等比数列クイズ(数字)

1 初項2，公比3の等比数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n=2\cdot 3^{n-1}$$

例えば，第8項は　$a_8=2\cdot 3^7=4374$

解説

2 次の等比数列の一般項を求めよ。また，第7項を求めよ。

(1)　5，10，20，40，……　　(2)　-2，2，-2，2，……

(3)　1，-3，9，-27，……　　(4)　9，6，4，$\frac{8}{3}$，……

解答　一般項，第7項の順に

(1)　$5\cdot 2^{n-1}$，320　　(2)　$2(-1)^n$，-2

(3)　$(-3)^{n-1}$，729　　(4)　$9\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，$\frac{64}{81}$

解説

与えられた等比数列を$\{a_n\}$とする。

(1)　初項が5，公比が2であるから，一般項は

$$a_n=5\cdot 2^{n-1}$$

第7項は　$a_7=5\cdot 2^6=320$

(2)　初項が-2，公比が-1であるから，一般項は

$$a_n=(-2)\cdot(-1)^{n-1}\quad すなわち\quad a_n=2(-1)^n$$

第7項は　$a_7=2(-1)^7=-2$

(3)　初項が1，公比が-3であるから，一般項は

$$a_n=1\cdot(-3)^{n-1}\quad すなわち\quad a_n=(-3)^{n-1}$$

第7項は　$a_7=(-3)^6=729$

(4)　初項が9，公比が$\frac{2}{3}$であるから，一般項は

$$a_n=9\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

第7項は　$a_7=9\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{81}$

3 第3項が6，第7項が486である等比数列$\{a_n\}$の初項と公比を求めよ。また，一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　初項$\frac{2}{3}$，公比3，$a_n=\frac{2}{3}\cdot 3^{n-1}$ または 初項$\frac{2}{3}$，公比-3，$a_n=\frac{2}{3}(-3)^{n-1}$

解説

この数列の初項をa，公比をrとすると　$a_n=ar^{n-1}$

第3項が6であるから　$ar^2=6$　……①

第7項が486であるから　$ar^6=486$　……②

①，②から　$6r^4=486$　　よって　$r^4=81$

rは実数であるから　$r=\pm 3$

①から　$r=\pm 3$のとき　$a=\frac{2}{3}$

よって　初項$\frac{2}{3}$，公比3 または 初項$\frac{2}{3}$，公比-3

また，一般項は　$a_n=\frac{2}{3}\cdot 3^{n-1}$　または　$a_n=\frac{2}{3}(-3)^{n-1}$

4 数列$\frac{1}{2}$，b，8が等比数列であるとき，bの値を求めよ。

解答　$b=\pm 2$

解説

$\frac{1}{2}$，b，8が等比数列をなすから　$b^2=\frac{1}{2}\cdot 8$　　すなわち　$b^2=4$

よって　$b=\pm 2$

5 次のような等比数列の和を求めよ。

(1)　初項1，公比3，項数5　　(2)　初項3，公比-2，項数7

解答　(1)　121　　(2)　129

解説

(1)　$\frac{1\cdot(3^5-1)}{3-1}=\frac{242}{2}=121$

(2)　$\frac{3\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)}=1-(-128)=129$

6 第2項が3，初項から第3項までの和が13である等比数列の，初項aと公比rを求めよ。

解答　$a=9$，$r=\frac{1}{3}$　または　$a=1$，$r=3$

解説

与えられた条件から

$$ar=3\quad ……①$$

$$a+ar+ar^2=13\quad ……②$$

②から　$a(1+r+r^2)=13$

この式の両辺にrを掛けると　$ar(1+r+r^2)=13r$

①を代入して整理すると　$3r^2-10r+3=0$

これを解いて　$r=\frac{1}{3}$，3

①から　$r=\frac{1}{3}$のとき$a=9$，　$r=3$のとき$a=1$

よって　$a=9$，$r=\frac{1}{3}$　または　$a=1$，$r=3$

7 第3項が4，初項から第3項までの和が7である等比数列の，初項aと公比rを求めよ。

解答　$a=1$，$r=2$ または $a=9$，$r=-\frac{2}{3}$

解説

与えられた条件から

$$ar^2=4\quad ……①,\qquad a+ar+ar^2=7\quad ……②$$

②から　$a(1+r+r^2)=7$

この式の両辺にr^2を掛けると

$$ar^2(1+r+r^2)=7r^2$$

①を代入すると　$4(1+r+r^2)=7r^2$

整理すると　$3r^2-4r-4=0$　　これを解いて　$r=2$，$-\frac{2}{3}$

①から　$r=2$のとき$a=1$，$r=-\frac{2}{3}$のとき$a=9$

よって　$a=1$，$r=2$　または　$a=9$，$r=-\frac{2}{3}$

8 公比が正の数である等比数列$\{a_n\}$について，$a_1+a_2=3$，$a_3+a_4=12$であるという。この数列の第7項を求めよ。

解答　64

解説

この等比数列の初項をa，公比をrとすると

$$a_1=a,\ a_2=ar,\ a_3=ar^2,\ a_4=ar^3$$

$a_1+a_2=3$から　$a+ar=3$　……①

$a_3+a_4=12$から　$ar^2+ar^3=12$　……②

①，②から　$3r^2=12$　　すなわち　$r^2=4$

$r>0$より　$r=2$

これを①に代入して　$a=1$

ゆえに，一般項は　$a_n=2^{n-1}$

したがって　$a_7=2^6=64$

9 次の等比数列の一般項a_nと，初項から第8項までの和Sを求めよ。[各12点]

(1)　3，6，12，24，……

(2)　4，-4，4，-4，……

(3)　$\sqrt{2}$，-1，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$-\frac{1}{2}$，……

