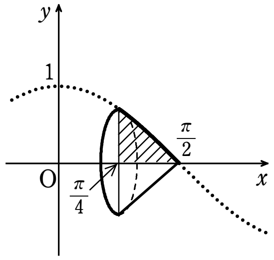
体積クイズ

1 曲線 $y=\cos x$ $\left(\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および直線 $x=\frac{\pi}{4}$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$

解説

求める体積を V とすると



$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi(\pi-2)}{8}$$

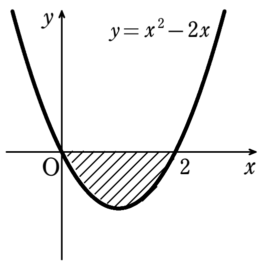
2 次の曲線と直線で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) $y=x^2-2x$，x 軸　　(2) $y=e^x-1$，x 軸，$x=1$

解答 (1) $\frac{16}{15}\pi$　(2) $\left(\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{5}{2}\right)\pi$

解説

(1) 曲線 $y=x^2-2x$ と x 軸の交点の x 座標は，
方程式 $x^2-2x=0$ の解である。
これを解くと　$x=0,\ 2$
よって，求める立体の体積 V は

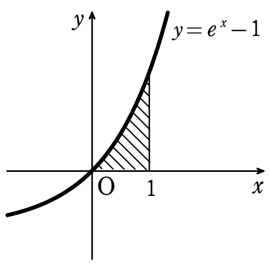


$$V=\pi\int_0^2(x^2-2x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^2(x^4-4x^3+4x^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{15}\pi$$

(2) 曲線 $y=e^x-1$ と x 軸の交点の x 座標は，
方程式 $e^x-1=0$ の解である。
これを解くと　$x=0$
よって，求める立体の体積 V は



$$V=\pi\int_0^1(e^x-1)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1(e^{2x}-2e^x+1)dx$$

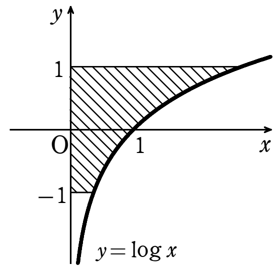
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{5}{2}\right)\pi$$

3 曲線 $y=\log x$ と y 軸，および 2 直線 $y=-1$，$y=1$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{e^4-1}{2e^2}\pi$

解説

$y=\log x$ から　$x=e^y$
求める体積を V とすると



$$V=\pi\int_{-1}^{1}x^2dy=\pi\int_{-1}^{1}e^{2y}dy$$

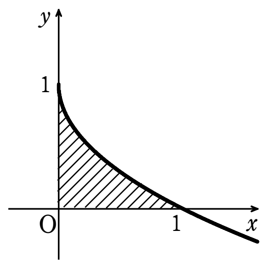
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_{-1}^{1}=\frac{e^4-1}{2e^2}\pi$$

4 曲線 $y=1-\sqrt{x}$ と x 軸，および y 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{\pi}{5}$

解説

曲線 $y=1-\sqrt{x}$ と x 軸との共有点の座標は　$(1,\ 0)$，
y 軸との共有点の座標は　$(0,\ 1)$
また，$\sqrt{x}=1-y$ から　$x=(1-y)^2$
よって，求める体積 V は



$$V=\pi\int_0^1x^2dy=\pi\int_0^1(1-y)^4dy$$

$$=\pi\left[-\frac{(1-y)^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{5}$$

5 次の曲線と直線で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) $y=e^x$，$x=1$，x 軸，y 軸　　(2) $y=\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，x 軸　[各 10 点]

解答 (1) $\pi\int_0^1y^2dx=\pi\int_0^1e^{2x}dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

(2) $\pi\int_0^{\pi}y^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 4x}{2}dx$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

解説

(1) $\pi\int_0^1y^2dx=\pi\int_0^1e^{2x}dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

(2) $\pi\int_0^{\pi}y^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 4x}{2}dx$

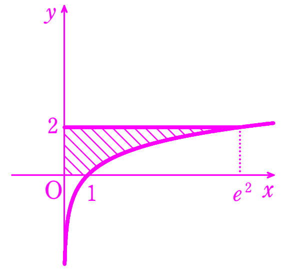
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

6 次の曲線と直線で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1) $y=\log x$ $(1\leqq x\leqq e^2)$，x 軸，y 軸，$y=2$

(2) $y=\frac{3}{x+1}$，y 軸，$y=1$　[各 15 点]

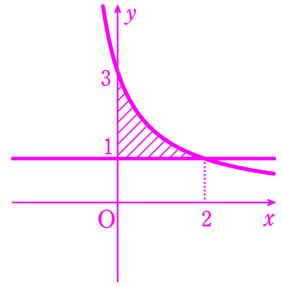
解答 (1) $y=\log x$ から　$x=e^y$
$x=1$ のとき　$y=0$，
$x=e^2$ のとき　$y=2$
よって，求める体積は



$$\pi\int_0^2x^2dy=\pi\int_0^2e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^4-1)$$

