37=\frac{1}{2}\cdot 48\cdot 49+37=1213$ であるから，$\frac{37}{50}$ は　第 1213 項

また，第 1000 項が第 n 群に含まれるとすると

$$\sum_{k=1}^{n-1}k<1000\leqq\sum_{k=1}^{n}k$$

よって　$\frac{1}{2}(n-1)n<1000\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

すなわち　$(n-1)n<2000\leqq n(n+1)$

$44\cdot 45=1980<2000<2070=45\cdot 46$ から，これを満たす自然数 n は　$n=45$

$1000-\sum_{k=1}^{44}k=1000-\frac{1}{2}\cdot 44\cdot 45=10$ から，第 1000 項は　$\frac{10}{46}$

31 数列 -2, 4, 4, -8, -8, -8, 16, 16, 16, 16, -32, …… の第 2018 項は $(-2)^{\boxed{ア}}$ である。また，第 2018 項までの和は $\dfrac{\boxed{イ}\times(-2)^{\boxed{ア}}-2}{9}$ である。

解答　(ア) 64　(イ) -172

解説

$-2\,|\,4,\ 4\,|-8,\ -8,\ -8\,|\,16,\ 16,\ 16,\ 16\,|-32$, …… のように群に分けると，第 n 群には $(-2)^n$ の項が n 個ある。

第 2018 項が第 n 群に含まれるとすると　$\sum_{k=1}^{n-1}k<2018\leqq\sum_{k=1}^{n}k$

よって　$(n-1)n<4036\leqq n(n+1)$　……①

$63\cdot 64=4032$，$64\cdot 65=4160$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=64$

ゆえに，第 2018 項は $(-2)^{64}$ であり，(ア) は　64

ここで　$2018-\sum_{k=1}^{63}k=2018-\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 64=2$

よって，第 2018 項は第 64 群の 2 番目の項である。

第 2018 項までの和を S とすると　$S=\sum_{k=1}^{63}k(-2)^k+2\times(-2)^{64}$

$T=\sum_{k=1}^{63}k(-2)^k$ とすると

$$T=-2+2(-2)^2+3(-2)^3+\cdots\cdots+63(-2)^{63}$$

$$-2T=\qquad(-2)^2+2(-2)^3+\cdots\cdots+62(-2)^{63}+63(-2)^{64}$$

辺々引いて　$3T=-2+(-2)^2+(-2)^3+\cdots\cdots+(-2)^{63}-63(-2)^{64}$

$$=-2\cdot\frac{1-(-2)^{63}}{1-(-2)}-63(-2)^{64}=\frac{-190\times(-2)^{64}-2}{3}$$

ゆえに　$T=\dfrac{-190\times(-2)^{64}-2}{9}$

よって　$S=\dfrac{-190\times(-2)^{64}-2}{9}+2\times(-2)^{64}=\dfrac{-172\times(-2)^{64}-2}{9}$

したがって，(イ) は　-172

32 自然数の列を，次のように 1 個，2 個，4 個，8 個，……，2^{n-1} 個，…… の群に分ける。

1 | 2, 3 | 4, 5, 6, 7 | 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 | 16, ……

(1) 第 n 群の最初の自然数を求めよ。　(2) 500 は第何群の第何項か。

(3) 第 n 群にあるすべての自然数の和を求めよ。

解答　(1) 2^{n-1}　(2) 第 9 群の第 245 項　(3) $2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)$

解説

(1) 第 n 群は 2^{n-1} 個の自然数を含むから，第 n 群の最初の自然数は，$n \geqq 2$ のとき

$$(1+2+\cdots\cdots+2^{n-2})+1=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+1=2^{n-1}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，第 n 群の最初の自然数は　2^{n-1}

(2) 500 が第 n 群の第 m 項であるとすると　$2^{n-1} \leqq 500 < 2^n$　……①

$2^8=256$，$2^9=512$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=9$

$2^{9-1}+(m-1)\cdot 1=500$ から　$m=245$

よって　第 9 群の第 245 項

(3) 第 n 群にある自然数の列は初項が 2^{n-1}，末項が 2^n-1，項数が 2^{n-1} の等差数列である。

よって，その和は　$\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}(2^{n-1}+2^n-1)=2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)$

33 数列 1，1，4，1，4，9，1，4，9，16，1，4，9，16，25，1，…… がある。この数列の第 100 項および初項から第 100 項までの和を求めよ。

解答　順に 81，3470

解説

この数列を，次のように第 n 群が n 個の数を含むように分ける。

1 | 1，4 | 1，4，9 | 1，4，9，16 | 1，4，9，16，25 | 1，……

すなわち　$1^2 \mid 1^2,\ 2^2 \mid 1^2,\ 2^2,\ 3^2 \mid 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2 \mid 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2 \mid 1^2,$ ……

第 1 群から第 n 群までの項の総数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

よって，第 100 項が第 n 群にあるとすると　$\frac{1}{2}(n-1)n<100 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$

よって　$(n-1)n<200 \leqq n(n+1)$　……①

$13\cdot 14=182$，$14\cdot 15=210$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=14$

第 1 群から第 13 群までの項の総数は　$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$

ゆえに，第 100 項は第 14 群の $100-91=9$ (番目) の数である。

よって，第 100 項は　$9^2=81$

また，第 n 群にあるすべての自然数の和は　$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

したがって，第 13 群までにあるすべての自然数の和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)&=\sum_{k=1}^{13}\frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k)\\&=\frac{1}{6}\left\{2\left(\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14\right)^2+3\cdot\frac{1}{6}\cdot 13\cdot 14\cdot 27+\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14\right\}\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14(13\cdot 14+27+1)\\&=3185\end{aligned}$$

