体積クイズ(難)

1 曲線 $y=\sin 2x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C 上の点 P を通り y 軸に平行な直線と x 軸の交点を Q とし，線分 PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を，xy 平面に対して垂直に作る。P の x 座標が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで変わるとき，この正三角形が通過してできる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{\sqrt{3}}{16}\pi$

解説

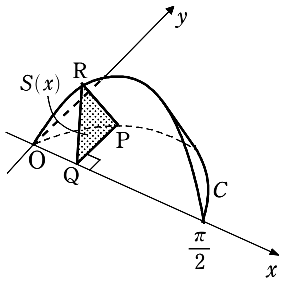
点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

PQ $=y=\sin 2x$

ゆえに，PQ を 1 辺とする正三角形 PQR の面積 $S(x)$ は

$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}^2\sin 60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{PQ}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 2x$$



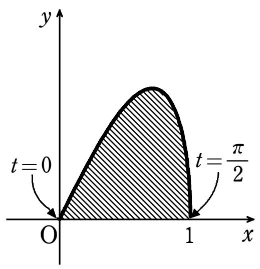
よって，求める立体の体積 V は

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 2x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{16}\pi$$

2 次の曲線と x 軸で囲まれた部分を，x 軸 の周りに 1 回転させてできる立体の体積 を求めよ。

$x=\sin t$，$y=\sin 2t$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$



解答 $\frac{8}{15}\pi$

解説

$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$y\geqq 0$ である。

$y=0$ とすると $t=0,\ \frac{\pi}{2}$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

求める体積 V は $V=\pi\int_0^1 y^2dx$

$x=\sin t$ から $dx=\cos t\,dt$

よって，置換積分法により

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^2\cos t\,dt=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\cos t\,dt$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\cos t\,dt$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t\cos t-\sin^4 t\cos t)dt$$

$$=4\pi\left[\frac{1}{3}\sin^3 t-\frac{1}{5}\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{15}\pi$$

3 曲線 $y=x+\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$

解説

曲線と直線の交点は O$(0,\ 0)$，A$(\pi,\ \pi)$ であり，

OA $=\sqrt{2}\pi$ である。

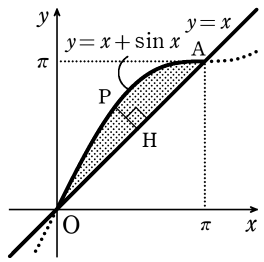
$0\leqq x\leqq\pi$ とし，曲線 $y=x+\sin x$ 上の点

P$(x,\ x+\sin x)$ から直線 $y=x$ に垂線 PH を下ろし，

PH $=h$，OH $=t$ とおく。

H を通り，直線 $y=x$ に垂直な平面による切り口の

面積を $S(t)$ とすると



$$V=\int_0^{\sqrt{2}\pi}S(t)dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}\pi}h^2dt$$

ここで $h=\frac{|(x+\sin x)-x|}{\sqrt{2}}=\frac{\sin x}{\sqrt{2}}$

また $t=\sqrt{2}x+h=\frac{2x+\sin x}{\sqrt{2}}$

ゆえに $dt=\frac{2+\cos x}{\sqrt{2}}dx$

t	$0\longrightarrow\sqrt{2}\pi$
x	$0\longrightarrow\pi$

よって

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}\pi}h^2dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\cdot\frac{2+\cos x}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi}(2\sin^2 x+\sin^2 x\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x+\sin^2 x\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$$

4 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ の範囲において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$

解説

2 つの曲線の交点の x 座標は，方程式

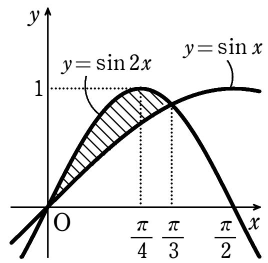
$$\sin x=\sin 2x$$

の解である。これを解くと

$$\sin x(2\cos x-1)=0$$

から $\sin x=0$，$\cos x=\frac{1}{2}$

よって，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ では $x=0,\ \frac{\pi}{3}$



また，右の図からもわかるように，与えられた区間では $\sin 2x\geqq\sin x$ であるから，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x-\cos 4x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$$

5 曲線 $y=e^x$ とこの曲線上の点 $(1,\ e)$ における接線，および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。また，この部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答 $S=\frac{e}{2}-1$，$V=\frac{e^2-3}{6}\pi$

解説

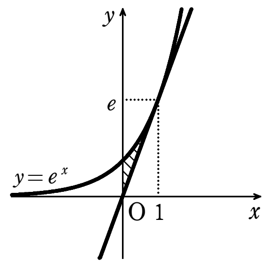
$y'=e^x$ であるから，点 $(1,\ e)$ における接線の方程式は

$y-e=e(x-1)$ すなわち $y=ex$

求める面積 S は

$$S=\int_0^1(e^x-ex)dx=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{e}{2}-1$$



求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^1(e^x)^2dx-\frac{1}{3}\pi\cdot e^2\cdot 1$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\frac{e^2}{3}\pi=\frac{e^2-3}{6}\pi$$

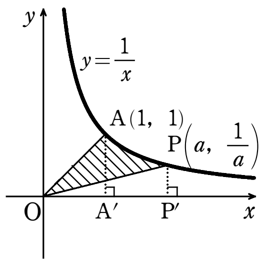
6 O を座標平面の原点とし，$a>1$ とする。曲線 $y=\frac{1}{x}$ 上に 2 点 A$(1,\ 1)$，P$\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$ をとる。線分 OP，OA，および曲線の弧 AP で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V(a)$ とする。

(1) $V(a)$ を a で表せ。 (2) $\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

解答 (1) $V(a)=\frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)$ (2) $\frac{4}{3}\pi$

解説

(1)　2点A，Pから x 軸に下ろした垂線を，それぞれ AA′，PP′ とする。
図形 AA′P′P，△AOA′，△POP′ を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を，それぞれ V_1，V_2，V_3 とすると



$$V_1=\pi\int_1^a\left(\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a=\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot1=\frac{1}{3}\pi$$

$$V_3=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2a=\frac{1}{3a}\pi$$

したがって

$$V(a)=V_1+V_2-V_3=\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{3a}\pi=\frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{4}{3}\pi$

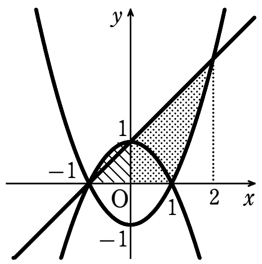
7　放物線 $y=x^2-1$ と直線 $y=x+1$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　$\frac{20}{3}\pi$

解説

$x^2-1=x+1$ とすると，$x^2-x-2=0$ から
$x=-1，2$

放物線 $y=x^2-1$ の x 軸より下側の部分を，x 軸に関して対称に折り返すと右図のようになる。



このとき，折り返してできる放物線 $y=-x^2+1$ と直線 $y=x+1$ の交点の x 座標は，$-x^2+1=x+1$ を解いて　$x=0，-1$

よって，求める体積 V は

$$V=\pi\int_{-1}^0(x^2-1)^2dx+\pi\int_0^2(x+1)^2dx-\pi\int_1^2(x^2-1)^2dx$$

$$=\pi\int_{-1}^0(x^4-2x^2+1)dx+\pi\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_0^2-\pi\int_1^2(x^4-2x^2+1)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-1}^0+\frac{26}{3}\pi-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right]_1^2$$

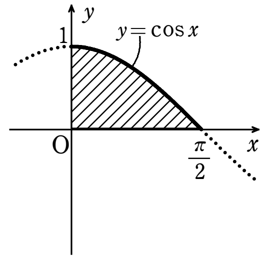
$$=\frac{20}{3}\pi$$

8　曲線 $y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　$\pi(\pi-2)$

解説

求める体積を V とすると　$V=\pi\int_0^1x^2dy$



$y=\cos x$ から　$dy=-\sin x\,dx$
y と x の対応は次のようになる。

y	$0\longrightarrow1$
x	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow0$

よって　$V=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0x^2(-\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$

$$=\pi\left\{\left[x^2(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cos x\,dx\right\}$$

$$=\pi\left(\left[2x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx\right)$$

$$=\pi\left(\pi+\left[2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\pi(\pi-2)$$

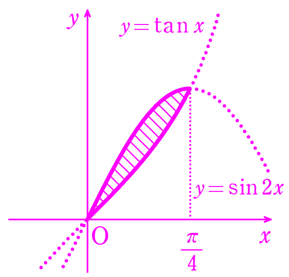
9　区間 $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ において，2つの曲線 $y=\sin2x$，$y=\tan x$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。[35点]

解答　2つの曲線の交点の x 座標は，方程式 $\sin2x=\tan x$ の実数解である。

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ の範囲でこれを解くと　$2\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$

両辺に $\cos x$ を掛けて　$2\sin x\cos^2x=\sin x$

よって　$\sin x(2\cos^2x-1)=0$



$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ で $\cos x>0$ であるから

$\sin x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$x=0，\frac{\pi}{4}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$\sin2x\geqq\tan x$ であるから

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^22x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos4x}{2}dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\pi\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(\frac{3}{8}\pi-1\right)$$

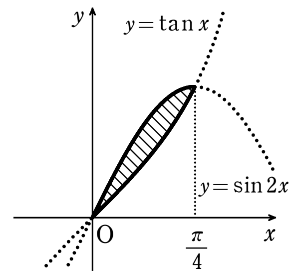
解説

2つの曲線の交点の x 座標は，方程式 $\sin2x=\tan x$ の実数解である。

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ の範囲でこれを解くと　$2\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$

両辺に $\cos x$ を掛けて　$2\sin x\cos^2x=\sin x$

よって　$\sin x(2\cos^2x-1)=0$



$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ で $\cos x>0$ であるから

$\sin x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$x=0，\frac{\pi}{4}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$\sin2x\geqq\tan x$ であるから

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^22x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos4x}{2}dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\pi\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(\frac{3}{8}\pi-1\right)$$

10　曲線 $x=\cos t$，$y=2\sin^3t\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。[35点]

解答　$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ において　$x\geqq0$，$y\geqq0$

$y=2\sin^3t$ から　$dy=6\sin^2t\cos t\,dt$
また，y と t の対応は右のようになる。
よって，求める体積 V は

y	$0\longrightarrow2$
t	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$V=\pi\int_0^2x^2dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\cdot6\sin^2t\cos t\,dt$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2t)\sin^2t\cos t\,dt$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2t-\sin^4t)(\sin t)'dt$$

$$=6\pi\left[\frac{\sin^3t}{3}-\frac{\sin^5t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{5}\pi$$

解説

$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ において　$x\geqq0$，$y\geqq0$

$y=2\sin^3t$ から　$dy=6\sin^2t\cos t\,dt$
また，y と t の対応は右のようになる。
よって，求める体積 V は

y	$0\longrightarrow2$
t	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$V=\pi\int_0^2x^2dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\cdot6\sin^2t\cos t\,dt$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2t)\sin^2t\cos t\,dt$$

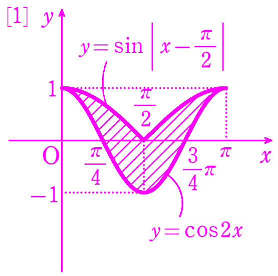
$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2t-\sin^4t)(\sin t)'dt$$

$$=6\pi\left[\frac{\sin^3t}{3}-\frac{\sin^5t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{5}\pi$$

11 $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，2つの曲線 $y=\sin\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$，$y=\cos 2x$ で囲まれた部分を D とする。D を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。[40点]

解答　$y=\sin\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$

$$=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\text{ のとき}\right)\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqq\pi\text{ のとき}\right)\end{cases}$$



よって，D は図[1]の斜線部分で，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称である。

$\cos x=-\cos 2x$ とおくと

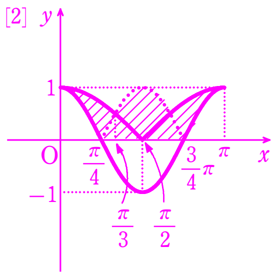
$$2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

ゆえに　$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos x+1>0$ から

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

よって　$x=\dfrac{\pi}{3}$



ゆえに，図[2]の斜線部分を x 軸の周りに1回転させると考えてよい。

したがって，求める体積 V は

$$V=2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx\right)$$

$$=\pi\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4x)dx\right\}$$

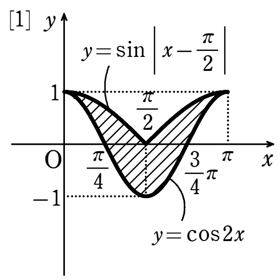
$$=\pi\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\pi\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\pi\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$$

解説

$y=\sin\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$

$$=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\text{ のとき}\right)\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x & \left(\dfrac{\pi}{2}<x\leqq\pi\text{ のとき}\right)\end{cases}$$



よって，D は図[1]の斜線部分で，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称である。

$\cos x=-\cos 2x$ とおくと

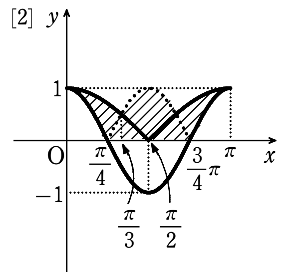
$$2\cos^2 x+\cos x-1=0$$

ゆえに　$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos x+1>0$ から

$$\cos x=\frac{1}{2}$$

よって　$x=\dfrac{\pi}{3}$



ゆえに，図[2]の斜線部分を x 軸の周りに1回転させると考えてよい。

したがって，求める体積 V は

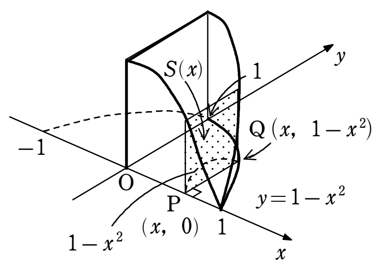
$$V=2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx\right)$$

$$=\pi\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 4x)dx\right\}$$

$$=\pi\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\pi\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\pi\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$$