(2) $y=\frac{3}{x+1}$ から　$x=\frac{3}{y}-1$
よって，求める体積は



$$\pi\int_1^3x^2dy=\pi\int_1^3\left(\frac{3}{y}-1\right)^2dy$$

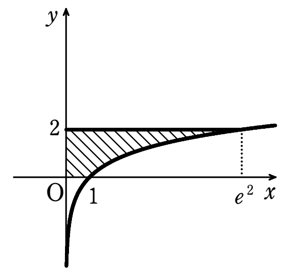
$$=\pi\int_1^3\left(\frac{9}{y^2}-\frac{6}{y}+1\right)dy$$

$$=\pi\left[-\frac{9}{y}-6\log y+y\right]_1^3$$

$$=(8-6\log 3)\pi$$

解説

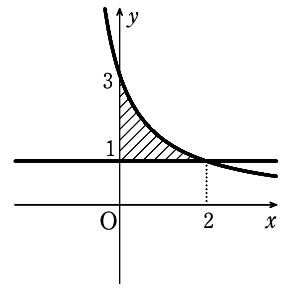
(1) $y=\log x$ から　$x=e^y$
$x=1$ のとき　$y=0$，
$x=e^2$ のとき　$y=2$
よって，求める体積は



$$\pi\int_0^2x^2dy=\pi\int_0^2e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^4-1)$$

(2) $y=\frac{3}{x+1}$ から　$x=\frac{3}{y}-1$
よって，求める体積は



$$\pi\int_1^3x^2dy=\pi\int_1^3\left(\frac{3}{y}-1\right)^2dy$$

$$=\pi\int_1^3\left(\frac{9}{y^2}-\frac{6}{y}+1\right)dy$$

$$=\pi\left[-\frac{9}{y}-6\log y+y\right]_1^3$$

$$=(8-6\log 3)\pi$$

7 曲線 $y=\sqrt{1-x}$ と x 軸，y 軸とで囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。[15 点]

解答 $y=\sqrt{1-x}$ から　$x=1-y^2$
よって，求める立体の体積 V は

$$V=\pi\int_0^1x^2dy=\pi\int_0^1(1-y^2)^2dy$$

$$=\pi\int_0^1(1-2y^2+y^4)dy$$

$$=\pi\left[y-\frac{2}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}\pi$$

解説

$y=\sqrt{1-x}$ から　$x=1-y^2$

よって，求める立体の体積 V は

$$V=\pi\int_0^1 x^2dy=\pi\int_0^1(1-y^2)^2dy$$
$$=\pi\int_0^1(1-2y^2+y^4)dy$$
$$=\pi\left[y-\frac{2}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}\pi$$

8 次の曲線と x 軸および直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

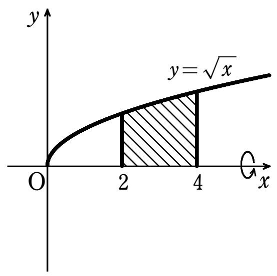
(1)　$y=\sqrt{x}$，$x=2$，$x=4$　　(2)　$y=e^{\frac{x}{4}}$，y 軸，$x=2$

解答　(1)　6π　　(2)　$2\pi(e-1)$

解説

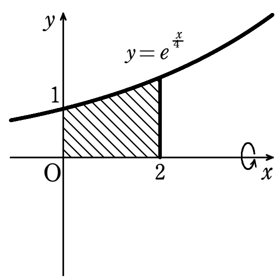
(1)　求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_2^4(\sqrt{x})^2dx$$
$$=\pi\int_2^4 xdx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4$$
$$=6\pi$$



(2)　求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^2\left(e^{\frac{x}{4}}\right)^2dx$$
$$=\pi\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}dx=\pi\left[2e^{\frac{x}{2}}\right]_0^2$$
$$=2\pi(e-1)$$



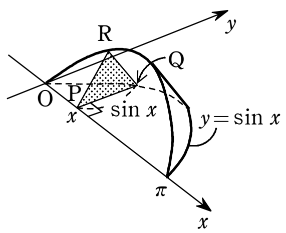
9 2 点 $\mathrm{P}(x,\ 0)$，$\mathrm{Q}(x,\ \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とする正三角形を，x 軸に垂直な平面上に作る。P が x 軸上を原点 O から点 $(\pi,\ 0)$ まで動くとき，この正三角形が描く立体の体積を求めよ。

解答　$\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$

解説

線分 PQ を 1 辺とする正三角形の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{1}{2}(\sin x)^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2x$$



よって，求める立体の体積を V とすると

$$V=\int_0^\pi S(x)dx=\int_0^\pi\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$