解答　(1)　$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

$$S=\frac{3(2^8-1)}{2-1}=3\cdot 255=765$$

(2)　$a_n=4\cdot(-1)^{n-1}$

$$S=\frac{4\{(-1)^8-1\}}{-1-1}=0$$

(3)　$a_n=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$$S=\frac{\sqrt{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8\right\}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)}{\sqrt{2}+1}=\frac{15}{8(\sqrt{2}+1)}=\frac{15(\sqrt{2}-1)}{8}$$

解説

(1) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$

$$S=\frac{3(2^8-1)}{2-1}=3\cdot 255=765$$

(2) $a_n=4\cdot(-1)^{n-1}$

$$S=\frac{4\{(-1)^8-1\}}{-1-1}=0$$

(3) $a_n=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$$S=\frac{\sqrt{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8\right\}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)}{\sqrt{2}+1}=\frac{15}{8(\sqrt{2}+1)}=\frac{15(\sqrt{2}-1)}{8}$$

10 数列 3，a，b，192 が等比数列であるとき，a，b の値を求めよ。ただし，公比は実数とする。[14 点]

解答 公比を r とすると　$a=3r$　…… ①

$b=3r^2$　…… ②

$192=3r^3$　…… ③

③ より　$r^3=64$

r は実数であるから　$r=4$

$r=4$ を ①，② に代入して　$a=12$，$b=48$

解説

公比を r とすると　$a=3r$　…… ①

$b=3r^2$　…… ②

$192=3r^3$　…… ③

③ より　$r^3=64$

r は実数であるから　$r=4$

$r=4$ を ①，② に代入して　$a=12$，$b=48$

11 (1) 等比数列 2，-6，18，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 8 項を求めよ。

(2) 第 3 項が 12，第 6 項が -96 である等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答 (1) $a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$，$a_8=-4374$　(2) $3\cdot(-2)^{n-1}$

解説

(1) 初項 a は $a=2$，公比 r は $r=\frac{-6}{2}=-3$ であるから，一般項は

$$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$$

また　$a_8=2\cdot(-3)^{8-1}=-2\cdot 3^7=-4374$

(2) 初項を a，公比を r，一般項を a_n とすると，$a_3=12$，$a_6=-96$ であるから

$$\begin{cases} ar^2=12 & \cdots\cdots ① \\ ar^5=-96 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② から　$ar^2\cdot r^3=-96$　これに ① を代入して　$12r^3=-96$

ゆえに　$r^3=-8$　すなわち　$r^3=(-2)^3$

r は実数であるから　$r=-2$　① から　$a=3$

したがって　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

12 (1) 等比数列 2，$-\sqrt{2}$，1，…… の一般項 a_n と第 10 項 を求めよ。

(2) 次の等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

（ア） 第 2 項が 16，第 4 項が 256　（イ） 第 5 項が 4，第 10 項が 4096

(3) 数列 2，6，……，4374，…… は等比数列となることができるか。

解答 (1) $a_n=(-1)^{n-1}2^{\frac{3-n}{2}}$，$a_{10}=-\frac{\sqrt{2}}{16}$

(2) （ア） 4^n または $(-4)^n$　（イ） 4^{n-4}　(3) 等比数列となることができる

解説

(1) 初項は 2，公比は $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，一般項は

$$a_n=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=2\cdot(-1)^{n-1}\cdot\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}2^{\frac{3-n}{2}}$$

また　$a_{10}=(-1)^{10-1}\cdot 2^{\frac{3-10}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{16}$

(2) （ア） 初項を a，公比を r，一般項を a_n とすると，$a_2=16$，$a_4=256$ から

$ar=16$　…… ①，$ar^3=256$　…… ②

② から　$ar\cdot r^2=256$

これに ① を代入して　$16r^2=256$

ゆえに　$r^2=16$　すなわち　$r=\pm 4$

$r=4$　のとき，① から　$a=4$

よって　$a_n=4\cdot 4^{n-1}=4^n$

$r=-4$ のとき，① から　$a=-4$

よって　$a_n=(-4)\cdot(-4)^{n-1}=(-4)^n$

したがって　$a_n=4^n$　または $a_n=(-4)^n$

（イ） 初項を a，公比を r，一般項を a_n とすると，$a_5=4$，$a_{10}=4096$ から

$ar^4=4$　…… ①，$ar^9=4096$　…… ②

② から　$ar^4\cdot r^5=4096$

これに ① を代入して　$4r^5=4096$

ゆえに　$r^5=4^5$　すなわち　$r=4$

$r=4$ と ① から　$a=\frac{1}{64}$

したがって　$a_n=\frac{1}{64}\cdot 4^{n-1}=4^{n-4}$

(3) 与えられた数列が等比数列であるとすると

初項は 2，公比は $\frac{6}{2}=3$

この等比数列の第 n 項が 4374 であるとすると　$2\cdot 3^{n-1}=4374$

よって　$3^{n-1}=2187$　すなわち　$3^{n-1}=3^7$

ゆえに　$n-1=7$　よって　$n=8$ (自然数)

ゆえに，与えられた数列は等比数列となることができる。

13 3 つの実数 a，b，c はこの順序で等差数列になり，b，c，a の順序で等比数列となる。a，b，c の積が 125 であるとき，a，b，c の値を求めよ。

解答 $(a, b, c)=(5, 5, 5)$，$\left(-10, -\frac{5}{2}, 5\right)$

解説

数列 a，b，c は等差数列をなすから　$2b=a+c$　…… ①

数列 b，c，a は等比数列をなすから　$c^2=ab$　…… ②

a，b，c の積が 125 であるから　$abc=125$　…… ③

② を ③ に代入して　$c^3=125$　ゆえに　$c=5$

①，② に代入して　$2b=a+5$，$ab=25$

これから b を消去すると　$a(a+5)=50$

よって　$a^2+5a-50=0$　ゆえに　$a=5$，-10

$ab=25$ より　$a=5$ のとき　$b=5$，　$a=-10$ のとき　$b=-\frac{5}{2}$

したがって　$(a, b, c)=(5, 5, 5)$，$\left(-10, -\frac{5}{2}, 5\right)$

別解 等比数列 b，c，a の公比を r とすると　$c=br$，$a=br^2$　…… ④

④ を ③ に代入して　$br^2\cdot b\cdot br=125$　すなわち　$(br)^3=5^3$

br は実数であるから　$br=5$　…… ⑤

④ を ① に代入して　$2b=r\cdot br+br$

⑤ を 代入して　$2b=5r+5$　…… ⑥

⑤，⑥ を解くと　$(b, r)=(5, 1)$，$\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$