12 (1)　右の図のように，2点 P $(x,\ 0)$，Q $(x,\ 1-x^2)$ を結ぶ線分を1辺とする正方形を，x 軸に垂直な平面上に作る。P が x 軸上を原点 O から点 $(1,\ 0)$ まで動くとき，この正方形が描く立体の体積を求めよ。



(2)　曲線 $y=x^2+2$ と x 軸および2直線 $x=1$，$x=3$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{8}{15}$　　(2)　$\dfrac{1366}{15}\pi$

解説

(1)　P $(x,\ 0)$，Q $(x,\ 1-x^2)$，$0\leqq x\leqq 1$ であるから　　$\mathrm{PQ}=1-x^2$

2点 P，Q を結ぶ線分を1辺とする正方形の面積を $S(x)$ とすると

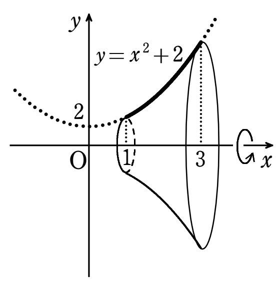
$$S(x)=\mathrm{PQ}^2=(1-x^2)^2$$

したがって，求める立体の体積を V とすると

$$V=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1(1-x^2)^2dx=\int_0^1(x^4-2x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

(2)　求める回転体の体積を V とすると



$$V=\pi\int_1^3 y^2dx=\pi\int_1^3(x^2+2)^2dx$$

$$=\pi\int_1^3(x^4+4x^2+4)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{4}{3}x^3+4x\right]_1^3=\frac{1366}{15}\pi$$

13 (1)　底面の半径が r，高さが r である直円柱を，底面の直径 AB を含み底面と $45°$ の傾きをなす平面で2つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。

(2)　3次関数 $y=x^3-2x^2-x+2$ のグラフ上の点 $(1,\ 0)$ における接線を ℓ とする。この3次関数のグラフと接線 ℓ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。

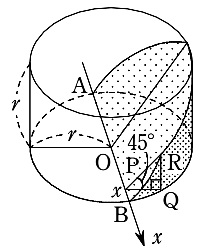
解答　(1)　$\dfrac{2}{3}r^3$　　(2)　$\dfrac{22}{105}\pi$

解説

(1)　右の図のように x 軸をとり，x 軸上に点 P をとる。

P を通り x 軸上に垂直な平面による切り口は直角二等辺三角形 PQR となる。

点 P の座標を x とすると



$$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\sqrt{r^2-x^2}$$

よって，△PQR の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\frac{1}{2}(r^2-x^2)$$

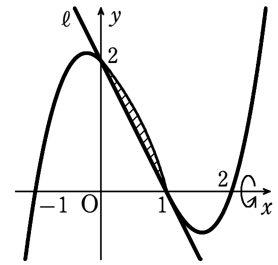
したがって，求める体積 V は

$$V=\int_{-r}^{r}\frac{1}{2}(r^2-x^2)dx=\int_0^r(r^2-x^2)dx=\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{2}{3}r^3$$

(2)　$y=x^3-2x^2-x+2$ から　　$y'=3x^2-4x-1$

$x=1$ のとき　　$y'=-2$

よって，接線 ℓ の方程式は　　$y=-2(x-1)$



$x^3-2x^2-x+2=-2(x-1)$ とすると

$x(x-1)^2=0$　　ゆえに　　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき　　$x^3-2x^2-x+2\geqq -2(x-1)$

したがって，図から求める立体の体積は

$$\pi\int_0^1(x^3-2x^2-x+2)^2dx-\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 1$$

$$=\pi\int_0^1(x^6-4x^5+2x^4+8x^3-7x^2-4x+4)dx-\frac{4}{3}\pi$$

$$=\pi\left[\frac{x^7}{7}-\frac{2}{3}x^6+\frac{2}{5}x^5+2x^4-\frac{7}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^1-\frac{4}{3}\pi$$

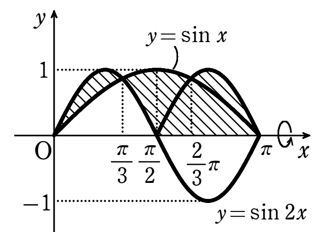
$$=\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+2-\frac{7}{3}-2+4\right)\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{22}{105}\pi$$

14 $0\leqq x\leqq\pi$ において，2つの曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答　$V=\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{9\sqrt{3}}{16}\pi$

解説

曲線 $y=\sin 2x$ の x 軸より下側の部分を x 軸に関して折り返すと，右の図のようになる。



直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関する対称性を考えて

$$V=\left(\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 2x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx\right)\times 2$$

$$-\left(\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx\right)$$

$\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$，$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ であるから

$$V=2\pi\left(\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)-\pi\left(\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{16}\pi$$

15 xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r=2+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ により表される曲線を C とする。C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

解答 $\dfrac{40}{3}\pi$

解説

$x=r\cos\theta=(2+\cos\theta)\cos\theta$，　$y=r\sin\theta=(2+\cos\theta)\sin\theta$

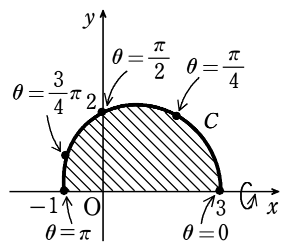
$\theta=0$ のとき　$x=3$，　$\theta=\pi$ のとき　$x=-1$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において　　$y\geqq 0$

また　　$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta-\cos\theta\sin\theta$

$\qquad=-2\sin\theta(1+\cos\theta)$

$0<\theta<\pi$ のとき，$\dfrac{dx}{d\theta}<0$ であるから，θ に対して x は単調に減少する。



求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_{-1}^{3}y^2dx=\pi\int_{\pi}^{0}(2+\cos\theta)^2\sin^2\theta(-2\sin\theta)(1+\cos\theta)d\theta$$

$$=2\pi\int_{\pi}^{0}(2+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)(-\sin\theta)d\theta$$

$\cos\theta=t$ とおくと　　$-\sin\theta\,d\theta=dt$

また，θ と t の対応は右のようになるから

θ	$\pi\to 0$
t	$-1\to 1$

$$V=2\pi\int_{-1}^{1}(2+t)^2(1-t^2)(1+t)dt$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}(4+8t+t^2-7t^3-5t^4-t^5)dt$$

$$=4\pi\int_0^1(4+t^2-5t^4)dt=4\pi\left[4t+\frac{1}{3}t^3-t^5\right]_0^1=\frac{40}{3}\pi$$

16 (1)　2 つの曲線 $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(2)　曲線 $y=\log 3x$ を C とする。曲線 C，原点 O を通る曲線 C の接線 ℓ，x 軸とで囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 (1) $\dfrac{3}{10}\pi$　　(2) $\dfrac{(e^2-3)\pi}{54}$

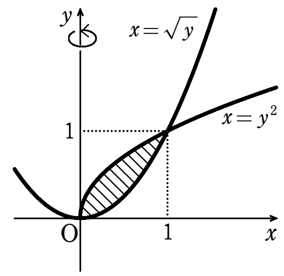
解説

(1)　$y=\sqrt{x}$ から　　$x=y^2$

$y=x^2$ に代入して　　$y=y^4$

よって　　$y(y^3-1)=0$

ゆえに　　$y=0,\ 1$



求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^1 y\,dy-\pi\int_0^1 y^4dy=\pi\int_0^1(y-y^4)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}\pi$$

(2)　$y'=\dfrac{3}{3x}=\dfrac{1}{x}$

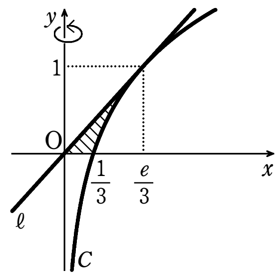
曲線 C と接線 ℓ の接点の座標を $(t,\ \log 3t)$ とすると，接線 ℓ の方程式は

$$y-\log 3t=\frac{1}{t}(x-t)\quad\cdots\cdots ①$$

この直線が原点を通るから　　$-\log 3t=-1$　　　よって　　$t=\dfrac{e}{3}$

ゆえに，接線 ℓ の方程式は ① から　　$y=\dfrac{3}{e}x$

$y=\log 3x$ から　　$x=\dfrac{e^y}{3}$



求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{e^y}{3}\right)^2dy-\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{e}{3}\right)^2\cdot 1$$

$$=\frac{\pi}{9}\int_0^1 e^{2y}dy-\frac{\pi e^2}{27}$$

$$=\frac{\pi}{18}\left[e^{2y}\right]_0^1-\frac{\pi e^2}{27}$$

$$=\frac{\pi(e^2-1)}{18}-\frac{\pi e^2}{27}=\frac{(e^2-3)\pi}{54}$$

17 曲線 $y=e^x$ と，この曲線上の点 $(2,\ e^2)$ における接線，および x 軸，y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

解答 $\left(\dfrac{e^2}{3}+2\right)\pi$

解説

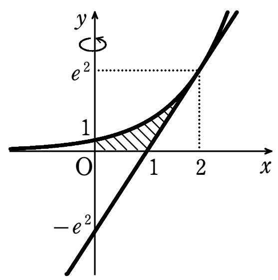
$y=e^x$ から　　$y'=e^x$

接線の方程式は　　$y-e^2=e^2(x-2)$

よって　　$y=e^2(x-1)$

$y=e^x$ から　　$x=\log y$

$y=e^2(x-1)$ から　　$x=\dfrac{y}{e^2}+1$



したがって，求める回転体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{e^2}\left(\frac{y}{e^2}+1\right)^2dy-\pi\int_1^{e^2}(\log y)^2dy$$

ここで　$\displaystyle\int(\log y)^2dy=\int(y)'(\log y)^2dy$

$$=y(\log y)^2-\int y\cdot(2\log y)\cdot\frac{1}{y}dy$$

$$=y(\log y)^2-2\int(y)'\log y\,dy$$

$$=y(\log y)^2-2\left(y\log y-\int y\cdot\frac{1}{y}dy\right)$$

$$=y(\log y)^2-2(y\log y-y)+C\ \ (C\ は積分定数)$$

ゆえに　　$V=\pi\left[\dfrac{1}{e^4}\cdot\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{y^2}{e^2}+y\right]_0^{e^2}-\pi\Big[y(\log y)^2-2(y\log y-y)\Big]_1^{e^2}$

$$=\left(\frac{e^2}{3}+2\right)\pi$$

18 放物線 $y=-x^2+2x+2$ と x 軸によって囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 $\dfrac{22+12\sqrt{3}}{3}\pi$

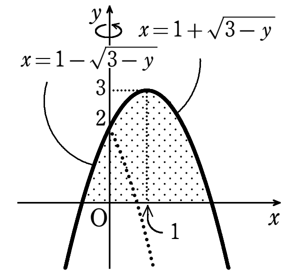
解説

$y=-x^2+2x+2$ から　　$y=-(x-1)^2+3$

ゆえに　　$(x-1)^2=3-y$

$x\geqq 1$ のとき　　$x=1+\sqrt{3-y}$

$x\leqq 1$ のとき　　$x=1-\sqrt{3-y}$



よって，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^3(1+\sqrt{3-y})^2dy-\pi\int_2^3(1-\sqrt{3-y})^2dy$$

$$=\pi\int_0^3(4-y+2\sqrt{3-y})dy-\pi\int_2^3(4-y-2\sqrt{3-y})dy$$

$$=\pi\left[4y-\frac{y^2}{2}-\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3-\pi\left[4y-\frac{y^2}{2}+\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3$$

$$=\frac{22+12\sqrt{3}}{3}\pi$$

19 次の図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$y=-1$，y 軸で囲まれた部分

(2)　2 曲線 $y=4^x$ $(x\geqq 0)$ と $y=8^x$ $(x\geqq 0)$ と直線 $x=1$ に囲まれた部分

解答 (1) $V=\pi^3-4\pi$　　(2) $V=\dfrac{24\log 2-1}{18(\log 2)^2}\pi$

解説

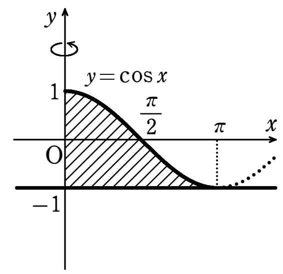
(1)　右の図から，求める体積 V は

$$V=\pi\int_{-1}^{1}x^2dy$$

$y=\cos x$ から　　$dy=-\sin x\,dx$

y と x の対応は次のようになる。

y	$-1\longrightarrow 1$
x	$\pi\longrightarrow 0$



よって　　$V=\pi\displaystyle\int_{\pi}^{0}(-x^2\sin x)dx$

$$=\pi\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx$$

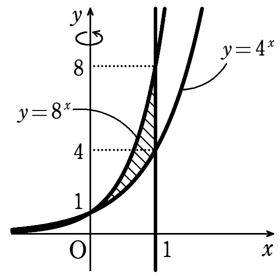
$$=\pi\left\{\Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx\right\}$$

$$=\pi\left(\pi^2+\Big[2x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\sin x\,dx\right)$$

$$=\pi\left(\pi^2+\Big[2\cos x\Big]_0^{\pi}\right)=\pi^3-4\pi$$

(2)　$y=4^x$ から　　$x=\log_4 y=\dfrac{\log y}{\log 4}=\dfrac{\log y}{2\log 2}$

$y=8^x$ から　　$x=\log_8 y=\dfrac{\log y}{\log 8}=\dfrac{\log y}{3\log 2}$



よって　　$V=\pi\displaystyle\int_1^4\left(\frac{\log y}{2\log 2}\right)^2dy+\pi\cdot 1^2\cdot(8-4)$

$$-\pi\int_1^8\left(\frac{\log y}{3\log 2}\right)^2dy$$

$$=\frac{\pi}{4(\log 2)^2}\int_1^4(\log y)^2dy+4\pi$$

$$-\frac{\pi}{9(\log 2)^2}\int_1^8(\log y)^2dy$$

ここで　　$\displaystyle\int_1^4(\log y)^2dy=\Big[y(\log y)^2-2(y\log y-y)\Big]_1^4$

$$=4(\log 4)^2-2\cdot 4\log 4+2(4-1)$$

$$=16(\log 2)^2-16\log 2+6,$$

$$\int_1^8(\log y)^2dy=\Big[y(\log y)^2-2(y\log y-y)\Big]_1^8$$

$$=8(\log 8)^2-2\cdot 8\log 8+2(8-1)$$

$$=72(\log 2)^2-48\log 2+14$$

したがって，求める体積 V は

$$V=\frac{\pi}{4(\log 2)^2}\{16(\log 2)^2-16\log 2+6\}+4\pi$$

$$-\frac{\pi}{9(\log 2)^2}\{72(\log 2)^2-48\log 2+14\}$$

$$=\frac{\pi}{(\log 2)^2}\left(\frac{4}{3}\log 2-\frac{1}{18}\right)$$

$$=\frac{24\log 2-1}{18(\log 2)^2}\pi$$

別解　公式 $V=2\pi\displaystyle\int_a^b xf(x)\,dx$ を利用する。

(1)　$V=2\pi\displaystyle\int_0^\pi x\{\cos x-(-1)\}dx=2\pi\left\{\Big[x(\sin x+x)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi(\sin x+x)dx\right\}$

$$=2\pi\left(\pi^2-\left[-\cos x+\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi\right)=2\pi\left\{\pi^2-\left(\frac{\pi^2}{2}+2\right)\right\}=\pi^3-4\pi$$