10 次の曲線や直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=2-e^x$，x 軸，y 軸

(2)　$y=\sin x\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$，$x=-\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$，$x$ 軸

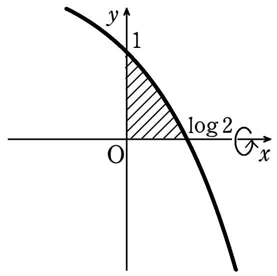
解答　(1)　$V=\left(4\log 2-\frac{5}{2}\right)\pi$　　(2)　$V=\frac{\pi^2}{2}$

解説

(1)　$y=0$ とすると，$2-e^x=0$ から　　$x=\log 2$

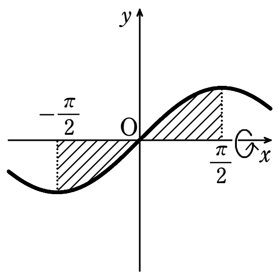
よって　$V=\pi\int_0^{\log 2}(2-e^x)^2dx$

$$=\pi\int_0^{\log 2}(4-4e^x+e^{2x})dx$$
$$=\pi\left[4x-4e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\log 2}$$
$$=\pi\left\{4\log 2-4(e^{\log 2}-1)+\frac{1}{2}(e^{2\log 2}-1)\right\}$$
$$=\left(4\log 2-\frac{5}{2}\right)\pi$$



(2)　$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}$$



11 次の曲線や直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1)　$y=\tan x$，x 軸，$x=\frac{\pi}{3}$　　(2)　$y=x-\frac{1}{\sqrt{x}}$，x 軸，$x=1$，$x=4$

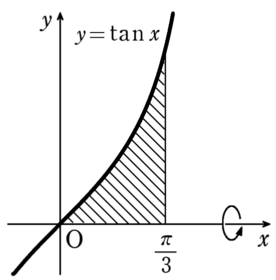
解答　(1)　$\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$　　(2)　$\left(\frac{35}{3}+2\log 2\right)\pi$

解説

求める体積を V とする。

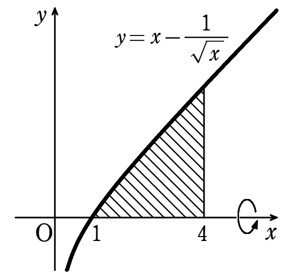
(1)　$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2x\,dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$$
$$=\pi\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$



(2)　$V=\pi\int_1^4\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

$$=\pi\int_1^4\left(x^2-2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\log x\right]_1^4$$
$$=\pi\left\{\frac{64-1}{3}-\frac{4(2^3-1)}{3}+\log 4\right\}$$
$$=\left(\frac{35}{3}+2\log 2\right)\pi$$



12 $0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ において，2 つの曲線 $y=\sin 2x$，$y=\tan x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

解答　$V=\frac{1}{8}\pi(3\pi-8)$

解説

$\sin 2x=\tan x\ \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると

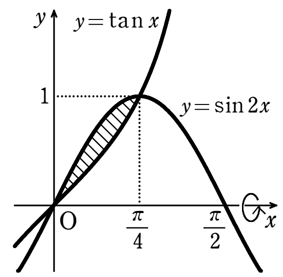
$$2\sin x\cos x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

よって　$\sin x(2\cos^2x-1)=0$

ゆえに　$\sin x=0$，$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$x=0$，$\frac{\pi}{4}$

また，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において　　$0\leqq\tan x\leqq\sin 2x$



よって　$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2 2x-\tan^2x)dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{\frac{1-\cos 4x}{2}-\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)\right\}dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}-\frac{\cos 4x}{2}-\frac{1}{\cos^2x}\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{3}{2}x-\frac{\sin 4x}{8}-\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{8}\pi(3\pi-8)$$

13 次の不等式で表される領域を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(1)　$x^2+(y-2)^2\leqq 4$

(2)　連立不等式 $x^2+y^2\leqq 3$，$x^2+y^2+6y\geqq 3$

解答　(1)　$16\pi^2$　　(2)　$12\pi^2-18\sqrt{3}\,\pi$

解説

求める体積を V とする。

(1)　$x^2+(y-2)^2=4$ から　$y=2\pm\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2\geqq 0$ であるから　$-2\leqq x\leqq 2$

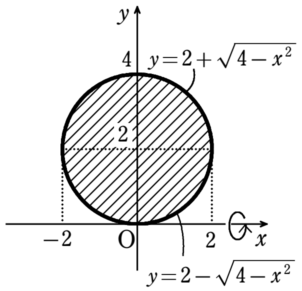
また，$2+\sqrt{4-x^2}\geqq 2-\sqrt{4-x^2}\geqq 0$ であるから