したがって　$(a, b, c)=(5, 5, 5)$，$\left(-10, -\frac{5}{2}, 5\right)$

14 異なる 3 つの実数 a，b，c がこの順で等差数列をなし，a，c，b の順で等比数列をなす。更に $abc=27$ であるとき，a，b，c の値を求めよ。

解答 $a=-6$，$b=-\frac{3}{2}$，$c=3$

解説

数列 a，b，c は等差数列をなすから　$2b=a+c$　…… ①

数列 a，c，b は等比数列をなすから　$c^2=ab$　…… ②

また　$abc=27$　…… ③

② を ③ に代入して　$c^3=27$　c は実数であるから　$c=3$

①，② に代入して　$a=2b-3$，$ab=9$

これらから a を消去すると　$b(2b-3)=9$

すなわち　$2b^2-3b-9=0$　ゆえに　$(b-3)(2b+3)=0$

$b\neq 3$ であるから　$b=-\frac{3}{2}$

よって　$a=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-3=-6$

このとき，a，b，c は互いに異なり，適する。

したがって　$a=-6$，$b=-\frac{3}{2}$，$c=3$

15 定数 a，b に対し，3 つの数 a，$-2a$，b はこの順序で等比数列をなす。また，適当に並べかえると初項が 1，公差が d の等差数列となるとき，a，b，d の値を求めよ。

解答 $(a, b, d)=\left(-\frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{4}, 1, -\frac{3}{4}\right)$

解説

数列 a，$-2a$，b は等比数列をなすから　$(-2a)^2=ab$

よって　$a(4a-b)=0$　すなわち　$a=0$ または $4a=b$

[1]　$a=0$ のとき　$-2a=0$

よって，数列 a，$-2a$，b は初項 0，公比 0 の等比数列となる。

ゆえに，$b=0$ となるが，この場合，a，$-2a$，b を適当に並べかえても初項が 1 の等差数列はできない。

よって，$a=0$ は不適である。

[2]　$4a=b$ かつ $a\neq 0$ のとき

3 数 a，$-2a$，$4a$ を並べてできる数列のうち，等差数列をなすのは，数列 $-2a$，a，$4a$ と数列 $4a$，a，$-2a$ である。

(i)　数列 $-2a$，a，$4a$ のとき

初項が 1 であるから　$-2a=1$　よって　$a=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$b=4a=-2$，　$d=3a=-\dfrac{3}{2}$

(ii)　数列 $4a$，a，$-2a$ のとき

初項が 1 であるから　$4a=1$　よって　$a=\dfrac{1}{4}$

したがって　$b=4a=1$，　$d=-3a=-\dfrac{3}{4}$

[1]，[2] から　$(a,\ b,\ d)=\left(-\dfrac{1}{2},\ -2,\ -\dfrac{3}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{4},\ 1,\ -\dfrac{3}{4}\right)$

16 数列 $\{a_n\}$ を公比が 0 でない初項 1 の等比数列とする。また，数列 $\{b_n\}$ を $b_1=a_3$，$b_2=a_4$，$b_3=a_2$ を満たす等差数列とする。

(1)　$\{a_n\}$ の公比を求めよ。　(2)　$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　(1)　1 または $-\dfrac{1}{2}$

(2)　$\{a_n\}$ の公比が 1 のとき $b_n=1$，$\{a_n\}$ の公比が $-\dfrac{1}{2}$ のとき $b_n=-\dfrac{3}{8}n+\dfrac{5}{8}$

解説

(1)　等比数列 $\{a_n\}$ の公比を $r\ (\neq 0)$ とすると

$$a_1=1,\quad a_2=r,\quad a_3=r^2,\quad a_4=r^3 \quad \cdots\cdots ①$$

$\{b_n\}$ は等差数列であるから　$2b_2=b_1+b_3$

$b_1=a_3$，$b_2=a_4$，$b_3=a_2$ を代入すると　$2a_4=a_3+a_2$

① を代入すると　$2r^3=r^2+r$

よって　$r(2r^2-r-1)=0$

ゆえに　$r(r-1)(2r+1)=0$

$r\neq 0$ であるから　$r=1,\ -\dfrac{1}{2}$

したがって，$\{a_n\}$ の公比は　1 または $-\dfrac{1}{2}$

(2)　[1]　$r=1$ のとき　$b_1=a_3=r^2=1$，$b_2=a_4=r^3=1$

よって，$\{b_n\}$ の初項は 1，公差は 0 であるから　$b_n=1$

[2]　$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$b_1=a_3=r^2=\dfrac{1}{4}$，$b_2=a_4=r^3=-\dfrac{1}{8}$

よって，$\{b_n\}$ の初項は $\dfrac{1}{4}$，公差は $-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{8}$ であるから

$$b_n=\frac{1}{4}+(n-1)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{3}{8}n+\frac{5}{8}$$

[1]，[2] から　$\{a_n\}$ の公比が 1 のとき　$b_n=1$

$\{a_n\}$ の公比が $-\dfrac{1}{2}$ のとき　$b_n=-\dfrac{3}{8}n+\dfrac{5}{8}$

17 等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ がある。ただし，$\{a_n\}$ の公差は 0 でない。

$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_4=b_4$ であるとき，$\{b_n\}$ の公比は ア$\boxed{}$ であり，更に，$b_3=144$ であれば $a_3=$ イ$\boxed{}$ である。