(2)　$V=2\pi\displaystyle\int_0^1 x\cdot 8^x dx-2\pi\int_0^1 x\cdot 4^x dx=2\pi\int_0^1 x\left(\frac{8^x}{\log 8}-\frac{4^x}{\log 4}\right)'dx$

$$=2\pi\left\{\left[x\left(\frac{8^x}{\log 8}-\frac{4^x}{\log 4}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{8^x}{\log 8}-\frac{4^x}{\log 4}\right)dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\frac{8}{\log 8}-\frac{4}{\log 4}-\left[\frac{8^x}{(\log 8)^2}-\frac{4^x}{(\log 4)^2}\right]_0^1\right\}$$

$$=2\pi\left\{\frac{8}{3\log 2}-\frac{2}{\log 2}-\frac{7}{(3\log 2)^2}+\frac{3}{(2\log 2)^2}\right\}$$

$$=\frac{24\log 2-1}{18(\log 2)^2}\pi$$

$\boxed{20}$ 放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=x$ との原点 O 以外の交点を A とする。この直線と放物線によって囲まれる部分を，直線 OA を軸として回転させて得られる立体の体積を求めよ。

解答　$\dfrac{8\sqrt{2}}{15}\pi$

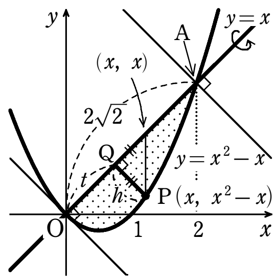
解説

方程式 $x^2-x=x$ を解くと　　$x=0,\ 2$

よって，点 A の x 座標は 2 である。

また，$y=x^2-x$ より　　$y'=2x-1$

ゆえに，点 O，A における放物線の接線は，傾きがそれぞれ -1，3 である。よって，放物線と直線 OA で囲まれる部分は，点 O，A を通り，直線 $y=x$ に垂直な 2 本の直線の間に存在する。



右の図のように，放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^2-x)$ $(0\leqq x\leqq 2)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を引き，$\mathrm{PQ}=h$，$\mathrm{OQ}=t$ $(0\leqq t\leqq 2\sqrt{2})$ とする。

このとき　$h=\dfrac{|x-(x^2-x)|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2x-x^2}{\sqrt{2}}$

$$t=\sqrt{2}\,x-h=\sqrt{2}\,x-\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

よって　　$dt=\sqrt{2}\,x\,dx$

t と x の対応は右のようになる。求める体積を V とすると

t	$0\ \longrightarrow\ 2\sqrt{2}$
x	$0\ \longrightarrow\ 2$

$$V=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}h^2dt=\pi\int_0^2\frac{(2x-x^2)^2}{2}\cdot\sqrt{2}\,x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2(x^5-4x^4+4x^3)dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^6}{6}-\frac{4}{5}x^5+x^4\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

$\boxed{21}$ 曲線 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ の 2 端点を A，B とする。

(1)　C はある直線 ℓ に関して対称である。ℓ の方程式を求めよ。

(2)　C と線分 AB とで囲まれる図形を ℓ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答　(1)　$y=x$　　(2)　$V=\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}$

解説

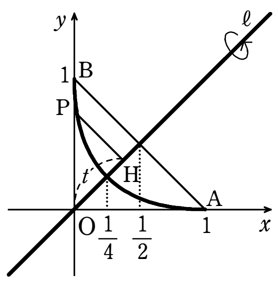
(1)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$　……①

① において，x と y を入れ替えても方程式は変わらないから，C は直線 $y=x$ に関して対称である。

よって，ℓ の方程式は　　$y=x$

(2)　① を y について解くと　　$y=1-2\sqrt{x}+x$

ℓ より上側の C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から ℓ に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{PH}=h$，$\mathrm{OH}=t$ とすると，ℓ の方程式は $x-y=0$ であるから



$$h=\frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x-(1-2\sqrt{x}+x)|}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{|2\sqrt{x}-1|}{\sqrt{2}}$$

C と ℓ の交点の x 座標は，$\sqrt{x}+\sqrt{x}=1$ から

$$x=\frac{1}{4}$$

線分 AB と ℓ の交点は線分 AB の中点であるから，その x 座標は $\dfrac{1}{2}$

また，$t^2+h^2=\mathrm{OP}^2$ であるから　　$t^2=(x^2+y^2)-\dfrac{(x-y)^2}{2}=\dfrac{(x+y)^2}{2}$

$t>0$ であるから　　$t=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}=\dfrac{2x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$

ゆえに　　$dt=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}dx$

t と x の対応は右のようになる。

求める体積 V は

t	$\frac{\sqrt{2}}{4}\ \longrightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{2}$
x	$\frac{1}{4}\ \longrightarrow\ 0$

$$V=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}h^2dt=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{2}dt$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{4}}^{0}\frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{2}\cdot\frac{(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{2}\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-6+12\sqrt{x}-8x\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\Big[2\sqrt{x}-6x+8x\sqrt{x}-4x^2\Big]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

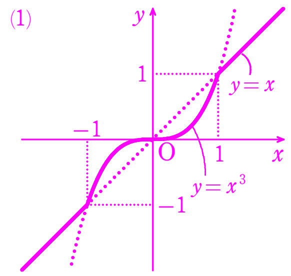
$\boxed{22}$ 関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+x^5+x^3}{x^{2n}+x^2+1}$ について

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　点 $(-1,\ -1)$ と点 $(1,\ 1)$ を結ぶ線分と $y=f(x)$ のグラフで囲まれる部分を，直線 $y=x$ の周りに回転させてできる回転体の体積を求めよ。

解答　(1)　[図]　　(2)　$\dfrac{8\sqrt{2}}{105}\pi$

(1)



解説

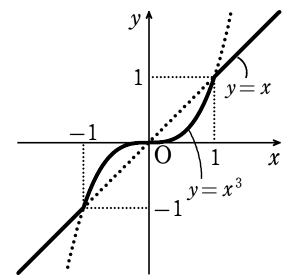
(1)　$|x|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x^n=0$ であるから　　$f(x)=\dfrac{x^5+x^3}{x^2+1}=\dfrac{x^3(x^2+1)}{x^2+1}=x^3$

$x=1$ のとき　　$f(x)=\dfrac{1+1+1}{1+1+1}=1$

$x=-1$ のとき　$f(x)=\dfrac{-1-1-1}{1+1+1}=-1$

$|x|>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ であるから

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{1}{x^{2n-5}}+\dfrac{1}{x^{2n-3}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n-2}}+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x$$



以上から，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

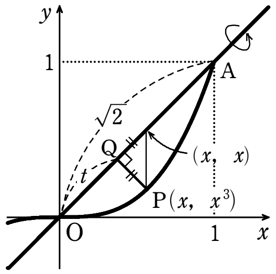
(2)　2点を結ぶ線分の方程式は $y=x\ (-1\leqq x\leqq 1)$ である。グラフは原点に関して対称であるから，求める体積は $0\leqq x\leqq 1$ の部分の体積の2倍である。

$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1)$ とすると　$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$

$y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^3)\ (0\leqq x\leqq 1)$ から線分 OA に垂線 PQ を引き，

$\mathrm{PQ}=h,\quad \mathrm{OQ}=t\ (0\leqq t\leqq \sqrt{2})$

とする。このとき



$$h=\frac{|x-x^3|}{\sqrt{2}}=\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}$$

$$t=\sqrt{2}x-\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^3}{\sqrt{2}}$$

よって　$dt=\dfrac{1+3x^2}{\sqrt{2}}dx$

t	$0\longrightarrow\sqrt{2}$
x	$0\longrightarrow 1$

t と x の対応は右のようになる。

求める体積を V とすると

$$V=2\times\pi\int_0^{\sqrt{2}}h^2dt=2\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1+3x^2}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1(x^6-2x^4+x^2)(3x^2+1)dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1(3x^8-5x^6+x^4+x^2)dx$$

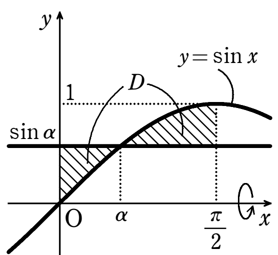
$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^9}{3}-\frac{5}{7}x^7+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{16}{105}=\frac{8\sqrt{2}}{105}\pi$$

23　$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。連立不等式 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$(y-\sin\alpha)(y-\sin x)\leqq 0$ の表す領域 D を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積を V とする。V の最大値と最小値を求めよ。

解答　$\alpha=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi^2}{4}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{\pi}{2}$

解説

領域 D は，右の図の斜線部分のようになるから



$$V=\pi\sin^2\alpha\cdot\alpha-\pi\int_0^\alpha\sin^2x\,dx+\pi\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx$$

$$-\pi\sin^2\alpha\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=2\pi\alpha\sin^2\alpha-\frac{\pi^2}{2}\sin^2\alpha-\pi\int_0^\alpha\frac{1-\cos2x}{2}dx$$

$$+\pi\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2x}{2}dx$$

$$=2\pi\alpha\sin^2\alpha-\frac{\pi^2}{2}\sin^2\alpha-\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_0^\alpha+\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\left\{\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha-\alpha+\frac{\pi}{4}\right\}$$

これを，$f(\alpha)$ とすると

$$f'(\alpha)=\pi\left\{2\sin^2\alpha+\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cdot2\sin\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha-1\right\}$$

$$=\pi\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin2\alpha$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(\alpha)=0$ とすると　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(\alpha)$ の増減表は右のようになる。

α	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$	$\frac{\pi^2}{4}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{4}$

したがって，V は

$\alpha=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi^2}{4}$，

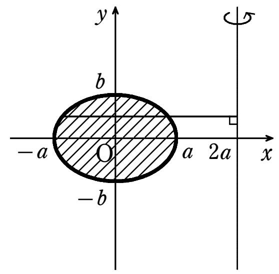
$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{\pi}{2}$ をとる。

24　a，b を正の数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれた図形を直線 $x=2a$ の周りに1回転させてできる立体の体積を V とおく。a，b が $a^2+b^2=1$ という関係を満たしながら動くとき，V の最大値を求めよ。

解答　$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$

解説

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x について解くと



$$x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

ここで，$x_1=-a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}$，$x_2=a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}$

とする。

囲まれた図形は，x 軸に関して対称であるから，

体積 V は

$$V=2\pi\int_0^b\{(2a-x_1)^2-(2a-x_2)^2\}dy$$

$$=8a\pi\int_0^b(x_2-x_1)dy=16a^2\pi\int_0^b\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

ここで，$y=b\sin\theta$ とおくと　$dy=b\cos\theta\,d\theta$

y と θ の対応は右のようになる。

y	$0\longrightarrow b$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

よって

$$V=16a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot b\cos\theta\,d\theta=16a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=8a^2b\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta=8a^2b\pi\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^2b\pi^2$$

また，$a^2+b^2=1$ から　$a^2=1-b^2$　……①

$a>0$ であるから　$1-b^2>0$　　これと $b>0$ であるから　$0<b<1$

V の式に①を代入すると　$V=4(1-b^2)b\pi^2=4\pi^2(-b^3+b)$

ゆえに　$\dfrac{dV}{db}=4\pi^2(-3b^2+1)$

$\dfrac{dV}{db}=0$ とすると　$-3b^2+1=0$

$0<b<1$ であるから　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0<b<1$ における V の増減表は右のようになり，

$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，V は極大かつ最大となる。

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dV}{db}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，①と $a>0$ から　$a=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

したがって V の最大値は　$4\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\pi^2=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$

25　xyz 空間において，連立不等式

$$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq z\leqq 1,\ x^2+y^2+z^2-2xy-1\geqq 0$$

の表す立体を考える。

(1)　この立体を平面 $z=t$ で切ったときの断面を xy 平面に図示し，この断面の面積 $S(t)$ を求めよ。

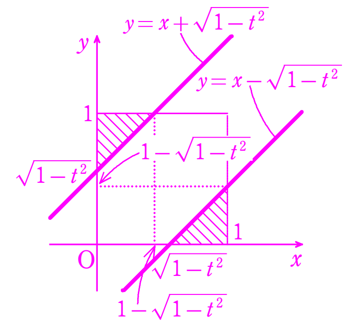
(2)　この立体の体積を求めよ。

解答　(1)　[図] 境界線を含む，

$S(t)=(1-\sqrt{1-t^2})^2$

(2)　$\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

(1)