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\{(2+\sqrt{4-x^2})^2-(2-\sqrt{4-x^2})^2\}dx$$

$$=8\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

ここで，$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ は半径が 2 の半円の面積を表すから

$$V=8\pi\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=16\pi^2$$



(2)　$x^2+y^2+6y=3$ を変形すると

$$x^2+(y+3)^2=(2\sqrt{3})^2$$

よって，$x^2+y^2\leqq 3$，$x^2+y^2+6y\geqq 3$ で表される領域は，右の図の斜線部分である。

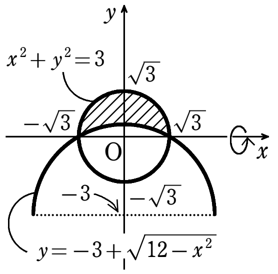
$x^2+y^2+6y=3$ から　$y=-3\pm\sqrt{12-x^2}$

斜線部分は y 軸に関して対称であるから

$$V=2\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3-\pi\int_0^{\sqrt{3}}(-3+\sqrt{12-x^2})^2dx\right\}$$

$$=4\sqrt{3}\pi-2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(21-x^2-6\sqrt{12-x^2})dx$$

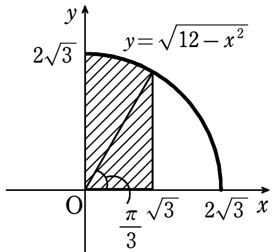
$$=4\sqrt{3}\pi-2\pi\left[21x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+12\pi\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx$$



ここで，$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積を表すから

$$\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{12-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\pi$$



よって

$$V=4\sqrt{3}\pi-2\pi(21\sqrt{3}-\sqrt{3})+12\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\pi\right)$$

$$=12\pi^2-18\sqrt{3}\pi$$

14 曲線 $x=\tan\theta$，$y=\cos 2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

解答　$V=\pi\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$

解説

$y=0$ とすると　$\cos 2\theta=0$

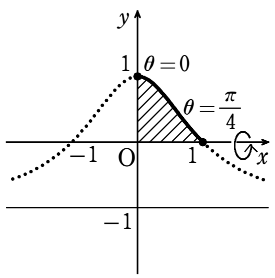
$0\leqq 2\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　$2\theta=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{4}$

このとき　$x=1$

$x=\tan\theta$ から　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$



ゆえに　$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos^2\theta-4+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos 2\theta+\frac{1}{\cos^2\theta}-2\right)d\theta=\pi\Big[\sin 2\theta+\tan\theta-2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\pi\left(1+1-\frac{\pi}{2}\right)=\pi\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$$

15 曲線 $\begin{cases}x=(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ で囲まれる図形を，x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

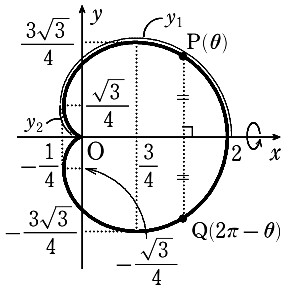
解答　$V=\frac{8}{3}\pi$

解説

θ と $2\pi-\theta$ に対応する点が x 軸に関して対称であるから，曲線は x 軸に関して対称である。よって，$0\leqq\theta\leqq\pi$ $(y\geqq 0)$ で考える。

$\begin{cases}x'=-\sin\theta(2\cos\theta+1)\\ y'=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)\end{cases}$ であるから，x と y の値の変化は次のようになる。

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
x	2	↘	$\frac{3}{4}$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	0



曲線は右の図のようになる。

$0\leqq\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$ のときの y を y_1，$\frac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ のときの y を y_2 とすると，求める体積 V は

$$V=\pi\int_{-\frac{1}{4}}^{2}y_1^2dx-\pi\int_{-\frac{1}{4}}^{0}y_2^2dx$$

$$=\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}\{y(\theta)\}^2x'(\theta)d\theta-\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\{y(\theta)\}^2x'(\theta)d\theta$$

$$=\pi\int_{\pi}^{0}\{y(\theta)\}^2x'(\theta)d\theta$$

ここで　$y^2dx=(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot\{-\sin\theta(2\cos\theta+1)\}d\theta$

$\cos\theta=t$ とおくと　$-\sin\theta\,d\theta=dt$

θ と t の対応は右のようになる。

θ	$\pi\longrightarrow 0$
t	$-1\longrightarrow 1$

よって　$V=\pi\int_{-1}^{1}(1+t)^2(1-t^2)(2t+1)dt$

$$=2\pi\int_0^1(-5t^4+4t^2+1)dt=2\pi\left[-t^5+\frac{4}{3}t^3+t\right]_0^1=\frac{8}{3}\pi$$

16 次の図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\geqq 0)$ と y 軸で囲まれた部分。ただし，$a>0$，$b>0$

(2)　曲線 $y=\log(x^2+1)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と直線 $y=\log 2$ および y 軸で囲まれた部分

解答　(1)　$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$　　(2)　$V=(1-\log 2)\pi$