解答　(ア)　-2　(イ)　-180

解説

$a_1=b_1$ から，数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の初項は一致し，その共通の初項を a とする。

数列 $\{a_n\}$ の公差を d，数列 $\{b_n\}$ の公比を r とすると　$a_n=a+(n-1)d$，$b_n=ar^{n-1}$

$a_2=b_2$ から　$a+d=ar$　……①　　$a_4=b_4$ から　$a+3d=ar^3$　……②

②−①×3 から　$a-3a=ar^3-3ar$

整理すると　$a(r^3-3r+2)=0$

左辺を因数分解して　$a(r-1)^2(r+2)=0$　……③

条件より $d\neq 0$ であるから　$a_1\neq a_2$　すなわち　$b_1\neq b_2$

したがって，$a\neq 0$，$r\neq 1$ であるから，③ より　$r=$ ア-2

更に，$b_3=144$ のとき　$ar^2=144$　これに $r=-2$ を代入して　$4a=144$

よって　$a=36$

① から　$36+d=36\cdot(-2)$

ゆえに　$d=-108$

したがって　$a_3=a+(3-1)d=36+2\cdot(-108)=$ イ-180

18 (1)　等比数列 2，8，32，……，2^{11} の和 S を求めよ。

(2)　等比数列 p，$-p^2$，p^3，…… の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(3)　初項と第 2 項との和が -9，初項から第 4 項までの和が -90 であるとき，この等比数列の公比を求めよ。

解答　(1)　$S=2730$

(2)　$p\neq -1$ のとき $S_n=\dfrac{p\{1-(-p)^n\}}{1+p}$，　$p=-1$ のとき $S_n=-n$

(3)　± 3

解説

(1)　初項は 2，公比は 4 であるから，末項 2^{11} が第 n 項であるとすると

$2\cdot 4^{n-1}=2^{11}$　すなわち　$2^{2n-1}=2^{11}$

ゆえに　$2n-1=11$　よって　$n=6$

したがって　$S=\dfrac{2(4^6-1)}{4-1}=\dfrac{2}{3}\cdot 4095=2730$

別解　初項が 2，公比が 4，末項が 2^{11} であるから

$$S=\frac{4\cdot 2^{11}-2}{4-1}=\frac{4\cdot 2048-2}{3}=2730$$

(2)　初項は p，公比は $-p$ であるから

[1]　$-p\neq 1$　すなわち　$p\neq -1$ のとき　$S_n=\dfrac{p\{1-(-p)^n\}}{1+p}$

[2]　$-p=1$　すなわち　$p=-1$ のとき　$S_n=np=-n$

(3)　初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$S_2=-9$　から　$a+ar=-9$　すなわち　$a(1+r)=-9$　……①

$S_4=-90$ から　$a+ar+ar^2+ar^3=-90$

よって　$a(1+r)+r^2a(1+r)=-90$

① を代入して　$-9+r^2(-9)=-90$　ゆえに　$r^2=9$

よって　$r=\pm 3$　すなわち，公比は　± 3

19 (1)　等比数列 96，-48，24，-12，…… の初項から第 7 項までの和を求めよ。

(2)　等比数列 1，$x+1$，$(x+1)^2$，……，$(x+1)^n$ の和を求めよ。

(3)　公比が正の数である等比数列について，初めの 3 項の和が 21 であり，次の 6 項の和が 1512 であるとき，この数列の初項および，初めの 5 項の和を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{129}{2}$　(2)　$x\neq 0$ のとき $\dfrac{(x+1)^{n+1}-1}{x}$，$x=0$ のとき $n+1$

(3)　初項は 3，和は 93

解説

(1)　初項は 96，公比は $-\dfrac{1}{2}$ であるから，第 7 項までの和は

$$\frac{96\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{96}{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{128}\right)=64\cdot\frac{129}{128}=\frac{129}{2}$$

(2)　初項は 1，公比は $x+1$，項数は $n+1$ である。

よって，$x+1\neq 1$　すなわち　$x\neq 0$ のとき，求める和は

$$\frac{1\cdot\{(x+1)^{n+1}-1\}}{(x+1)-1}=\frac{(x+1)^{n+1}-1}{x}$$

$x+1=1$　すなわち　$x=0$ のとき，求める和は

$$\underbrace{1+1+\cdots\cdots+1}_{n+1\text{ 個}}=n+1$$

(3)　初項を a，公比を $r\ (r>0)$ とすると，条件から

$a+ar+ar^2=21$　……①

$ar^3+ar^4+ar^5+ar^6+ar^7+ar^8=1512$　……②

② から　$(a+ar+ar^2)r^3+(a+ar+ar^2)r^6=1512$

① を代入すると　$21r^3+21r^6=1512$

よって　$r^6+r^3-72=0$

因数分解すると　$(r^3+9)(r^3-8)=0$　ゆえに　$r^3=-9,\ 8$

$r>0$ であるから　$r=2$

$r=2$ を ① に代入すると　$7a=21$　よって　$a=3$

すなわち，初項は　3　初めの 5 項の和は　$\dfrac{3(2^5-1)}{2-1}=93$

別解　和は　$21+ar^3+ar^4=21+ar^3(1+r)=21+3\cdot 8(1+2)=93$

20 初めの 10 項の和が 2，初めの 20 項の和が 6 である等比数列について

(1)　初項から第 30 項までの和を求めよ。

(2)　第 31 項から第 40 項までの和を求めよ。

解答　(1)　14　(2)　16

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_{10}=10a$ となり　$10a=2$

このとき，$S_{20}=20a=4\neq 6$ であるから，条件を満たさない。

ゆえに　$r\neq 1$

よって　$\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=2$ ……①，$\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}=6$ ……②

$1-r^{20}=(1-r^{10})(1+r^{10})$ であるから，② より　$\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}\cdot(1+r^{10})=6$