解説

(1)　$0\leqq z\leqq 1$ であるから　　$0\leqq t\leqq 1$

$x^2+y^2+z^2-2xy-1\geqq 0$ において，$z=t$ とすると

$$x^2+y^2+t^2-2xy-1\geqq 0$$

よって　$(y-x)^2\geqq 1-t^2$

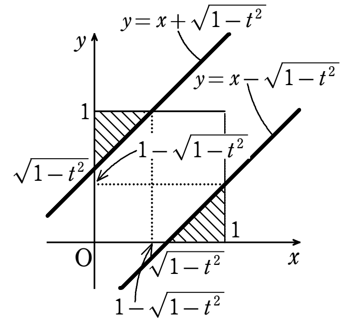
すなわち

$y-x\leqq-\sqrt{1-t^2}$　または　$\sqrt{1-t^2}\leqq y-x$

ゆえに

$y\leqq x-\sqrt{1-t^2}$　または　$y\geqq x+\sqrt{1-t^2}$

よって，平面 $z=t$ で切ったときの断面は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



また　$S(t)=2\cdot\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-t^2})^2$

$$=(1-\sqrt{1-t^2})^2$$

(2)　求める体積を V とすると

$$V=\int_0^1S(t)dt=\int_0^1(1-\sqrt{1-t^2})^2dt=\int_0^1(2-t^2-2\sqrt{1-t^2})dt$$

$$=\left[2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1-2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ は半径が1の四分円の面積を表すから

$$V=2-\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

26　座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の4つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

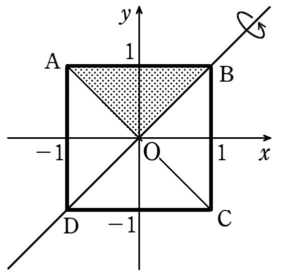
(1)　$0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

解答 (1) $\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)}$ (2) $\frac{32\sqrt{2}}{9}$

解説

(1) 直角二等辺三角形 ABO を直線 BO を軸として回転させてできる円錐 E の側面上(ただし，点 B は除く)の点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると



$$\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y-1,\ z),\ \overrightarrow{BO}=(-1,\ -1,\ 0)$$

また，点 P は $\overrightarrow{BP}$ と $\overrightarrow{BO}$ のなす角が 45° の点である。

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BO}=|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{BO}|\cos 45°$ から

$$1-x+1-y=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって

$$1-x+1-y=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\quad\cdots\cdots ①$$

$-1\leqq x<1$，$-1\leqq y\leqq 1$ であるから $(1-x)+(1-y)>0$

① の両辺を 2 乗すると $\{(1-x)+(1-y)\}^2=(x-1)^2+(y-1)^2+z^2$

ゆえに $2(1-x)(1-y)=z^2$

$1-x>0$ であるから $1-y=\frac{z^2}{2(1-x)}$

よって，円錐 E の側面上の点が満たす方程式は $y=1-\frac{z^2}{2(1-x)}$

これの平面 $x=t$ による切り口は $y=1-\frac{z^2}{2(1-t)}\ (-t\leqq y\leqq 1)$

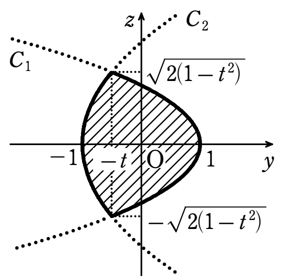
直角二等辺三角形 ADO を直線 DO を軸として回転させてできる円錐 F の側面上(ただし，点 D は除く)の点を Q$(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\overrightarrow{DQ}=(x+1,\ y+1,\ z),\ \overrightarrow{DO}=(1,\ 1,\ 0)$$

$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DO}=|\overrightarrow{DQ}||\overrightarrow{DO}|\cos 45°$ から，上と同様にして，円錐 F の側面上の点が満たす方程式は $y=-1+\frac{z^2}{2(1+x)}$

これの平面 $x=t$ による切り口は

$$y=-1+\frac{z^2}{2(1+t)}\ (-1\leqq y\leqq -t)$$



以上から，平面 $x=t$ による V_1 の切り口は，曲線

$$C_1:y=1-\frac{z^2}{2(1-t)},\ C_2:y=-1+\frac{z^2}{2(1+t)}$$

で囲まれた図形となる。

この図形は y 軸に関して対称であるから，求める面積は

$$2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left[1-\frac{z^2}{2(1-t)}-\left\{-1+\frac{z^2}{2(1+t)}\right\}\right]dz$$

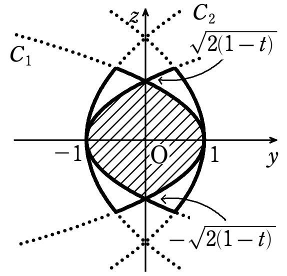
$$=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left(2-\frac{z^2}{1-t^2}\right)dz=2\left[2z-\frac{z^3}{3(1-t^2)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$=2\left\{2\sqrt{2(1-t^2)}-\frac{2(1-t^2)\sqrt{2(1-t^2)}}{3(1-t^2)}\right\}=\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t^2)}$$

(2) V_1 と V_2 の共通部分の図形は，yz 平面に関して対称であるから，求める体積は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲の体積を 2 倍したものとなる。

更に，V_1 と V_2 の共通部分の図形は，zx 平面に関しても対称である。

よって，V_1 と V_2 の共通部分の平面 $x=t$ による切り口は，右の図のようになる。



ゆえに，この切り口の面積は

$$4\int_0^{\sqrt{2(1-t)}}\left\{1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right\}dz=4\left[z-\frac{z^3}{6(1-t)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t)}}$$

$$=4\left\{\sqrt{2(1-t)}-\frac{2(1-t)\sqrt{2(1-t)}}{6(1-t)}\right\}$$

$$=\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t)}$$

したがって，求める体積は

$$2\int_0^1\frac{8}{3}\sqrt{2(1-t)}\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{32\sqrt{2}}{9}$$

27 xyz 空間において，2 点 P(1, 0, 1)，Q(−1, 1, 0) を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体を S とする。立体 S と，2 つの平面 $x=1$ および $x=-1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{4}{3}\pi$

解説

線分 PQ 上の点 A は，O を原点，s を実数として $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{PQ}$ $(0\leqq s\leqq 1)$ と表され

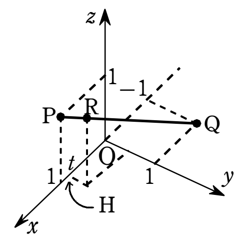
$$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 1)+s(-2,\ 1,\ -1)=(1-2s,\ s,\ 1-s)$$

$1-2s=t$ とすると $s=\frac{1-t}{2}$

よって，線分 PQ 上の点で x 座標が $t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ である点 R の座標は

$$\mathrm{R}\left(t,\ \frac{1-t}{2},\ \frac{1+t}{2}\right)$$

H$(t,\ 0,\ 0)$ とすると，立体 S を平面 $x=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面は，中心が H，半径が RH の円である。



その断面積は

$$\pi\mathrm{RH}^2=\pi\left\{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(\frac{1+t}{2}\right)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(t^2+1)$$

よって，求める体積は

$$\int_{-1}^1\frac{\pi}{2}(t^2+1)dt=\pi\int_0^1(t^2+1)dt=\pi\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1=\frac{4}{3}\pi$$

28 xyz 空間に 3 点 P(1, 1, 0)，Q(−1, 1, 0)，R(−1, 1, 2) をとる。

(1) t を $0\leqq t<2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と △PQR の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

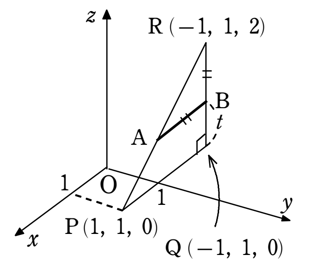
(2) △PQR を z 軸の周りに回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

解答 (1) $(1-t,\ 1,\ t)$，$(-1,\ 1,\ t)$ (2) $\frac{5}{3}\pi$

解説

(1) 平面 $z=t$ と辺 PR，QR との交点をそれぞれ A，B とすると，辺 QR は z 軸と平行であるから

B$(-1,\ 1,\ t)$



また，PQ＝QR＝2，∠PQR＝90° であるから

AB＝RB＝$2-t$

ゆえに，点 A の x 座標は $-1+(2-t)=1-t$

よって A$(1-t,\ 1,\ t)$

(2) 線分 AB を，平面 $z=t$ 上で z 軸の周りに 1 回転した図形の面積を $S(t)$ とする。

C$(0,\ 0,\ t)$ とすると AC$=\sqrt{(1-t)^2+1}$，BC$=\sqrt{2}$

$0\leqq t<2$ において $1\leqq \mathrm{AC}\leqq\sqrt{2}=\mathrm{BC}$

また，点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと CH＝1

点 H が線分 AB 上にあるのは，$0\leqq 1-t\leqq 1$ すなわち $0\leqq t\leqq 1$ のときである。

[1] $0\leqq t\leqq 1$ のとき

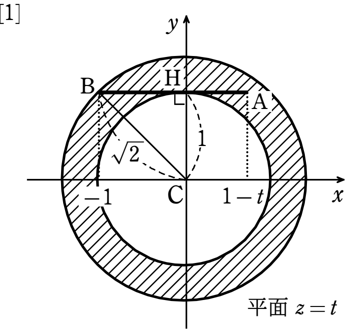
$$S(t)=\pi\cdot\mathrm{BC}^2-\pi\cdot\mathrm{CH}^2=\pi\cdot 2-\pi\cdot 1=\pi$$

[2] $1\leqq t<2$ のとき

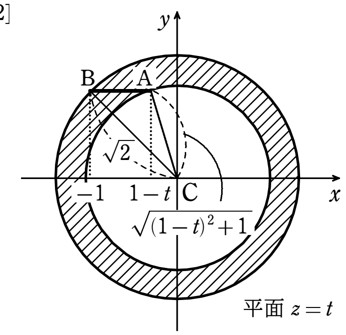
$$S(t)=\pi\cdot\mathrm{BC}^2-\pi\cdot\mathrm{AC}^2=\pi\cdot 2-\pi\{(1-t)^2+1\}$$

$$=(-t^2+2t)\pi$$

[1]



[2]



$t=2$ のとき $S(2)=0$ これは [2] に含めてよい。

ゆえに，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^1dt+\pi\int_1^2(-t^2+2t)dt=\pi+\pi\left[-\frac{t^3}{3}+t^2\right]_1^2=\frac{5}{3}\pi$$

29 xyz 空間において，点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする。

(1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2) 円板 D が平面 $z=t$ と共有点をもつ t の値の範囲を求めよ。

(3) 円板 D と平面 $z=t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ。

(4) 円板 D を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 (1) P$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$，Q$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ (2) $0\leqq t\leqq\frac{2}{3}$ (3) $2\sqrt{t-\frac{3}{2}t^2}$

(4) $\frac{2}{27}\pi$

解説

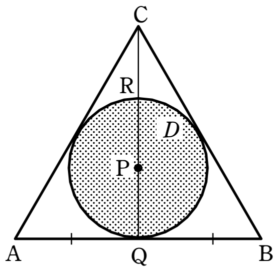
(1)　点 P は正三角形 ABC の内心である。

正三角形の内心は重心と一致するから，点 P は

$$P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$$

点 Q は線分 AB の中点であるから

$$Q\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$



(2)　(1) の図のように点 R をとると

$\overrightarrow{QR}=2\overrightarrow{QP}$ ……①

点 R の z 座標を r とすると，① の z 成分のみを考えて

$$r=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

よって，t の値の範囲は　　$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}$

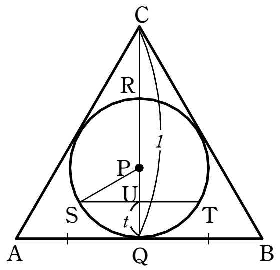
(3)　右の図のように，平面 $z=t\left(0<t<\dfrac{2}{3}\right)$ と円板 D の周，線分 CQ との交点をそれぞれ S，T，U とする。

円板 D の半径は

$$QP=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

CQ：QU$=1：t$ であるから

$$QU=t\cdot CQ=t\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}t$$



$0<t\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　　PU$=$PQ$-$QU

$\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{2}{3}$ のとき　　PU$=$QU$-$PQ

よって　　$PU=|PQ-QU|=\left|\dfrac{1}{\sqrt{6}}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}t\right|$

ゆえに　　$ST=2SU=2\sqrt{PS^2-PU^2}$

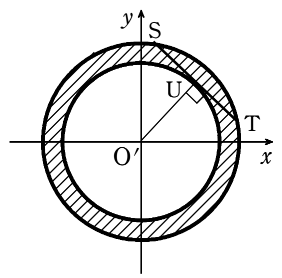
$$=2\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{6}}{2}t\right)^2}=2\sqrt{t-\frac{3}{2}t^2}$$

(4)　z 軸上の点 $(0,\ 0,\ t)\left(0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\right)$ を O′ とする。

D を z 軸の周りに 1 回転させてできる立体を，平面 $z=t$ で切った切り口の図形は，線分 ST を z 軸の周りに 1 回転させてできる図形であり，右の図の斜線部分である。

斜線部分の面積は

$$\pi(O'S^2-O'U^2)=\pi\cdot SU^2=\pi\left(\frac{1}{2}ST\right)^2=\pi\left(t-\frac{3}{2}t^2\right)$$



ゆえに，求める体積は　　$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}}\pi\left(t-\frac{3}{2}t^2\right)dt=\pi\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{27}\pi$

30　(1)　平面で，半径 r $(r\leqq1)$ の円の中心が，辺の長さが 4 の正方形の辺上を 1 周するとき，この円が通過する部分の面積 $S(r)$ を求めよ。