解説

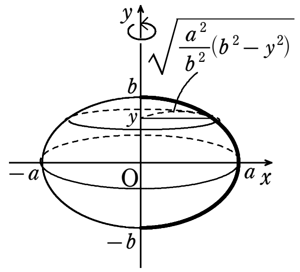
(1)　$x=0$ のとき　$y=\pm b$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ から　$x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$

よって　$V=\pi\int_{-b}^{b}x^2dy=2\pi\int_0^b\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)dy$

$$=2\pi\cdot\frac{a^2}{b^2}\left[b^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^b$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^2b$$



(2)　$x=0$ のとき　$y=0$

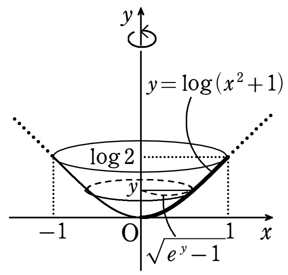
$x=1$ のとき　$y=\log 2$

$y=\log(x^2+1)$ から　$x^2=e^y-1$

よって　$V=\pi\int_0^{\log 2}x^2dy=\pi\int_0^{\log 2}(e^y-1)dy$

$$=\pi\Big[e^y-y\Big]_0^{\log 2}=\pi(2-\log 2-1)$$

$$=(1-\log 2)\pi$$



別解　$y=\log(x^2+1)$ から　$dy=\frac{2x}{x^2+1}dx$

y と x の対応は右のようになる。

y	$0\longrightarrow\log 2$
x	$0\longrightarrow 1$

よって　$V=\pi\int_0^{\log 2}x^2dy=\pi\int_0^1x^2\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx$

$$=\pi\int_0^1\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\pi\Big[x^2-\log(x^2+1)\Big]_0^1$$

$$=(1-\log 2)\pi$$

17 次の曲線や直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=-x^2+2$，x 軸　　　(2)　$y=\log\sqrt{x+1}$，$y=1$，y 軸

解答　(1)　$V=2\pi$　　(2)　$V=\pi\left(\frac{e^4}{4}-e^2+\frac{7}{4}\right)$

解説

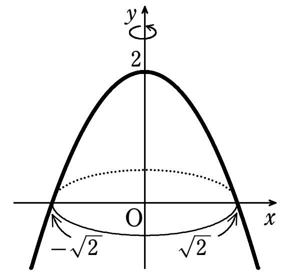
(1)　$y=-x^2+2$ から　$x^2=2-y$

よって　$V=\pi\int_0^2x^2dy$

$$=\pi\int_0^2(2-y)dy$$

$$=\pi\left[2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^2$$

$$=2\pi$$



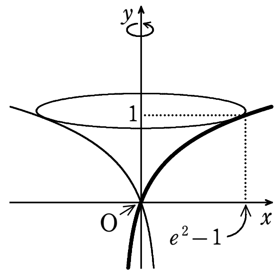
(2)　$y=\log\sqrt{x+1}$ から　$e^y=\sqrt{x+1}$

よって　$e^{2y}=x+1$

すなわち　$x=e^{2y}-1$

ゆえに

$$V=\pi\int_0^1(e^{2y}-1)^2dy$$
$$=\pi\int_0^1(e^{4y}-2e^{2y}+1)dy$$
$$=\pi\left[\frac{e^{4y}}{4}-e^{2y}+y\right]_0^1$$
$$=\pi\left(\frac{e^4}{4}-e^2+\frac{7}{4}\right)$$



別解　$y=\log\sqrt{x+1}$ から　　$dy=\dfrac{dx}{2(x+1)}$

y と x の対応は右のようになる。

y	$0 \to 1$
x	$0 \to e^2-1$

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_0^1 x^2dy$

$$=\pi\int_0^{e^2-1}x^2\cdot\frac{dx}{2(x+1)}$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{e^2-1}\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x+\log(x+1)\right]_0^{e^2-1}$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^4-4e^2+7)$$

18 底から x cm の高さにある平面での切り口が，半径 $\sqrt[3]{x}$ cm の円となる容器がある。深さが 27 cm のとき，この容器の容積 V を求めよ。

解答　$\dfrac{729}{5}\pi$ cm^3

解説

x cm の高さにある円の面積は　　$\pi\sqrt[3]{x^2}$ (cm^2)

よって　　$V=\displaystyle\int_0^{27}\pi\sqrt[3]{x^2}\,dx=\pi\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^{27}=\frac{729}{5}\pi$ (cm^3)

19 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2+3x$　　(2)　$y=1-\sqrt{x}$，$x=0$

(3)　$y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$　　(4)　$y=e^x$，$x=1$，$x=2$

解答　(1)　$\dfrac{81}{10}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{6}$　　(3)　$\pi-\dfrac{\pi^2}{4}$　　(4)　$\dfrac{\pi}{2}(e^4-e^2)$