① を代入して　$2(1+r^{10})=6$

ゆえに　$1+r^{10}=3$　すなわち　$r^{10}=2$ ……③

(1)　$1-r^{30}=1-(r^{10})^3=(1-r^{10})\{1+r^{10}+(r^{10})^2\}$ であるから

$$S_{30}=\frac{a(1-r^{30})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}\{1+r^{10}+(r^{10})^2\}$$

①，③ を代入して　$S_{30}=2\cdot(1+2+2^2)=14$

(2)　$1-r^{40}=(1-r^{20})(1+r^{20})$ であるから

$$S_{40}=\frac{a(1-r^{40})}{1-r}=\frac{a(1-r^{20})}{1-r}\{1+(r^{10})^2\}$$

②，③ を代入して　$S_{40}=6\cdot(1+2^2)=30$

よって，求める和は　$S_{40}-S_{30}=30-14=16$

21 (1)　次の等比数列で，指定されたものを求めよ。

(ア)　初項が 3，公比が 2，和が 189 のとき　項数

(イ)　公比が -2，第 10 項までの和が -1023 のとき　初項

(2)　ある等比数列の初項から第 8 項までの和が 54，初項から第 16 項までの和が 63 であるとき，この等比数列の第 17 項から第 24 項までの和を求めよ。

解答　(1)　(ア)　6　(イ)　3　(2)　$\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　(ア)　この等比数列の項数を n とすると，条件から

$$\frac{3(2^n-1)}{2-1}=189$$

よって　$2^n=64$　すなわち　$2^n=2^6$

ゆえに　$n=6$　したがって，項数は　6

(イ)　この等比数列の初項を a とすると，条件から

$$\frac{a\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=-1023$$

よって　$-\dfrac{1023}{3}a=-1023$　ゆえに　$a=3$

したがって，初項は　3

(2)　この等比数列の初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_8=8a$ となり　$8a=54$

このとき，$S_{16}=16a=108\neq 63$ であるから，条件を満たさない。

ゆえに　$r\neq 1$

よって　$\dfrac{a(1-r^8)}{1-r}=54$ ……①，$\dfrac{a(1-r^{16})}{1-r}=63$ ……②

$1-r^{16}=(1-r^8)(1+r^8)$ であるから，② より

$$\frac{a(1-r^8)}{1-r}(1+r^8)=63$$

① を代入して　$54(1+r^8)=63$　すなわち　$r^8=\dfrac{1}{6}$ ……③

$1-r^{24}=1-(r^8)^3=(1-r^8)\{1+r^8+(r^8)^2\}$ であるから

$$S_{24}=\frac{a(1-r^{24})}{1-r}=\frac{a(1-r^8)}{1-r}\cdot\{1+r^8+(r^8)^2\}$$

①，③ を代入して　$S_{24}=54\left\{1+\dfrac{1}{6}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\right\}=54\cdot\dfrac{43}{36}=\dfrac{129}{2}$

したがって，求める和は　$S_{24}-S_{16}=\dfrac{129}{2}-63=\dfrac{3}{2}$

22 初項が 3，公比が 2 の等比数列を $\{a_n\}$ とする。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$10^3<a_n<10^5$ を満たす n の値の範囲を求めよ。

(2)　初項から第 n 項までの和が 30000 を超える最小の n の値を求めよ。

解答　(1)　$10\leqq n\leqq 16$　(2)　$n=14$

解説

(1)　初項が 3，公比が 2 の等比数列であるから　$a_n=3\cdot 2^{n-1}$

$10^3<a_n<10^5$ から　$10^3<3\cdot 2^{n-1}<10^5$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}10^3<\log_{10}3\cdot 2^{n-1}<\log_{10}10^5$

よって　$3<\log_{10}3+(n-1)\log_{10}2<5$

ゆえに　$1+\dfrac{3-\log_{10}3}{\log_{10}2}<n<1+\dfrac{5-\log_{10}3}{\log_{10}2}$

よって　$1+\dfrac{3-0.4771}{0.3010}<n<1+\dfrac{5-0.4771}{0.3010}$

すなわち　$9.38\cdots\cdots<n<16.02\cdots\cdots$

n は自然数であるから　$10\leqq n\leqq 16$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は　$\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$

$3(2^n-1)>30000$ とすると　$2^n-1>10^4$ ……①

ここで，$2^n>10^4$ について両辺の常用対数をとると　$n\log_{10}2>4$

よって　$n>\dfrac{4}{\log_{10}2}=\dfrac{4}{0.3010}=13.2\cdots\cdots$

ゆえに，$n\geqq 14$ のとき $2^n>10^4$ が成り立ち

$2^{14}-1=(2^7+1)(2^7-1)=129\cdot 127=16383>10^4$

$2^{13}-1=\dfrac{1}{2}(2^{14}-1)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{16383-1}{2}=8191<10^4$

2^n-1 は単調に増加するから，① を満たす最小の n の値は　$n=14$

23 初項が 2，公比が 4 の等比数列を $\{a_n\}$ とする。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　和 $\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots\cdots+\log_2 a_n$ を求めよ。

(2)　a_n が 10000 を超える最小の n の値を求めよ。

(3)　初項から第 n 項までの和が 100000 を超える最小の n の値を求めよ。

解答　(1)　n^2　(2)　$n=8$　(3)　$n=9$

解説

(1)　初項が 2，公比が 4 の等比数列であるから

$a_n=2\cdot 4^{n-1}=2\cdot 2^{2n-2}=2^{2n-1}$

ゆえに　$\log_2 a_n=\log_2 2^{2n-1}=2n-1=1+2(n-1)$

したがって，求める和は初項 1，公差 2 の等差数列の初項から第 n 項までの和である

から　$\dfrac{1}{2}n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 2\}=n^2$

(2)　$a_n>10000$ とすると　$2^{2n-1}>10^4$

両辺の常用対数をとると　$\log_{10}2^{2n-1}>\log_{10}10^4$

ゆえに　$(2n-1)\log_{10}2>4$

よって　$n>\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{\log_{10}2}+1\right)=\dfrac{2}{0.3010}+\dfrac{1}{2}=7.1\cdots\cdots$

n は自然数であるから，最小の n の値は　$n=8$

(3)　初項から第 n 項までの和は　$\dfrac{2(4^n-1)}{4-1}=\dfrac{2(4^n-1)}{3}$

$\dfrac{2(4^n-1)}{3}>100000$ ……① として，両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\frac{2(4^n-1)}{3}>\log_{10}10^5$$