(2)　空間で，半径 1 の球の中心が，辺の長さが 4 の正方形の辺上を 1 周するとき，この球が通過する部分の体積 V を求めよ。

解答　(1)　$S(r)=32r+(\pi-4)r^2$　　(2)　$V=\dfrac{52\pi-16}{3}$

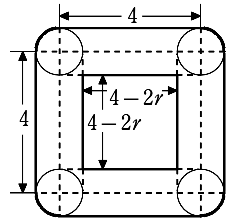
解説

(1)　円が通過する部分は右の図のようになる。

4 つの角の四分円は合わせて 1 つの円になる。

よって　　$S(r)=4^2-(4-2r)^2+4\cdot4r+\pi r^2$

$\qquad=32r+(\pi-4)r^2$

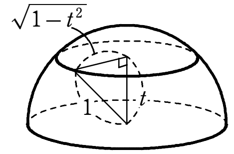


(2)　正方形を xy 平面上に置いて，球が通過する部分を平面 $z=t$ $(-1\leqq t\leqq1)$ で切ったときの断面積を $f(t)$ とする。

角の球の切断面の半径を r とすると，$t^2+r^2=1$ であるから，$f(t)$ は (1) の結果の式において

$$r=\sqrt{1-t^2}\quad(-1\leqq t\leqq1)$$

としたものである。



$f(-t)=f(t)$ であるから，求める体積 V は

$$V=\int_{-1}^{1}f(t)\,dt=2\int_0^1f(t)\,dt=2\int_0^1\{32\sqrt{1-t^2}+(\pi-4)(1-t^2)\}dt$$

$$=64\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt+2(\pi-4)\int_0^1(1-t^2)dt=64\cdot\frac{\pi}{4}+2(\pi-4)\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{52\pi-16}{3}$$

31　半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件 (A)，(B) を同時に満たしながら動く。

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。

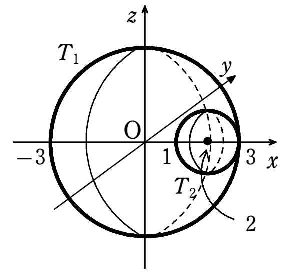
解答　$\dfrac{22}{3}\pi$

解説

xyz 空間で考える。

球 T_1 と球 T_2 について，与えられた条件から，それぞれの中心を $(0,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 0,\ 0)$ とおくことができる。

球 S の中心の座標を $(X,\ Y,\ Z)$ とする。



条件 (A) から

　(S と T_1 の中心間の距離) $\leqq$ (S と T_1 の半径の差)

すなわち　　$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\leqq3-1$

よって　　$X^2+Y^2+Z^2\leqq4$

また，条件 (B) から

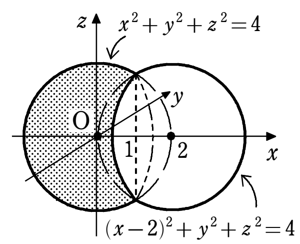
　(S と T_2 の中心間の距離) $\geqq$ (S と T_2 の半径の和)

すなわち　　$\sqrt{(X-2)^2+Y^2+Z^2}\geqq1+1$

よって　　$(X-2)^2+Y^2+Z^2\geqq4$

ゆえに，S の中心が存在しうる範囲は，xyz 空間内の球 $x^2+y^2+z^2=4$ の表面または内部から，球 $(x-2)^2+y^2+z^2=4$ の内部を除いた部分である。

これは，立体を平面 $z=0$ で切ったときの断面を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積と等しい。



平面 $z=0$ で切ったときの断面は，右の図の斜線部分のようになる。

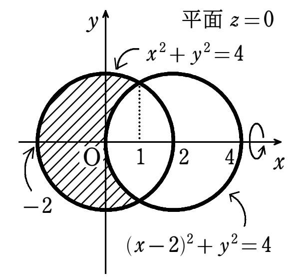
ゆえに，求める体積は

$$\pi\int_{-2}^{1}(4-x^2)dx-\pi\int_0^1\{4-(x-2)^2\}dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{1}(4-x^2)dx-\pi\int_0^1(4x-x^2)dx$$

$$=\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}-\pi\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{22}{3}\pi$$



別解　取り除く部分の立体を D_0 とする。

D_0 は平面 $x=1$ に関して対称であり，D_0 を平面 $x=t$ $(0\leqq t\leqq1)$ で切ったときの断面積は　　$\pi(y^2+z^2)=\pi\{4-(t-2)^2\}$

よって，D_0 の体積は

$$2\int_0^1\pi\{4-(t-2)^2\}dt=2\pi\left[4t-\frac{(t-2)^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{10}{3}\pi$$

ゆえに，立体 D の体積は　　$\dfrac{4}{3}\pi\cdot2^3-\dfrac{10}{3}\pi=\dfrac{22}{3}\pi$

32　2 曲線 C_1：$y=\cos x$，C_2：$y=\cos2x+a$ $(a>0)$ が互いに接している。すなわち，C_1，C_2 には共有点があり，その点において共通の接線をもっている。

(1)　正の数 a の値を求めよ。

(2)　$0<x<3\pi$ の範囲で 2 曲線 C_1，C_2 のみで囲まれる図形の全面積を求めよ。

(3)　(2) の図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

解答　(1)　$a=\dfrac{9}{8}$　　(2)　$\dfrac{9}{4}\pi$　　(3)　$\dfrac{97}{32}\pi^2$

解説

(1)　$f(x)=\cos x$，$g(x)=\cos2x+a$ $(a>0)$ とすると

$$f'(x)=-\sin x,\quad g'(x)=-2\sin2x$$

2 曲線の接点の x 座標を t とすると，接点の y 座標，およびその点における微分係数が等しいから　　$f(t)=g(t)$　かつ　$f'(t)=g'(t)$

よって　　$\begin{cases}\cos t=\cos2t+a & \cdots\cdots① \\ \sin t=2\sin2t & \cdots\cdots②\end{cases}$

② から　　$\sin t=4\sin t\cos t$　　ゆえに　$\sin t(4\cos t-1)=0$

よって　　$\sin t=0$　または　$\cos t=\dfrac{1}{4}$

[1]　$\sin t=0$ のとき　　$t=m\pi$ (m は整数)

$t=2n\pi$ のとき，① から　　$a=0$

$t=(2n-1)\pi$ のとき，① から　　$a=-2$

これらは $a>0$ に反するから不適。

[2]　$\cos t=\dfrac{1}{4}$ のとき　　① から　$\cos t=2\cos^2t-1+a$

よって　$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}-1+a$　　ゆえに　$a=\dfrac{9}{8}$

(2)　$\cos2x+\dfrac{9}{8}-\cos x=2\cos^2x-\cos x+\dfrac{1}{8}=2\left(\cos x-\dfrac{1}{4}\right)^2$　……③

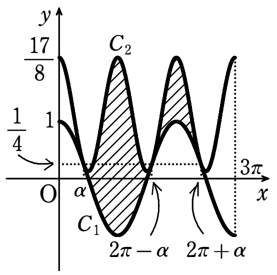
$\cos x=\frac{1}{4}$ …… ④ の 1 つの解を $x=\alpha\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

とすると，$0<x<3\pi$ において，④ の解は

$x=\alpha,\ 2\pi-\alpha,\ 2\pi+\alpha$

よって，2 曲線 C_1，C_2 は $x=\alpha,\ 2\pi-\alpha,\ 2\pi+\alpha$ の 3 点で接している。また，③ から，C_2 が常に C_1 の上側にある。

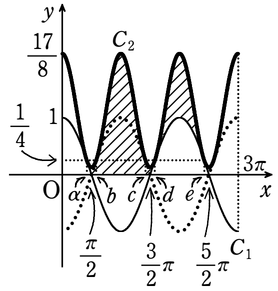
よって，右の図の斜線部分の面積を求める。



求める面積を S とすると

$$S=\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left(\cos 2x+\frac{9}{8}-\cos x\right)dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{9}{8}x-\sin x\right]_{\alpha}^{2\pi+\alpha}=\frac{9}{8}\cdot 2\pi=\frac{9}{4}\pi$$

(3) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ において $y=-\cos x$ と $y=\cos 2x+\frac{9}{8}$ とは $x=\pi\pm\alpha$ で接するから，右の図の斜線部分を回転させると考えてよい。求める体積を V とすると



$\left[\begin{array}{l} b=\pi-\alpha,\ \ c=\pi+\alpha \\ d=2\pi-\alpha,\ \ e=2\pi+\alpha \end{array}\right]$

$$V=\pi\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left(\cos 2x+\frac{9}{8}\right)^2dx-\pi\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$-\pi\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi+\alpha}\cos^2 x\,dx$$

$$=\pi\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left(\cos^2 2x+\frac{9}{4}\cos 2x+\frac{81}{64}\right)dx$$

$$-\pi\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\cos^2 x\,dx$$

$$=\pi\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left(\frac{1}{2}+\frac{81}{64}+\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{9}{4}\cos 2x\right)dx-\pi\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\pi\left[\frac{113}{64}x+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{9}{8}\sin 2x\right]_{\alpha}^{2\pi+\alpha}-\pi\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}$$

$$=\frac{113}{32}\pi^2-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)\pi^2=\frac{97}{32}\pi^2$$

33 実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 P$(0,\ \sin\theta)$ および Q$(8\cos\theta,\ 0)$ を考える。θ が $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

解答　$V=\frac{128}{105}\pi$

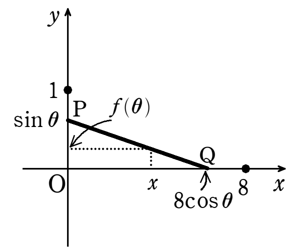
解説

線分 PQ の方程式は

$\theta=0$ のとき　　$y=0\ (0\leqq x\leqq 8)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき　　$\frac{x}{8\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=1$

$(0\leqq x\leqq 8\cos\theta)$ …… ①



$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき　　$x=0\ (0\leqq y\leqq 1)$

① から　　$y=\sin\theta\left(1-\frac{x}{8\cos\theta}\right)$

$0<x<8$ である x を固定し，$x=8\cos\theta$ となるときの $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ を $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とする。

$0\leqq\theta\leqq\alpha$ であるとき，$f(\theta)=\sin\theta\left(1-\frac{x}{8\cos\theta}\right)$ とすると

$$f'(\theta)=\cos\theta\left(1-\frac{x}{8\cos\theta}\right)-\frac{x}{8}\sin\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{8\cos^3\theta-x}{8\cos^2\theta}$$

$f'(\theta)=0$ とすると　　$\cos\theta=\sqrt[3]{\frac{x}{8}}$ …… ②

$0<x\leqq 8\cos\theta$ であるから　　$0<\sqrt[3]{\frac{x}{8}}<1$

よって，② を満たす $\theta\ (0<\theta<\alpha)$ がただ 1 つ存在する。

その θ を $\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とすると，$0\leqq\theta\leqq\alpha$ における $f(\theta)$ の増減表は右のようになる。

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	α
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	↗	極大	↘	0

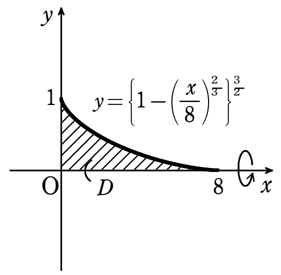
したがって　　$0\leqq f(\theta)\leqq f(\beta)$

ここで　　$\sin\beta=(1-\cos^2\beta)^{\frac{1}{2}}=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

ゆえに　　$f(\beta)=\sin\beta\left(1-\frac{x}{8\cos\beta}\right)=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}=\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$

$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ の場合も考えると，線分 PQ が通過する領域 D は，

$$0\leqq y\leqq\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}},\quad 0\leqq x\leqq 8$$



すなわち　　$\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$

したがって　　$V=\pi\int_0^8\left\{1-\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^3dx$

$\frac{x}{8}=t$ とおくと　　$dx=8dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 8$
t	$0\longrightarrow 1$

$$V=\pi\int_0^1\left(1-t^{\frac{2}{3}}\right)^3\cdot 8dt=8\pi\int_0^1\left(1-3t^{\frac{2}{3}}+3t^{\frac{4}{3}}-t^2\right)dt$$

$$=8\pi\left[t-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{128}{105}\pi$$

34 点 P$(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}\,t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。更に，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) 点 Q$(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ。

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点をもつような定数 a の値を求めよ。

(3) 図形 D を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

解答　(1) $\left(-t^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}t,\ t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$　　(2) $a=-\frac{1}{8}$　　(3) $V=\frac{11}{120}\pi$

解説

(1) 点 P$(t,\ \sqrt{2}\,t^2-2t)$ を複素数平面上の点 $t+(\sqrt{2}\,t^2-2t)i$ とみなす。この点を，原点を中心として 45° 回転した点は

$$(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\{t+(\sqrt{2}\,t^2-2t)i\}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\{t+(\sqrt{2}\,t^2-2t)i\}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}\,t^2-2t)+\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}\,t^2-2t)+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right\}i$$

$$=-t^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}t+\left(t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)i$$

よって，点 Q の座標は　　$\left(-t^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}t,\ t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

(2) まず，曲線 C の方程式を求める。

曲線 C 上の任意の点 $(x,\ y)$ は (1) から，$x=-t^2+\frac{3\sqrt{2}}{2}t$，$y=t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t$ と表される。

このとき　　$x+y=\sqrt{2}\,t$，$x+3y=2t^2$

これらから t を消去すると　　$x+3y=2\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2$

整理すると　　$x^2+(2y-1)x+(y^2-3y)=0$ …… ①

$y=a$ を代入すると　　$x^2+(2a-1)x+(a^2-3a)=0$ …… ②

② の判別式を D とすると，直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点をもつための条件は　　$D=0$

ここで　　$D=(2a-1)^2-4(a^2-3a)=8a+1$

$D=0$ から　　$8a+1=0$　　　よって　　$a=-\frac{1}{8}$

別解　実数 t と曲線 C 上の点は 1 対 1 に対応する。

$y=t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t$ であるから，t の 2 次方程式 $t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}t=a$ が重解をもつ条件を求める。