解説

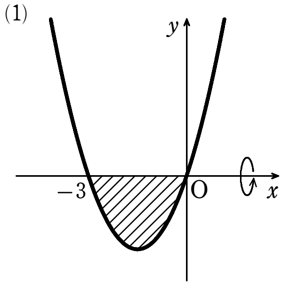
(1)　$x^2+3x=0$ とすると　　$x=-3$，0

$$V=\pi\int_{-3}^0(x^2+3x)^2dx=\pi\int_{-3}^0(x^4+6x^3+9x^2)dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{3}{2}x^4+3x^3\right]_{-3}^0=\frac{81}{10}\pi$$

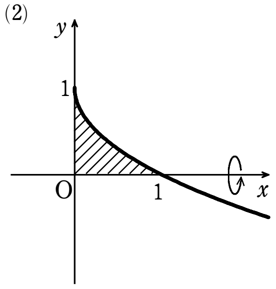
(2)　$1-\sqrt{x}=0$ とすると　　$x=1$

$$V=\pi\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=\pi\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}$$

(1)



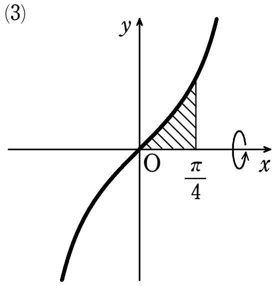
(2)



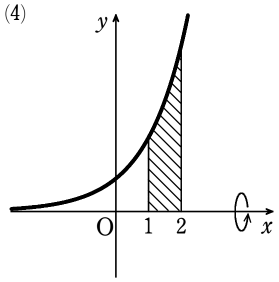
(3)　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\pi\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-\frac{\pi^2}{4}$

(4)　$V=\pi\displaystyle\int_1^2e^{2x}dx=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e^2)$

(3)



(4)



20 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

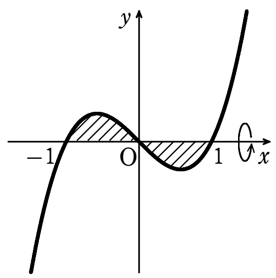
(1)　$y=x^3-x$　　(2)　$y=\log x$，$x=\dfrac{1}{e}$，$x=e$

解答　(1)　$\dfrac{16}{105}\pi$　　(2)　$\pi\left(e-\dfrac{5}{e}\right)$

解説

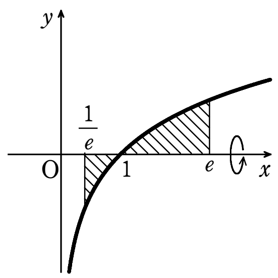
(1)　$x^3-x=0$ とすると　　$x=-1$，0，1

$$V=\pi\int_{-1}^0(x^3-x)^2dx+\pi\int_0^1(x^3-x)^2dx$$
$$=2\pi\int_0^1(x^6-2x^4+x^2)dx$$
$$=2\pi\left[\frac{x^7}{7}-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=2\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{105}\pi$$



(2)　$\log x=0$ とすると　　$x=1$

$$V=\pi\int_{\frac{1}{e}}^1(\log x)^2dx+\pi\int_1^e(\log x)^2dx$$
$$=\pi\int_{\frac{1}{e}}^e(\log x)^2dx=\pi\Big[x(\log x)^2\Big]_{\frac{1}{e}}^e-2\pi\int_{\frac{1}{e}}^e\log x\,dx$$
$$=\pi\left(e-\frac{1}{e}\right)-2\pi\Big[x\log x\Big]_{\frac{1}{e}}^e+2\pi\int_{\frac{1}{e}}^e dx$$
$$=\pi\left(e-\frac{1}{e}\right)-2\pi\left(e+\frac{1}{e}\right)+2\pi\left(e-\frac{1}{e}\right)=\pi\left(e-\frac{5}{e}\right)$$



21 次の曲線で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$x^2+y^2-4x=0$　　(2)　$9x^2+4y^2=36$

解答　(1)　$\dfrac{32}{3}\pi$　　(2)　24π

解説

(1)　曲線は円 $(x-2)^2+y^2=4$ である。

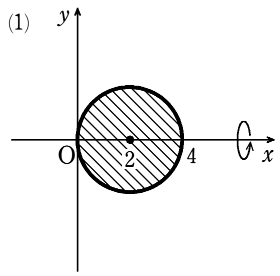
$$V=\pi\int_0^4y^2dx=\pi\int_0^4(-x^2+4x)dx=\pi\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}\pi$$

別解　求める体積は，半径 2 の球の体積であるから　　$V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot2^3=\dfrac{32}{3}\pi$

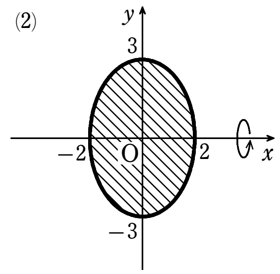
(2)　曲線は楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ である。

$$V=2\cdot\pi\int_0^2y^2dx=2\pi\int_0^2 9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=18\pi\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_0^2=24\pi$$