ゆえに　$\log_{10}2+\log_{10}(4^n-1)-\log_{10}3>5$

よって　$\log_{10}(4^n-1)>5-\log_{10}2+\log_{10}3$

ここで　$5-\log_{10}2+\log_{10}3=5-0.3010+0.4771=5.1761>5$

また　$5=5\log_{10}10=\log_{10}10^5$

ゆえに　$\log_{10}(4^n-1)>\log_{10}10^5$　よって　$4^n-1>10^5$

ゆえに　$4^n>10^5$　すなわち　$2^{2n}>10^5$

この両辺の常用対数をとると　$2n\log_{10}2>5$

ゆえに　$n>\dfrac{5}{2\log_{10}2}=\dfrac{5}{2\cdot 0.3010}=8.3\cdots\cdots$

n は自然数であるから　$n\geqq 9$

ここで　$\dfrac{2(4^8-1)}{3}=\dfrac{2}{3}(4^4+1)(4^4-1)=43690$

$\dfrac{2(4^9-1)}{3}=\dfrac{2}{3}(2\cdot 4^4+1)(2\cdot 4^4-1)=174762$

したがって，① を満たす最小の自然数 n は　$n=9$

24 $S=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{99}$ とする。$\log_{10}3=0.4771$ として，S の桁数を求めよ。

解答　48 桁

解説

$S=\dfrac{1\cdot(3^{100}-1)}{3-1}=\dfrac{1}{2}(3^{100}-1)$

$3^{100}>\dfrac{1}{2}\cdot 3^{100}>\dfrac{1}{2}(3^{100}-1)$ であるから　$3^{99}<S<3^{100}$

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}3^{99}<\log_{10}S<\log_{10}3^{100}$

すなわち　$99\log_{10}3<\log_{10}S<100\log_{10}3$

$\log_{10}3=0.4771$ であるから

$99\log_{10}3=47.2329$，$100\log_{10}3=47.71$

よって　$47<\log_{10}S<48$

ゆえに　$10^{47}<S<10^{48}$

したがって，S の桁数は　48 桁

25 次の等比数列の一般項を求めよ。また，第 5 項を求めよ。

(1)　1，2，4，……　　(2)　6，$2\sqrt{3}$，2，……

(3) 8，-12，18，……　　(4) 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，……

解答　一般項，第 5 項の順に

(1) 2^{n-1}，16　(2) $6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$，$\frac{2}{3}$　(3) $8\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，$\frac{81}{2}$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$\frac{1}{16}$

解説

与えられた等比数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 初項が 1，公比が 2 であるから，一般項は　$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$

また，第 5 項は　$a_5=2^{5-1}=16$

(2) 初項が 6，公比が $\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，一般項は　$a_n=6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

また，第 5 項は　$a_5=6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{5-1}=\frac{2}{3}$

(3) 初項が 8，公比が $\frac{-12}{8}=-\frac{3}{2}$ であるから，一般項は　$a_n=8\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

また，第 5 項は　$a_5=8\left(-\frac{3}{2}\right)^{5-1}=\frac{81}{2}$

(4) 初項が 1，公比が $-\frac{1}{2}$ であるから，一般項は　$a_n=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

また，第 5 項は　$a_5=\left(-\frac{1}{2}\right)^{5-1}=\frac{1}{16}$

26 (1) 初項が 5，公比が 2，項数が 8 である等比数列の末項を求めよ。
(2) 公比が 4，第 10 項が 4096 である等比数列の初項を求めよ。

解答　(1) 640　(2) $\frac{1}{64}$

解説

(1) 第 n 項は $5\cdot 2^{n-1}$ であるから，末項は　$5\cdot 2^{8-1}=640$

(2) 初項を a とすると，第 n 項は　$a\cdot 4^{n-1}$

第 10 項が 4096 であるから　$a\cdot 4^9=4096$

よって　$a=\frac{4^6}{4^9}=\frac{1}{64}$

27 数列 2，a，$\frac{9}{2}$ が等比数列であるとき，a の値を求めよ。

解答　$a=\pm 3$

解説

数列 2，a，$\frac{9}{2}$ が等比数列であるから　$a^2=2\cdot\frac{9}{2}$

よって　$a=\pm 3$

28 次のような等比数列の和を求めよ。

(1) 初項 1，公比 2，末項 64　　(2) 初項 162，公比 $-\frac{1}{3}$，末項 2

解答　(1) 127　(2) 122

解説

(1) 項数を n とする。

$1\cdot 2^{n-1}=64$ から　$2^{n-1}=2^6$

よって　$n-1=6$　　ゆえに　$n=7$

したがって，求める和は　$\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}=127$

(2) 項数を n とする。

$162\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2$ から　$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{81}$

すなわち　$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

よって　$n-1=4$　　ゆえに　$n=5$

したがって，求める和は　$\frac{162\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=122$

別解　初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$S=\frac{a-rl}{1-r}=\frac{rl-a}{r-1}$

(1) $\frac{2\cdot 64-1}{2-1}=127$

(2) $\frac{162-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=122$

29 数列 8，a，b が等差数列で，数列 a，b，36 が等比数列であるとき，a，b の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=-6$　または　$a=16$，$b=24$