両辺に 2 を掛けて整理すると　　$2t^2-\sqrt{2}\,t-2a=0$

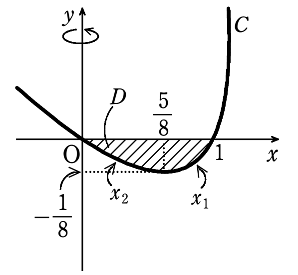
この判別式を D' とすると　　$D'=2+16a$

$D'=0$ から　　$a=-\frac{1}{8}$

(3) ① を x について解くと

$$x=\frac{1-2y\pm\sqrt{8y+1}}{2}$$

$x_1=\frac{1-2y+\sqrt{8y+1}}{2}$，$x_2=\frac{1-2y-\sqrt{8y+1}}{2}$ とすると



$$V=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}x_1^2dy-\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}x_2^2dy$$

$$=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}(x_1^2-x_2^2)dy$$

ここで　　$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)=(1-2y)\sqrt{8y+1}$

$8y+1=u$ とおくと　　$8dy=du$

y と u の対応は右のようになる。

y	$-\frac{1}{8}\longrightarrow 0$
u	$0\longrightarrow 1$

$$V=\pi\int_0^1\frac{5-u}{4}\sqrt{u}\cdot\frac{1}{8}du=\frac{\pi}{32}\int_0^1\left(5u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}}\right)du$$

$$=\frac{\pi}{32}\left[\frac{10}{3}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\frac{11}{120}\pi$$

35 座標平面上の曲線 C は媒介変数 $t\ (t\geqq 0)$ を用いて $x=t^2+2t+\log(t+1)$，$y=t^2+2t-\log(t+1)$ と表される。C 上の点 P$(a,\ b)$ における C の接線の傾きが $\frac{2e-1}{2e+1}$ であるとする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) a と b の値を求めよ。

(2) Q を座標 $(b,\ a)$ の点とする。直線 PQ，直線 $y=x$ と曲線 C で囲まれた図形を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　(1) $a=e-\frac{1}{2}$，$b=e-\frac{3}{2}$　　(2) $\frac{\sqrt{2}\,\pi(e-2)}{2}$

解説

(1) $\frac{dx}{dt}=2t+2+\frac{1}{t+1}$，$\frac{dy}{dt}=2t+2-\frac{1}{t+1}$

よって $\frac{dy}{dx}=\frac{2t+2-\frac{1}{t+1}}{2t+2+\frac{1}{t+1}}=\frac{2(t+1)^2-1}{2(t+1)^2+1}$

ゆえに，曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは $\frac{2(t+1)^2-1}{2(t+1)^2+1}$ で与えられる。

$\frac{2(t+1)^2-1}{2(t+1)^2+1}=\frac{2e-1}{2e+1}$ の分母を払って整理すると $(t+1)^2=e$

すなわち $t+1=\pm\sqrt{e}$ $t\geqq 0$ であるから $t=\sqrt{e}-1$

したがって $a=(\sqrt{e}-1)^2+2(\sqrt{e}-1)+\log\sqrt{e}=e-\frac{1}{2}$

$b=(\sqrt{e}-1)^2+2(\sqrt{e}-1)-\log\sqrt{e}=e-\frac{3}{2}$

(2) $t^2+2t+\log(t+1)=t^2+2t-\log(t+1)$ のとき $2\log(t+1)=0$

すなわち $t=0$

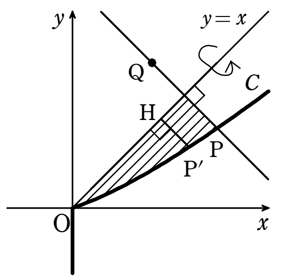
このとき $x=y=0$ であるから，曲線 C と直線 $y=x$ の交点は原点のみである。

$0\leqq t\leqq\sqrt{e}-1$ とする。

曲線 C 上の点 $P'(x,\ y)$ から直線 $y=x$ に垂線 $P'H$ を引くと，点 H の座標は

$\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2}\right)$

すなわち $(t^2+2t,\ t^2+2t)$



また $P'H=\frac{|1\cdot x+(-1)\cdot y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$

$=\frac{|2\log(t+1)|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\log(t+1)$

$OH=s$ とおくと $s=\sqrt{2}(t^2+2t)$

よって $ds=2\sqrt{2}(t+1)dt$

s と t の対応は右のようになる。

s	$0\longrightarrow\sqrt{2}(e-1)$
t	$0\longrightarrow\sqrt{e}-1$

したがって $V=\pi\int_0^{\sqrt{2}(e-1)}P'H^2ds$

$=4\sqrt{2}\pi\int_0^{\sqrt{e}-1}(t+1)\{\log(t+1)\}^2dt$

ここで $\int_0^{\sqrt{e}-1}(t+1)\{\log(t+1)\}^2dt$

$=\left[\frac{(t+1)^2}{2}\{\log(t+1)\}^2\right]_0^{\sqrt{e}-1}-\int_0^{\sqrt{e}-1}\frac{(t+1)^2}{2}\cdot2\log(t+1)\cdot\frac{1}{t+1}dt$

$=\frac{e}{8}-\int_0^{\sqrt{e}-1}(t+1)\log(t+1)dt$

$=\frac{e}{8}-\left[\frac{(t+1)^2}{2}\log(t+1)\right]_0^{\sqrt{e}-1}+\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{e}-1}(t+1)dt$

$=\frac{e}{8}-\frac{e}{4}+\frac{1}{4}\left[(t+1)^2\right]_0^{\sqrt{e}-1}=\frac{e}{8}-\frac{1}{4}$

ゆえに $V=4\sqrt{2}\pi\left(\frac{e}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi(e-2)}{2}$

36 xyz 空間内の3点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸の周りに1回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{8}{3}\pi$

解説

円錐 V の側面上の点を P$(x,\ y,\ z)$ $(0\leqq x\leqq 1,\ |y|\leqq 1)$ とする。

点 P と点 $(x,\ 0,\ 0)$ の距離は x であるから

$(x-x)^2+y^2+z^2=x^2$

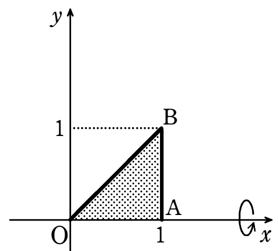
よって $z^2=x^2-y^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$

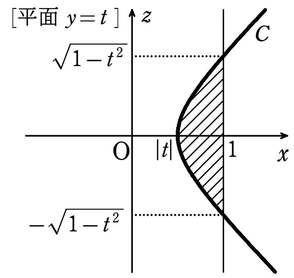
円錐 V の平面 $y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ による切り口の図形は，曲線 $C: z^2=x^2-t^2$ と直線 $x=1$ で囲まれた図形となる。

点 $(0,\ t,\ 0)$ と，この図形内の点との距離の

最大値は $\sqrt{1^2+(\sqrt{1-t^2})^2}=\sqrt{2-t^2}$

最小値は $|t|$





したがって，円錐 V を y 軸の周りに1回転させてできた立体の，平面 $y=t$ による切り口の図形は右の図のようになる。

この図形の面積は

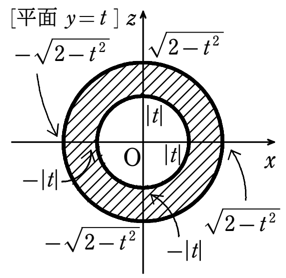
$\pi\{(\sqrt{2-t^2})^2-|t|^2\}=2(1-t^2)\pi$

よって，求める立体の体積は

$\int_{-1}^{1}2(1-t^2)\pi dt=-2\pi\int_{-1}^{1}(t+1)(t-1)dt$

$=-2\pi\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\{1-(-1)\}^3$

$=\frac{8}{3}\pi$



37 xyz 空間に4点 P$(0,\ 0,\ 2)$，A$(0,\ 2,\ 0)$，B$(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，C$(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$ をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2\geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。

解答 $4\sqrt{3}-2\pi$

解説

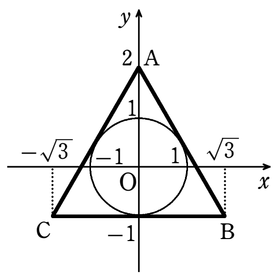
3点 A，B，C はすべて xy 平面上にあり

$AB=BC=CA=2\sqrt{3}$

よって，△ABC は正三角形である。

また，OP⊥(xy 平面) である。

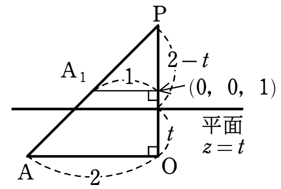
四面体 PABC の $x^2+y^2\geqq 1$ を満たす部分を K とし，立体 K を平面 $z=t$ で切ったときの切り口について考える。



平面 $z=t$ と辺 PA，PB，PC の交点をそれぞれ A_t，B_t，C_t とすると，OA=OB=OC=2 であるから，

平面 $z=1$ 上の点 $(0,\ 0,\ 1)$ と点 A_1，B_1，C_1 の距離はすべて 1

ゆえに，立体 K は $z>1$ の範囲には存在しないから，$0\leqq t\leqq 1$ として考える。



直線 AP の方程式は，$x=0$，$\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ であるから，

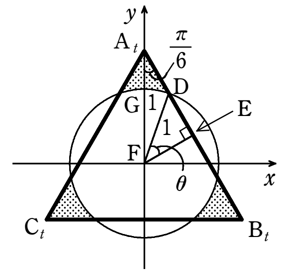
点 A_t の座標は $(0,\ 2-t,\ t)$

立体 K の平面 $z=t$ による切り口は，右の図の黒く塗った部分である。

ここで，$\triangle A_tB_tC_t$ は正三角形であり，黒く塗った3つの部分は，すべて合同な図形である。

よって，黒く塗った部分のうち，$y\geqq 0$ の範囲にあるものの面積 S_A について考える。

図のように点 D，E，F，G をとると



$\frac{S_A}{2}=\triangle FA_tE-\triangle FED-$(扇形FGD)

$\angle FA_tE=\frac{\pi}{6}$ であるから $FE=FA_t\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2-t}{2}$

$FD=1$ であるから $DE=\sqrt{1-FE^2}=\frac{\sqrt{4t-t^2}}{2}$

また $A_tE=FA_t\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)$

ゆえに，$\triangle FA_tE$ の面積は $\frac{1}{2}A_tE\cdot FE=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)\cdot\frac{2-t}{2}=\frac{\sqrt{3}(2-t)^2}{8}$

△FED の面積は $\frac{1}{2}DE\cdot FE=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4t-t^2}}{2}\cdot\frac{2-t}{2}=\frac{(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{8}$

扇形 FGD の面積は，$\angle EFD=\theta$ とすると $\angle A_tFD=\frac{\pi}{3}-\theta$ であるから

$\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\angle A_tFD=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

よって $S_A=\frac{\sqrt{3}(2-t)^2}{4}-\frac{(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{4}-\frac{\pi}{3}+\theta$

したがって，立体 K の体積を V とすると

$V=\int_0^1 3S_Adt=\int_0^1\left\{\frac{3\sqrt{3}(2-t)^2}{4}-\frac{3(2-t)\sqrt{4t-t^2}}{4}-\pi+3\theta\right\}dt$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{(2-t)^3}{3}\right]_0^1-\pi\Big[t\Big]_0^1-\frac{3}{4}\int_0^1(2-t)\sqrt{4t-t^2}dt+3\int_0^1\theta dt$

$=\frac{7\sqrt{3}}{4}-\pi-\frac{3}{4}\int_0^1(2-t)\sqrt{4t-t^2}dt+3\int_0^1\theta dt$

ここで $\int_0^1(2-t)\sqrt{4t-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{4t-t^2}(4t-t^2)'dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(4t-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\sqrt{3}$

また，直角三角形 FED において $\cos\theta=FE=\frac{2-t}{2}$

よって $t=2-2\cos\theta$ ゆえに $dt=2\sin\theta\,d\theta$

t	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

$\int_0^1\theta dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\cdot2\sin\theta\,d\theta=2\left(\Big[-\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\,d\theta\right)$

$=2\left(-\frac{\pi}{6}+\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

以上から $V=\frac{7\sqrt{3}}{4}-\pi-\frac{3}{4}\sqrt{3}+3\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=4\sqrt{3}-2\pi$

38 座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a)，(b) を満たしながら動く。

(a)　点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b)　点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする。K と不等式 $z\geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

解答　$\left(\dfrac{17}{3}-8\log 2\right)\pi$

解説

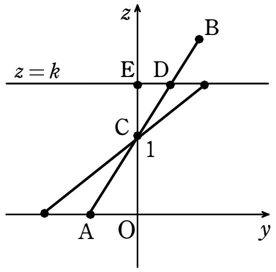
K を平面 $z=k$ $(k\geqq 1)$ で切った切り口が空集合でないような k の値の範囲は，A と O が一致するとき，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$ であることに注意すると　$1\leqq k\leqq 2$

特に $k=1$，2 のとき，切り口は 1 点のみである。

$1<k<2$ のときを考える。

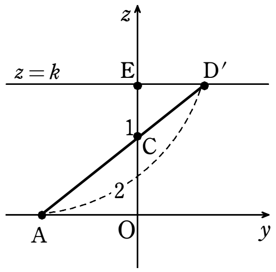
対称性から，K は平面 $x=0$ における線分 AB の通過範囲を z 軸を中心に回転させた領域である。