(1)



(2)



22 次の曲線や直線および y 軸で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x-1}$，$y=0$，$y=1$　　(2)　$x=y^2-y$

解答　(1)　$\dfrac{28}{15}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{30}$

解説

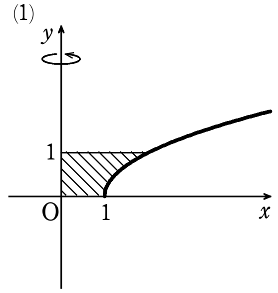
(1)　$y=\sqrt{x-1}$ から　　$x=y^2+1$

よって，図から　　$V=\pi\displaystyle\int_0^1x^2dy=\pi\int_0^1(y^2+1)^2dy=\pi\left[\frac{y^5}{5}+\frac{2}{3}y^3+y\right]_0^1=\frac{28}{15}\pi$

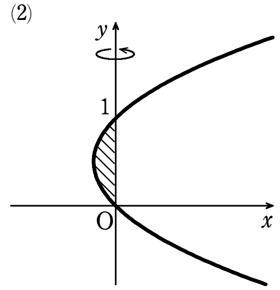
(2)　$y^2-y=0$ とすると　　$y=0$，1

よって，図から　　$V=\pi\displaystyle\int_0^1x^2dy=\pi\int_0^1(y^2-y)^2dy=\pi\left[\frac{y^5}{5}-\frac{y^4}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{30}$

(1)



(2)



23 座標平面上の 2 点 P$(x,\ 0)$，Q$(x,\ \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とし，この平面に垂直な正方形を作る。P が原点 O から C$(\pi,\ 0)$ まで動くとき，この正方形が通過してできる立体の体積 V を求めよ。

解答 $\dfrac{\pi}{2}$

解説

正方形の 1 辺の長さが $\sin x$ であるから，求める体積 V は

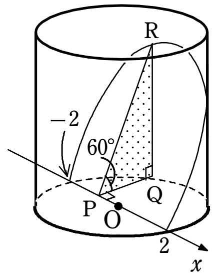
$$V=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

24 底面の半径が 2，高さが 4 の直円柱がある。この底面の直径 AB を含み，底面と 60° の傾きをなす平面で，直円柱を 2 つの部分に分けるとき，小さい方の立体の体積 V を求めよ。

解答 $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

解説

底面の中心を原点 O に，直径を x 軸にとる。
図のように，座標が x $(-2\leqq x\leqq 2)$ である点 P を通り，x 軸に垂直な平面で小さい方の立体を切ったときの切り口の三角形を △PQR とし，その面積を $S(x)$ とする。
△PQR は ∠PQR$=90°$，∠RPQ$=60°$，∠PRQ$=30°$ の直角三角形であるから　　QR$=\sqrt{3}$PQ



また　　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\mathrm{OQ}^2-\mathrm{OP}^2}=\sqrt{4-x^2}$

よって　　$S(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PQ}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)$

したがって　$V=\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(4-x^2)dx=\sqrt{3}\int_0^2(4-x^2)dx=\sqrt{3}\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

25 次の曲線や直線で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　(2) $y=x^2+3x-1$，$y=-x^2-x-1$

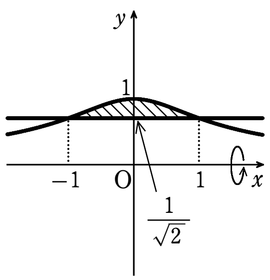
解答 (1) $\dfrac{\pi^2}{2}-\pi$　　(2) $\dfrac{32}{3}\pi$

解説

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　　$1+x^2=2$

よって　　$x=\pm 1$

図から



$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2dx$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-\pi$$

$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\ \longrightarrow\ 1$
θ	$0\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

よって　　$V=2\pi\cdot\dfrac{\pi}{4}-\pi=\dfrac{\pi^2}{2}-\pi$

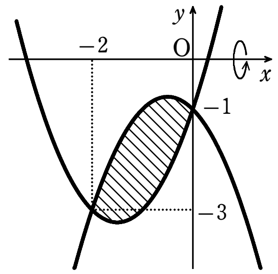
(2) $x^2+3x-1=-x^2-x-1$ から　　$2x(x+2)=0$

よって　　$x=-2,\ 0$

$x=-2$ のとき　　$y=-3$

$x=0$ のとき　　$y=-1$

右の図から



$$V=\pi\int_{-2}^{0}(x^2+3x-1)^2dx-\pi\int_{-2}^{0}(-x^2-x-1)^2dx$$

$$=\pi\int_{-2}^{0}(4x^3+4x^2-8x)dx$$

$$=\pi\left[x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{32}{3}\pi$$

26 次の曲線と直線で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y=\log(1+x)$，$x=0$，$y=2$　　　(2) $y=x^2$，$x+\sqrt{y}=2$，$x=0$