解説

数列 8，a，b が等差数列であるから　$2a=8+b$　……①

また，数列 a，b，36 が等比数列であるから　$b^2=36a$　……②

① を ② に代入して　$b^2=18(8+b)$

展開して整理すると　$b^2-18b-144=0$

よって　$(b+6)(b-24)=0$　　ゆえに　$b=-6$，24

① から a を求めて　$a=1$，$b=-6$　または　$a=16$，$b=24$

30 等比数列をなす 3 つの実数があって，それらの和が 19，積が 216 であるという。これら 3 つの実数を求めよ。

解答　4，6，9

解説

3 つの実数を a，b，c とし，この順に等比数列をなすとすると　$b^2=ac$　……①

また　$a+b+c=19$　……②

$abc=216$　……③

①，③ から　$b^3=216=6^3$

b は実数であるから　$b=6$

これを ①，② に代入して　$ac=36$，$a+c=13$

$c=13-a$ から　$a(13-a)=36$

よって　$a^2-13a+36=0$

左辺を因数分解すると　$(a-4)(a-9)=0$

ゆえに　$a=4$，9

$a=4$ のとき $c=9$，$a=9$ のとき $c=4$

よって，求める 3 つの実数は　4，6，9

31 (1) 公比が -2，初項から第 10 項までの和が -1023 である等比数列の初項を求めよ。
(2) 第 2 項が 6，初項から第 3 項までの和が 21 である等比数列の初項と公比を求めよ。

解答　(1) 3　(2) 初項 3，公比 2　または　初項 12，公比 $\frac{1}{2}$

解説

(1) 初項を a とすると，初項から第 10 項までの和が -1023 であるから

$\frac{a\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=-1023$

よって　$a=3$　　ゆえに，初項は　3

(2) 初項を a，公比を r とする。

第 2 項が 6 であるから　$ar=6$　……①

また，初項から第 3 項までの和が 21 であるから　$a+ar+ar^2=21$

よって　$a(1+r+r^2)=21$

この両辺に r を掛けて　$ar(1+r+r^2)=21r$

これに ① を代入して　$6(1+r+r^2)=21r$

すなわち　$2r^2-5r+2=0$

ゆえに　$(r-2)(2r-1)=0$

したがって　$r=2$，$\frac{1}{2}$

① から，$r=2$ のとき　$a=3$，

$r=\frac{1}{2}$ のとき $a=12$

よって　初項 3，公比 2　または　初項 12，公比 $\frac{1}{2}$

32 次の等比数列について，初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。
(1) 初めの 2 項の和が -2，次の 2 項の和が -8
(2) 初項から第 3 項までの和が 3，第 4 項から第 6 項までの和が -24

解答　(1) 初項 $-\frac{2}{3}$，公比 2　または　初項 2，公比 -2　(2) 初項 1，公比 -2

解説

初項を a，公比を r とする。

(1) $a+ar=-2$　……①

$ar^2+ar^3=-8$　……②

② から　$(a+ar)r^2=-8$

これに ① を代入して　$-2r^2=-8$

ゆえに　$r^2=4$　　よって　$r=\pm 2$

①から，$r=2$ のとき　$a=-\dfrac{2}{3}$，

$r=-2$ のとき　$a=2$

したがって　初項 $-\dfrac{2}{3}$，公比 2 または 初項 2，公比 -2

(2)　$a+ar+ar^2=3$　……①

$ar^3+ar^4+ar^5=-24$　……②

②から　$(a+ar+ar^2)r^3=-24$

これに①を代入して　$3r^3=-24$

ゆえに　$r^3=-8$

r は実数であるから　$r=-2$

このとき，①から　$a-2a+4a=3$

よって　$3a=3$　ゆえに　$a=1$

したがって　初項 1，公比 -2

33 初項から第 10 項までの和が 4，初項から第 20 項までの和が 24 である等比数列について，初項から第 40 項までの和を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解答　624

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_{10}=10a$，$S_{20}=20a$ となり，$S_{10}=4$，$S_{20}=24$ であるから

$10a=4$，　$20a=24$

これらをともに満たす a は存在しないから

$r\neq1$

よって，$S_{10}=\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}$，$S_{20}=\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}$ であり

$\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=4$　……①，　$\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}=24$　……②

$1-r^{20}=(1-r^{10})(1+r^{10})$ であるから，②より　$\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}\cdot(1+r^{10})=24$

①を代入して　$4(1+r^{10})=24$　よって　$r^{10}=5$　……③

③を①に代入すると　$\dfrac{a(1-5)}{1-r}=4$

ゆえに　$\dfrac{a}{1-r}=-1$

したがって　$S_{40}=\dfrac{a(1-r^{40})}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}\{1-(r^{10})^4\}=(-1)\cdot(1-5^4)=624$

別解　$1-r^{40}=(1-r^{20})(1+r^{20})$ であるから

$S_{40}=\dfrac{a(1-r^{40})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^{20})}{1-r}\cdot(1+r^{20})$

②，③を代入して　$S_{40}=24(1+5^2)=624$

34 初項が 1，公比が 3 である等比数列で，初めて 100 より大きくなるのは第何項か。また，初項から第何項までの和が初めて 1000 より大きくなるか。

解答　順に　第 6 項，第 7 項

解説

この数列の第 n 項は　3^{n-1}

n は自然数であるから，n が増加すると 3^{n-1} も増加し，$3^4<100<3^5$ であるから，初めて 100 より大きくなるのは第 6 項である。

また，第 n 項までの和を S_n とすると　$S_n=\dfrac{3^n-1}{3-1}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

$S_n>1000$ とすると　$\dfrac{1}{2}(3^n-1)>1000$

よって　$3^n>2001$

n は自然数であるから，n が増加すると 3^n も増加し，$3^6=729$，$3^7=2187$ であるから，初項から第 7 項までの和が初めて 1000 より大きくなる。

35 初項が 2，公比が 3 である等比数列で，初項から第何項までの和が初めて 100000 より大きくなるか。ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答　第 11 項