線分 AB と平面 $z=k$ が共有点をもつとき，その共有点を D として，$\mathrm{E}(0,\ 0,\ k)$ とする。



線分 DE の長さが最大となるのは，右の図のように，D と B が一致するときである。

2 点 D，B が一致するときの点 D を D′ とすると，K を平面 $z=k$ で切った切り口は，点 E を中心とする半径 D′E の円である。



$\mathrm{D'C}:\mathrm{CA}=\mathrm{EC}:\mathrm{CO}$ であるから

$$\mathrm{D'C}:(2-\mathrm{D'C})=(k-1):1$$

ゆえに　$\mathrm{D'C}=(k-1)(2-\mathrm{D'C})$

よって　$\mathrm{D'C}=\dfrac{2(k-1)}{k}$

ゆえに　$\mathrm{D'E}^2=\mathrm{D'C}^2-\mathrm{EC}^2=\dfrac{4(k-1)^2}{k^2}-(k-1)^2$

よって，K を平面 $z=k$ で切った切り口の面積は　$\pi\left\{\dfrac{4(k-1)^2}{k^2}-(k-1)^2\right\}$

したがって，求める体積は

$$\int_1^2\pi\left\{\frac{4(k-1)^2}{k^2}-(k-1)^2\right\}dk=4\pi\int_1^2\left(1-\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right)dk-\pi\left[\frac{(k-1)^3}{3}\right]_1^2$$

$$=4\pi\left[k-2\log k-\frac{1}{k}\right]_1^2-\frac{1}{3}\pi=\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)\pi$$

39 xyz 空間の原点と点 $(1,\ 1,\ 1)$ を通る直線を ℓ とする。

(1)　ℓ 上の点 $\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ を通り ℓ と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2)　不等式 $0\leqq y\leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。ℓ を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

解答　(1)　$x+y=t,\ z=0$　　(2)　$\dfrac{2\sqrt{3}}{45}\pi$

解説

原点を O，点 $(1,\ 1,\ 1)$ を A とする。

(1)　直線 ℓ の方向ベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 1)$

点 $\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ を P とし，点 P を通り，ℓ と垂直な平面上の点を $\mathrm{P'}(x,\ y,\ z)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=0$

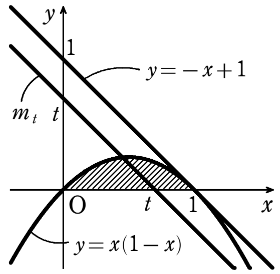
ゆえに　$1\cdot\left(x-\dfrac{t}{3}\right)+1\cdot\left(y-\dfrac{t}{3}\right)+1\cdot\left(z-\dfrac{t}{3}\right)=0$　すなわち　$x+y+z=t$

よって，求める直線の方程式は　$x+y=t,\ z=0$

(2)　xy 平面上の領域 D は右の図の斜線部分のようになる。

ここで，(1) で求めた直線を m_t とする。

領域 D が直線 m_t と共有点をもつのは，曲線 $y=x(1-x)$ の $x=1$ における接線が直線 $y=-x+1$ すなわち m_1 であることに注意すると，$0\leqq t\leqq 1$ のときである。



$\mathrm{OP}=u$ とすると　$u=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$

よって，$0\leqq t\leqq 1$ のとき　$0\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また，得られる回転体を E とし，点 P を通り，直線 ℓ に垂直な平面 L による E の断面の面積を S とすると，求める体積 V は

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}S\,du$$

$u=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$ であるから　$du=\dfrac{1}{\sqrt{3}}dt$

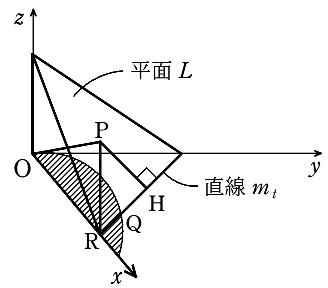
u	$0\ \longrightarrow\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
t	$0\ \longrightarrow\ 1$

したがって　$V=\displaystyle\int_0^1\frac{S}{\sqrt{3}}dt$　……①

ここで，直線 m_t と xy 平面上の曲線 $y=x(1-x)$，x 軸との交点をそれぞれ Q，R とする。

このとき，立体 E の平面 L による断面の面積 S は，平面 L 上で線分 QR が点 P を中心に 1 回転したときに通過する領域の面積に等しい。

点 P から直線 m_t に垂線 PH を下ろし，H の座標を $(x,\ -x+t,\ 0)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\left(x-\frac{t}{3},\ -x+\frac{2}{3}t,\ -\frac{t}{3}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ は m_t の方向ベクトル $(1,\ -1,\ 0)$ に垂直であるから

$$1\cdot\left(x-\frac{t}{3}\right)-1\cdot\left(-x+\frac{2}{3}t\right)+0=0\quad すなわち\quad x=\frac{t}{2}$$

よって，点 H の座標は　$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t}{2},\ 0\right)$

ゆえに，点 H は xy 平面上の直線 $y=x$ 上の点であり，直線 $y=x$ は曲線 $y=x(1-x)$ の $x=0$ における接線であるから，点 H は線分 QR の外側にある。

したがって，線分 QR 上で点 P との距離が最大となるのは点 R，最小となるのは点 Q である。

ゆえに　$S=\pi\mathrm{PR}^2-\pi\mathrm{PQ}^2=\pi(\mathrm{PH}^2+\mathrm{HR}^2)-\pi(\mathrm{PH}^2+\mathrm{HQ}^2)$

$$=\pi(\mathrm{HR}^2-\mathrm{HQ}^2)$$

ここで，点 Q の座標を $(s,\ s(1-s),\ 0)$ とすると，Q は直線 $m_t:x+y=t$ 上の点でもあるから　$s+s(1-s)=t$　すなわち　$2s-s^2=t$

点 R の座標は $(t,\ 0,\ 0)$ であるから

$$S=\pi(\mathrm{HR}^2-\mathrm{HQ}^2)$$

$$=\pi\left[\left\{\left(t-\frac{t}{2}\right)^2+\left(0-\frac{t}{2}\right)^2+0^2\right\}-\left\{\left(s-\frac{t}{2}\right)^2+\left\{s(1-s)-\frac{t}{2}\right\}^2+0^2\right\}\right]$$

$$=\pi\{st+s(1-s)t-s^2-s^2(1-s)^2\}$$

これに $t=2s-s^2$ を代入して整理すると

$$S=2\pi(s^2-s^3)$$

$t=2s-s^2$ から　$dt=(2-2s)ds$

t	$0\ \longrightarrow\ 1$
s	$0\ \longrightarrow\ 1$

よって，① から

$$V=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 S\,dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 2\pi(s^2-s^3)\cdot(2-2s)ds$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1(s^2-2s^3+s^4)ds=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{s^3}{3}-\frac{s^4}{2}+\frac{s^5}{5}\right]_0^1=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$

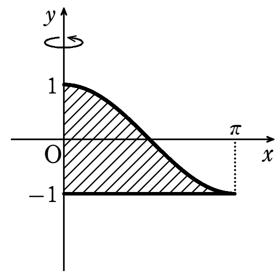
40 曲線 $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と y 軸，および直線 $y=-1$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答　$\pi^3-4\pi$

解説

$y=\cos x$ より　$dy=-\sin x\,dx$

y	$-1\ \longrightarrow\ 1$
x	$\pi\ \longrightarrow\ 0$



$$V=\pi\int_{-1}^1 x^2dy$$

$$=\pi\int_\pi^0 x^2(-\sin x)dx=\pi\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$$

$$=\pi\Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^\pi+2\pi\int_0^\pi x\cos x\,dx$$

$$=\pi^3+2\pi\Big[x\sin x\Big]_0^\pi-2\pi\int_0^\pi\sin x\,dx$$

$$=\pi^3-2\pi\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=\pi^3-4\pi$$

41 曲線 $y=\log x$，原点を通るこの曲線の接線，および x 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答　$\dfrac{\pi}{6}(e^2-3)$

解説

$y'=\dfrac{1}{x}$ であるから，曲線 $y=\log x$ 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)\quad すなわち\quad y=\frac{1}{t}x+\log t-1\quad ……①$$

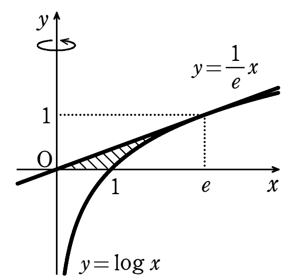
接線 ① が原点を通るとき，① に $x=0$，$y=0$ を代入して

$$0=\log t-1$$

ゆえに　$t=e$

よって，原点を通る接線の方程式は　$y=\dfrac{1}{e}x$

また，接点の座標は　$(e,\ 1)$



$y=\dfrac{1}{e}x$ より　$x=ey$，$y=\log x$ より　$x=e^y$ であるから

$$V=\pi\int_0^1(e^y)^2dy-\pi\int_0^1(ey)^2dy$$

$$=\pi\int_0^1(e^{2y}-e^2y^2)dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-\frac{e^2}{3}y^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{6}(e^2-3)$$

別解　[体積の求め方]

$$V=\pi\int_0^1 (e^y)^2dy-\frac{1}{3}\pi\cdot e^2\cdot 1=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1-\frac{\pi}{3}e^2=\frac{\pi}{6}(e^2-3)$$

42 次の曲線と直線で囲まれた部分を，直線 $y=1$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=2\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$y=1$　　(2)　$y=\sqrt{x}$，$x=0$，$y=1$

解答　(1)　$\pi(2\pi-3\sqrt{3})$　　(2)　$\dfrac{\pi}{6}$

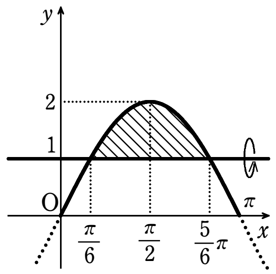
解説

(1)　$0\leqq x\leqq\pi$ において $2\sin x=1$ を解くと　$x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

曲線 $y=2\sin x$ と直線 $y=1$ を y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，それぞれ

$y=2\sin x-1$，$y=0$（x 軸）

に移る。



よって　$V=\pi\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(2\sin x-1)^2dx$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(4\sin^2x-4\sin x+1)dx=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\left(4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-4\sin x+1\right)dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(3-2\cos 2x-4\sin x)dx=\pi\Big[3x-\sin 2x+4\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$$

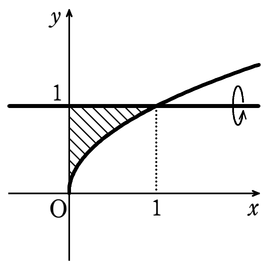
$$=\pi(2\pi-3\sqrt{3})$$

(2)　$\sqrt{x}=1$ を解くと　$x=1$

曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=1$ を y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，それぞれ

$y=\sqrt{x}-1$，$y=0$（x 軸）

に移る。



よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x}-1)^2dx=\pi\int_0^1(x-2\sqrt{x}+1)dx$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1=\frac{\pi}{6}$$

参考　(1)　この立体を直線 $y=1$ に垂直な平面で切るとその断面は半径 $2\sin x-1$ の円であるから　$V=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\pi(2\sin x-1)^2dx$

(2)　この立体を直線 $y=1$ に垂直な平面で切るとその断面は半径 $1-\sqrt{x}$ の円であるから

$$V=\int_0^1\pi(1-\sqrt{x})^2dx=\int_0^1\pi(\sqrt{x}-1)^2dx$$

43 $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。曲線 $y=\sin x$ および 3 直線 $x=t$，$x=2t$，$y=0$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ が最大になる t の値を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解説

$V(t)=\pi\displaystyle\int_t^{2t}\sin^2x\,dx$ である。

$F(x)=\displaystyle\int\sin^2x\,dx$ とおくと

$$V(t)=\pi\{F(2t)-F(t)\}$$

$$V'(t)=\pi\{2F'(2t)-F'(t)\}=\pi(2\sin^2 2t-\sin^2 t)=\pi\sin^2 t(8\cos^2 t-1)$$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ において，$V'(t)=0$ とすると　$\cos t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

これを満たす t の値を α_0 とすると，$V(t)$ の増減表は右のようになる。

よって，$t=\alpha_0$ で $V(t)$ は最大となる。

したがって　$\cos\alpha=\cos\alpha_0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

t	0	$\cdots$	α_0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$V'(t)$	/	$+$	0	$-$	/
$V(t)$		↗	極大	↘	

44 $a>0$ とする。曲線 $y=a^2-x^2$ $(-a\leqq x\leqq a)$ と x 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を，曲線 $y=kx^2$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる曲面で 2 等分したい。定数 k の値を求めよ。

解答　$k=1$

解説

曲線 $y=a^2-x^2$ と x 軸で囲まれた部分と，2 曲線 $y=a^2-x^2$，$y=kx^2$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。

$a^2-x^2=kx^2$ とすると，$k>0$ であり　$x^2=\dfrac{a^2}{k+1}$，$y=\dfrac{k}{k+1}a^2$

$\alpha=\dfrac{k}{k+1}a^2$ とおくと

$$V_1=\pi\int_0^{a^2}x^2dy=\pi\int_0^{a^2}(a^2-y)dy=\pi\left[a^2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^2}=\frac{\pi}{2}a^4$$

$$V_1-V_2=\pi\int_0^{\alpha}\left\{(a^2-y)-\frac{y}{k}\right\}dy=\pi\left[a^2y-\frac{k+1}{2k}y^2\right]_0^{\alpha}$$

$$=\pi\left(a^2\alpha-\frac{k+1}{2k}\alpha^2\right)=\frac{\pi k}{2(k+1)}a^4$$

$\dfrac{1}{2}V_1=V_1-V_2$ から　$\dfrac{\pi}{4}a^4=\dfrac{\pi k}{2(k+1)}a^4$　すなわち　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{k}{k+1}$

よって　$k=1$

45 放物線 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答　$\dfrac{32}{15}\pi$

解説

$\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x=x$ とすると　$x^2-2\sqrt{2}x=0$

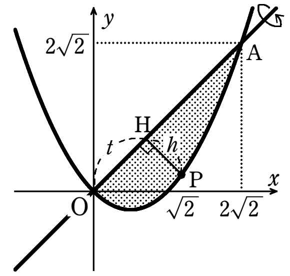
これを解いて　$x=0$，$2\sqrt{2}$

よって，放物線と直線の交点は

$(0,\ 0)$，$(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

原点を O，点 $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ を A とすると　OA $=4$

$0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ とし，放物線上の点 $\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)$ から直線 $y=x$ に垂線 PH を下ろし，PH $=h$，OH $=t$ とおく。