よって，初項から第 100 項までの和は

$$\begin{aligned}3185+(1^2+2^2+\cdots\cdots+9^2)&=3185+\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19\\&=3470\end{aligned}$$

34 初項 2，公差 3 の等差数列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には n 個の数が入るものとする。

2 | 5，8 | 11，14，17 | 20，23，26，29 | 32，……
第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

(1) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ。
(2) 第 n 群に入るすべての数の和を求めよ。

解答　(1) $\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$　(2) $\frac{1}{2}n(3n^2+1)$

解説

(1) もとの等差数列の第 n 項は

$2+(n-1)\cdot 3=3n-1$　……①

$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数は

$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$ (個)

よって，第 n 群 $(n \geqq 2)$ の最初の数は，もとの等差数列の第 $\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項であるから，① より　$3\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-1=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，第 n 群の最初の数は　$\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$

(2) 求める和は，初項 $\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2$，公差 3，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\left\{2\left(\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+2\right)+(n-1)\cdot 3\right\}=\frac{1}{2}n(3n^2+1)$$

35 自然数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には 2^{n-1} 個の数が入るものとする。

1 | 2，3 | 4，5，6，7 | 8，9，10，……，15 | 16，……
第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

(1) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ。
(2) 第 1 群から第 n 群までに入るすべての数の和を求めよ。
(3) 150 は第何群の何番目の数か。

解答　(1) 2^{n-1}　(2) $2^{n-1}(2^n-1)$　(3) 第 8 群の 23 番目

解説

(1) $n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数は

$1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-2}=\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^{n-1}-1$ (個)　……①

よって，第 n 群 $(n \geqq 2)$ の最初の数は，自然数の列の第 2^{n-1} 項であるから　2^{n-1}

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，第 n 群の最初の数は　2^{n-1}

(2) 第 1 群から第 n 群までに入る数の個数は，① と同様に考えて　2^n-1 個

よって，第 n 群の最後の数は　2^n-1　……②

したがって，求める和は

$1+2+3+\cdots\cdots+(2^n-1)=\frac{1}{2}(2^n-1)\{(2^n-1)+1\}=\frac{1}{2}(2^n-1)\cdot 2^n=2^{n-1}(2^n-1)$

別解　第 n 群の最後の数は，次のように求めてもよい。

(1) から，第 $(n+1)$ 群の最初の数は　2^n

よって，第 n 群の最後の数は　2^n-1

(3) (1) より，第 n 群の最初の数は　2^{n-1}

② より，第 n 群の最後の数は　2^n-1

よって，150 が第 n 群に入るとすると

$2^{n-1} \leqq 150 \leqq 2^n-1$　……③

$2^7=128$，$2^8=256$ であるから，③ を満たす自然数 n は　$n=8$

すなわち，150 は第 8 群に入る。

第 8 群の最初の数は，$2^{8-1}=128$ であるから，150 は第 8 群の 23 番目の数である。

36 分母と分子の和が 2，3，4，…… となるような分数を並べた次の数列において，$\frac{7}{15}$ は第何項か。また，第 99 項を求めよ。

$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{4}$，……

解答　順に　第 217 項，$\frac{8}{7}$

解説

分母と分子の和が同じ分数を 1 つの群として，次のように区切って考える。

$\frac{1}{1} \mid \frac{1}{2},\ \frac{2}{1} \mid \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1} \mid \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1} \mid \cdots$

第 n 群には n 個の分数が入る。

(前半) 第 n 群に入る分数の分母と分子の和は $n+1$ である。

$15+7=22$ から，$\frac{7}{15}$ は第 21 群にあり，その 7 番目の数である。

第 1 群から第 20 群までに入る分数の個数は

$1+2+3+\cdots\cdots+20=\frac{1}{2}\cdot 20(20+1)=210$

$210+7=217$ であるから，$\frac{7}{15}$ は　第 217 項

(後半) 第 1 群から第 n 群までに入る分数の個数は

$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

よって，第 99 項が第 n 群に入るとすると　$\frac{1}{2}(n-1)n<99 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$

ゆえに　$(n-1)n<198 \leqq n(n+1)$　……①

$13\cdot 14=182$，$14\cdot 15=210$ であるから，① を満たす自然数 n は　$n=14$

よって，第 99 項は第 14 群にある。

第 1 群から第 13 群までに入る分数の個数は　$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$

よって，第 99 項は第 14 群の 8 番目である。

第 14 群に入る分数の分母と分子の和は 15 であるから，第 99 項は　$\frac{8}{15-8}=\frac{8}{7}$

37 正の奇数の列を，次のような群に分ける。ただし，第 n 群には $(2n-1)$ 個の数が入るものとする。

1 | 3，5，7 | 9，11，13，15，17 | 19，……
第 1 群　第 2 群　第 3 群

(1) 第 n 群の最初の数を n の式で表せ。
(2) 第 n 群に入るすべての数の和を求めよ。

解答　(1) $2n^2-4n+3$　(2) $(2n-1)(2n^2-2n+1)$

解説

(1) $n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに入る数の個数は

$$1+3+5+\cdots\cdots+\{2(n-1)-1\}=(n-1)^2 \text{ (個)}$$

よって，第 n 群 $(n \geqq 2)$ の最初の数は，奇数の列の第 $\{(n-1)^2+1\}$ 項であるから

$$2\{(n-1)^2+1\}-1=2n^2-4n+3$$

これは $n=1$ のときにも成り立つ。

よって，求める数は　$2n^2-4n+3$

(2)　求める和は，初項 $2n^2-4n+3$，公差 2，項数 $2n-1$ の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}(2n-1)[2\cdot(2n^2-4n+3)+\{(2n-1)-1\}\cdot 2]=(2n-1)(2n^2-2n+1)$$