解説

この等比数列の初項から第 n 項までの和は　$\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$

$3^n-1>100000$ とすると　$3^n>100001$

ここで，不等式 $3^n>100000$ を考え，両辺の 10 を底とする対数をとると

$n\log_{10}3>\log_{10}100000$

すなわち　$0.4771n>5$

よって　$n>\dfrac{5}{0.4771}=10.4\cdots\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=11$

ここで　$3^{11}=3\cdot(3^5)^2=3\cdot243^2=177147>100001$

よって，初項から第 11 項までの和が初めて 100000 よりも大きくなる。

36 次の等比数列の一般項を求めよ。

(1)　-4，8，-16，32，……　(2)　3，1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{27}$，……

解答　(1)　$(-1)^n2^{n+1}$　(2)　3^{-n+2}

解説

与えられた等比数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　初項 -4，公比 -2 であるから，一般項は

$a_n=(-4)\cdot(-2)^{n-1}=(-1)^n2^{n+1}$

(2)　初項 3，公比 $\dfrac{1}{3}$ であるから，一般項は

$a_n=3\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=3^{-n+2}$

37 第 4 項が -24，第 6 項が -96 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$a_n=-3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=3(-2)^{n-1}$

解説

この数列の初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

第 4 項が -24 であるから　$ar^3=-24$　……①

第 6 項が -96 であるから　$ar^5=-96$　……②

①，②から　$-24r^2=-96$

よって　$r^2=4$

ゆえに　$r=\pm2$

①から　$r=2$ のとき $a=-3$，$r=-2$ のとき $a=3$

よって，一般項は　$a_n=-3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=3(-2)^{n-1}$

38 (1)　初項 1，公比 2，項数 n の等比数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

(2)　初項 9，公比 -3 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{9\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{9}{4}\{1-(-3)^n\}$$

解説

39 次の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　1，-2，4，-8，……　(2)　9，0.9，0.09，0.009，……

解答　(1)　$\dfrac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$　(2)　$10\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$

解説

与えられた等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　与えられた数列は，初項が 1，公比が -2 であるから

$$S_n=\frac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}$$

(2)　与えられた数列は，初項が 9，公比が $\dfrac{0.9}{9}=\dfrac{1}{10}$ であるから

$$S_n=\frac{9\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}=10\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

40 次のような等比数列の一般項を求めよ。ただし，公比は実数とする。

(1)　第 5 項が -48，第 7 項が -192

(2)　第 2 項が 14，第 5 項が 112

解答　(1)　$-3\cdot2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$　(2)　$7\cdot2^{n-1}$

解説

初項を a，公比を r とすると，第 n 項は　ar^{n-1}

(1)　第 5 項が -48 であるから　$ar^4=-48$　……①

第 7 項が -192 であるから　$ar^6=-192$　すなわち　$ar^4\cdot r^2=-192$

これに①を代入して　$-48r^2=-192$

よって　$r^2=4$　ゆえに　$r=\pm2$

①から　$a=-3$

よって，一般項は　$-3\cdot 2^{n-1}$ または $-3(-2)^{n-1}$

(2) 第 2 項が 14 であるから　$ar=14$ ……①

第 5 項が 112 であるから　$ar^4=112$　すなわち　$ar\cdot r^3=112$

これに ① を代入して　$14r^3=112$

よって　$r^3=8$

r は実数であるから　$r=2$

① から　$a=7$

よって，一般項は　$7\cdot 2^{n-1}$

41 次のような等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 初項 2，公比 2　(2) 初項 7，公比 -4　(3) 初項 -2，公比 $\frac{1}{2}$

解答 (1) $2(2^n-1)$　(2) $\frac{7}{5}\{1-(-4)^n\}$　(3) $-4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

解説

求める和を S_n とする。

(1) $S_n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1)$

(2) $S_n=\frac{7\{1-(-4)^n\}}{1-(-4)}=\frac{7}{5}\{1-(-4)^n\}$

(3) $S_n=\frac{-2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=-4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

42 次の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 5，10，20，……　(2) -1，5，-25，……　(3) $\sqrt{2}-1$，1，……

解答 (1) $5(2^n-1)$　(2) $-\frac{1}{6}\{1-(-5)^n\}$　(3) $\frac{(\sqrt{2}+1)^{n-1}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

解説

公比を r，求める和を S_n とする。

(1) $r=\frac{10}{5}=2$

よって　$S_n=\frac{5(2^n-1)}{2-1}=5(2^n-1)$

(2) $r=\frac{5}{-1}=-5$

よって　$S_n=\frac{(-1)\{1-(-5)^n\}}{1-(-5)}=-\frac{1}{6}\{1-(-5)^n\}$

(3) $r=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

よって　$S_n=\frac{(\sqrt{2}-1)\{(\sqrt{2}+1)^n-1\}}{(\sqrt{2}+1)-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^{n-1}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

43 次の数の正の約数の和を求めよ。

(1) 3^7　(2) $3^4\cdot 7^3$　(3) 864

解答 (1) 3280　(2) 48400　(3) 2520

解説

(1) 求める和は　$1+3+3^2+\cdots\cdots+3^7=\frac{3^8-1}{3-1}=3280$

(2) 求める和は

$$(1+3+3^2+3^3+3^4)(1+7+7^2+7^3)=\frac{3^5-1}{3-1}\cdot\frac{7^4-1}{7-1}=121\cdot 400$$
$$=48400$$

(3) $864=2^5\cdot 3^3$ であるから，求める和は

$$(1+2+\cdots\cdots+2^5)(1+3+3^2+3^3)=\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{3^4-1}{3-1}=63\cdot 40$$
$$=2520$$

44 800 の正の約数の和を求めよ。

解答 1953

解説

800 を素因数分解すると　$2^5\cdot 5^2$

よって，800 の正の約数の和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+5+5^2)=\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{5^3-1}{5-1}=1953$$