H を通り，直線 $y=x$ に垂直な平面による立体の切り口の面積を $S(t)$ とすると

$$V=\int_0^4 S(t)dt=\pi\int_0^4 h^2dt$$

ここで　$h=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{x-\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)\right\}=\dfrac{2\sqrt{2}x-x^2}{2}$

また　$t=\sqrt{2}x-h=\dfrac{1}{2}x^2$

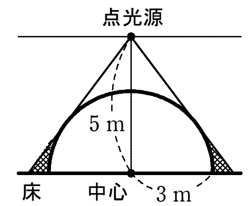
したがって　$dt=xdx$

t	$0\ \longrightarrow\ 4$
x	$0\ \longrightarrow\ 2\sqrt{2}$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\frac{2\sqrt{2}x-x^2}{2}\right)^2xdx=\frac{\pi}{4}\int_0^{2\sqrt{2}}(x^5-4\sqrt{2}x^4+8x^3)dx$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{x^6}{6}-\frac{4\sqrt{2}}{5}x^5+2x^4\right]_0^{2\sqrt{2}}=\frac{32}{15}\pi$$

46 ある美術館では，半径 3 m の半球のオブジェを展示している。このオブジェは，右の断面図のように，水平な床におわんを伏せた形で置かれていて，オブジェの中心から真上に 5 m 離れた点にある点光源で照らされている。このとき，点光源の光が当たらない陰の部分（ただし，オブジェの外部で，床より上）の体積 V を求めたい。



(1)　中心から点光源までの高さが 1 m，半球の半径が a m $(a<1)$ となるモデルを考える。このときの陰の部分の体積 $V(a)$ を求めよ。

(2)　体積 V を求めよ。

解答　(1)　$V(a)=\dfrac{a^6}{3(1-a^2)}\pi$ (m^3)　　(2)　$V=\dfrac{243}{80}$ (m^3)

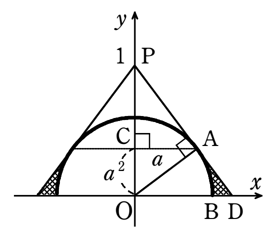
解説

(1)　半球のオブジェの中心を O，点光源を P とする。

xy 平面において，O $(0,\ 0)$，P $(0,\ 1)$ として，点 A，B，C，D を右図のように定めると，△OCA∽△OAP より　OC：OA＝OA：OP

よって，OC＝OA$^2=a^2$ となるから，C $(0,\ a^2)$ である。

弧 AB を y 軸の周りに回転した回転体の体積を V_1 とすると



$$V_1=\pi\int_0^{a^2}(a^2-y^2)dy=\pi\left[a^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{a^2}=\pi\left(a^4-\frac{1}{3}a^6\right)=\frac{1}{3}\pi(3a^4-a^6)$$

頂点が P，底面が CA を半径とする円である円錐の体積 V_2 は，CA$^2=a^2-a^4$ から

$$V_2=\frac{1}{3}\pi(a^2-a^4)(1-a^2)=\frac{1}{3}\pi a^2(1-a^2)^2$$

また，△OAD∽△POD より　OD：PD＝OA：PO

よって，OD・OP＝OA・DP が成り立つから　OD＝aDP

ゆえに，$OD^2=a^2DP^2=a^2(OD^2+1)$ より　$OD^2=\frac{a^2}{1-a^2}$

頂点が P，底面が OD を半径とする円である円錐の体積 V_3 は　$V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{1-a^2}$

したがって，求める体積 $V(a)$ は

$$V(a)=V_3-(V_1+V_2)=\frac{a^6}{3(1-a^2)}\pi\ \ (\mathrm{m}^3)$$

(2)　$V=5^3\times V\left(\frac{3}{5}\right)$ であるから　$V=5^3\times\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6}{3\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}}\pi=\frac{243}{80}$ (m^3)

47 $f(x)=x\sin x$ $(x\geqq 0)$ とする。点 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の法線と，曲線 $y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分，および y 軸とで囲まれた図形を考える。この図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

解答　$\frac{13}{48}\pi^4-\frac{\pi^2}{8}$

解説

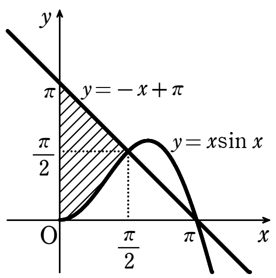
$f(x)=x\sin x$ から　$f'(x)=\sin x+x\cos x$

ゆえに　$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

よって，点 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の法線の

方程式は　$y-\frac{\pi}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

すなわち　$y=-x+\pi$



求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\pi^2\cdot\pi-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 x\,dx$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(1-\cos 2x)dx=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x\,dx\right)$$

$$=\frac{13}{48}\pi^4+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x\,dx$$

ここで　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos 2x\,dx=\left[x^2\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx$

$$=\left[x\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{2}dx$$

$$=-\frac{\pi}{4}-\left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{4}$$

したがって　$V=\frac{13}{48}\pi^4+\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{13}{48}\pi^4-\frac{\pi^2}{8}$

48 (1)　関数 $f(x)=e^x(\cos x+\sin x)$ を微分せよ。

(2)　$g(x)=e^{-\pi x}\sin\pi x$ とする。$n-1\leqq x\leqq n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ における $y=g(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。

(3)　$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ を求めよ。

解答　(1)　$f'(x)=2e^x\cos x$　(2)　$\frac{1}{8}(e^{2\pi}-1)e^{-2n\pi}$　(3)　$\frac{1}{8}$

解説

(1)　$f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)+e^x(-\sin x+\cos x)=2e^x\cos x$

(2)　$V_n=\pi\int_{n-1}^{n}(e^{-\pi x}\sin\pi x)^2dx=\pi\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\sin^2\pi x\,dx$

$$=\pi\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\cdot\frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\left(\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}dx-\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\cos 2\pi x\,dx\right)$$

ここで　$\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}dx=\left[-\frac{1}{2\pi}e^{-2\pi x}\right]_{n-1}^{n}=-\frac{1}{2\pi}\{e^{-2n\pi}-e^{-2(n-1)\pi}\}$

$$=\frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-1)e^{-2n\pi}$$

$\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\cos 2\pi x\,dx$ において，$-2\pi x=t$ とおくと

$dx=-\frac{1}{2\pi}dt$

x	$n-1$	→	n
t	$-2(n-1)\pi$	→	$-2n\pi$

よって　$\int_{n-1}^{n}e^{-2\pi x}\cos 2\pi x\,dx=\int_{-2(n-1)\pi}^{-2n\pi}e^t\cos(-t)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right)dt$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi}e^t\cos t\,dt$$

ここで，(1) の結果から

$\int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$　（C は積分定数）

よって　$\int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi}e^t\cos t\,dt=\left[\frac{1}{2}e^t(\cos t+\sin t)\right]_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi}$

$$=\frac{1}{2}\{e^{-2(n-1)\pi}-e^{-2n\pi}\}=\frac{1}{2}(e^{2\pi}-1)e^{-2n\pi}$$

したがって　$V_n=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-1)e^{-2n\pi}-\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(e^{2\pi}-1)e^{-2n\pi}\right\}$

$$=\frac{1}{8}(e^{2\pi}-1)e^{-2n\pi}$$

(3)　$V_n=\frac{1}{8}(e^{2\pi}-1)e^{-2n\pi}$ であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$ は初項 $\frac{1}{8}(e^{2\pi}-1)e^{-2\pi}$，公比 $e^{-2\pi}$ の無限等比級数である。

$|e^{-2\pi}|<1$ であるから，この級数は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\frac{\frac{1}{8}(e^{2\pi}-1)e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1}{8}$$

49 媒介変数 t を用いて $x=t^2$，$y=t^3$ と表される曲線を C とする。ただし，t は実数全体を動くとする。また，実数 a $(a\neq 0)$ に対して，点 $(a^2,\ a^3)$ における C の接線を ℓ_a とする。

(1)　ℓ_a の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C の $0\leqq t\leqq 1$ に対応する部分の長さを求めよ。

(3)　曲線 C と直線 ℓ_1 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(4)　曲線 C と直線 ℓ_1 で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

解答　(1)　$y=\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}a^3$　(2)　$\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$　(3)　$\frac{27}{320}$　(4)　$\frac{27}{448}\pi$

解説

(1)　$x=t^2$，$y=t^3$ から　$\frac{dx}{dt}=2t$，$\frac{dy}{dt}=3t^2$

よって，$t\neq 0$ のとき　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$

$x=a^2$，$y=a^3$ のとき　$t=a$

ゆえに，接線 ℓ_a の方程式は　$y-a^3=\frac{3}{2}a(x-a^2)$

すなわち　$y=\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}a^3$

(2)　求める長さを L とすると

$$L=\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{t^2(4+9t^2)}\,dt$$

$$=\int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{4+9t^2}\cdot\frac{1}{18}(4+9t^2)'dt$$

$$=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

(3)　x，y の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$-$	0	$+$
x	←	0	→
$\frac{dy}{dt}$	$+$	0	$+$
y	↑	0	↑

また，接線 ℓ_1 の方程式は　$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

これに $x=t^2$，$y=t^3$ を代入すると　$t^3=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}$

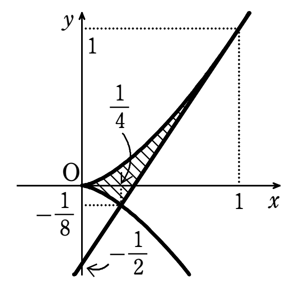
よって　$2t^3-3t^2+1=0$

すなわち　$(t-1)^2(2t+1)=0$

ゆえに　$t=1,\ -\frac{1}{2}$

したがって，曲線 C と直線 ℓ_1 の共有点の座標は　$(1,\ 1)$，$\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8}\right)$

よって，曲線 C と直線 ℓ_1 の位置関係は右の図のようになり，求める面積は図の斜線部分の面積である。



求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+1\right)\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}-\int_{-\frac{1}{8}}^{1}x\,dy$$

$$=\frac{45}{64}-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}t^2\cdot 3t^2dt$$

$$=\frac{45}{64}-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}3t^4dt=\frac{45}{64}-\left[\frac{3}{5}t^5\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{45}{64}-\left\{\frac{3}{5}-\left(-\frac{3}{160}\right)\right\}=\frac{27}{320}$$

(4)　求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\left\{-\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}-\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{1}x^2\,dy$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{128}\right)-\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{1}t^4\cdot 3t^2dt=\frac{63}{128}\pi-\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{1}3t^6dt$$

$$=\frac{63}{128}\pi-\pi\left[\frac{3}{7}t^7\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{63}{128}\pi-\frac{3}{7}\pi\left\{1-\left(-\frac{1}{128}\right)\right\}$$

$$=\frac{27}{448}\pi$$

$\boxed{50}$ xyz 空間において，点 $(1,\ 0,\ 1)$ と点 $(1,\ 0,\ 2)$ を結ぶ線分を ℓ とし，ℓ を z 軸の周りに 1 回転させてできる図形を A とする。A を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

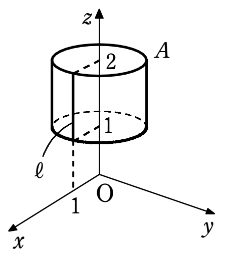
解答　6π

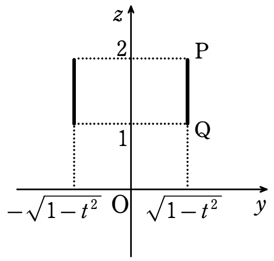
解説

図形 A を表す方程式は　　$x^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$

図形 A の平面 $x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ による切り口は，右下の図の実線部分である。

点 $\left(\sqrt{1-t^2},\ 2\right)$ を P，点 $\left(\sqrt{1-t^2},\ 1\right)$ を Q とする。





図形 A の平面 $x=t$ による切り口を x 軸の周りに 1 回転させたときに通過する領域の面積を S とすると　　$S=\pi\mathrm{OP}^2-\pi\mathrm{OQ}^2=\pi\{(1-t^2)+4\}-\pi\{(1-t^2)+1\}=3\pi$

よって，求める立体の体積を V とすると

$$V=\int_{-1}^{1}Sdt=\int_{-1}^{1}3\pi dt=6\pi\int_{0}^{1}dt=6\pi\Big[t\Big]_0^1=6\pi$$

$\boxed{51}$ 放物線 $y=-x^2+2x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　$\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$

解説

$-x^2+2x=x$ とすると　　$x^2-x=0$

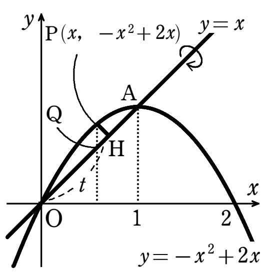
これを解いて　　$x=0,\ 1$

よって，放物線と直線の交点の座標は

$(0,\ 0),\ (1,\ 1)$

原点を O，点 $(1,\ 1)$ を A とすると

$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$



$0\leqq x\leqq 1$ とし，放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ -x^2+2x)$ から直線 $y=x$ に垂線 PH を下ろし，$\mathrm{PH}=h$，$\mathrm{OH}=t$ とおく。

$\mathrm{Q}(x,\ x)$ とすると，△PQH は PH＝QH の直角二等辺三角形であるから

$$h=\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}=\frac{(-x^2+2x)-x}{\sqrt{2}}=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$

$$t=\mathrm{OQ}+\mathrm{QH}=\sqrt{2}x+h=\sqrt{2}x+\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{3x-x^2}{\sqrt{2}}$$

よって　　$dt=\dfrac{3-2x}{\sqrt{2}}dx$

t	$0\longrightarrow\sqrt{2}$
x	$0\longrightarrow 1$

求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}h^2dt=\pi\int_0^1\frac{(x-x^2)^2}{2}\cdot\frac{3-2x}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(-2x^5+7x^4-8x^3+3x^2)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[-\frac{x^6}{3}+\frac{7}{5}x^5-2x^4+x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{15}=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$