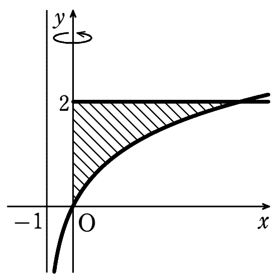
(3) $y=x^2-4x+5$，$y=2x$

解答 (1) $\dfrac{\pi}{2}(e^4-4e^2+7)$　　(2) $\dfrac{4}{3}\pi$　　(3) 64π

解説

(1) $y=\log(1+x)$ から　　$x=e^y-1$

図から　$V=\displaystyle\pi\int_0^2(e^y-1)^2dy$



$$=\pi\int_0^2(e^{2y}-2e^y+1)dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-2e^y+y\right]_0^2$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^4-4e^2+7)$$

(2) 曲線 $x+\sqrt{y}=2$ と直線 $x=0$ の交点の y 座標は　　$y=4$

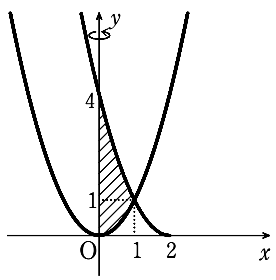
2 曲線 $y=x^2$，$x+\sqrt{y}=2$ の方程式から y を消去すると　　$(2-x)^2=x^2$

すなわち　　$4(1-x)=0$

よって，$x=1$ から　　$y=1$

ゆえに，交点の y 座標は　　$y=1$

図から　$V=\displaystyle\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^4(2-\sqrt{y})^2dy$



$$=\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^4(y-4\sqrt{y}+4)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1+\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}+4y\right]_1^4=\frac{4}{3}\pi$$

(3) $x^2-4x+5=2x$ から　　$x^2-6x+5=0$

よって　　$(x-1)(x-5)=0$

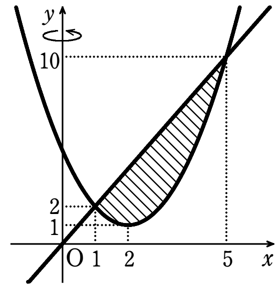
ゆえに　　$x=1,\ 5$

$x=1$ のとき　$y=2$

$x=5$ のとき　$y=10$

$y=x^2-4x+5$ から　　$x=2\pm\sqrt{y-1}$

図から



$$V=\pi\int_1^2\{(2+\sqrt{y-1})^2-(2-\sqrt{y-1})^2\}dy$$

$$+\pi\int_2^{10}\left\{(2+\sqrt{y-1})^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2\right\}dy$$

$$=\pi\int_1^2 8\sqrt{y-1}\,dy+\pi\int_2^{10}\left(3+4\sqrt{y-1}+y-\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$=\pi\left[\frac{16}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2+\pi\left[3y+\frac{8}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\right]_2^{10}$$

$$=64\pi$$

27 曲線 $x=\tan\theta$，$y=\cos 2\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ と x 軸で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答 $\pi(4-\pi)$

解説

$x=\tan\theta$ から　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-1\ \longrightarrow\ 1$
θ	$-\dfrac{\pi}{4}\ \longrightarrow\ \dfrac{\pi}{4}$

$$V=\pi\int_{-1}^{1}y^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos^2\theta-4+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos 2\theta-2+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=\pi\Big[\sin 2\theta-2\theta+\tan\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\pi(4-\pi)$$

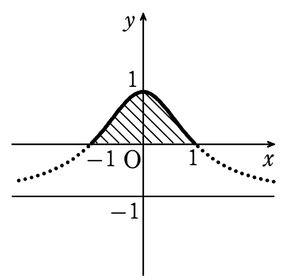
参考　$x=\tan\theta$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+x^2}$$

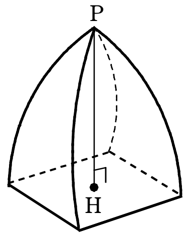
よって　　$y=\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$$=2\cdot\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

曲線は図の実線部分のようになる。



$\boxed{28}$ 右の図のような高さが PH＝10 cm の立体がある。底面に平行で頂点 P から x cm の距離にある平面でこの立体を切断すると，切り口は 1 辺 $\sqrt{x}$ cm の正方形になる。この立体の体積を求めよ。



解答　50 cm^3

解説

切り口の正方形の面積は　$(\sqrt{x})^2=x\ (\mathrm{cm}^2)$

よって，この立体の体積は

$$\int_0^{10} x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}=50\ (\mathrm{cm}^3)$$

$\boxed{29}$ 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2-4$　　(2)　$y=2\sqrt{x-1}$，$x=2$

(3)　$y=e^x+1$，$x=0$，$x=1$　　(4)　$y=\tan x$，$x=\frac{\pi}{4}$

解答　(1)　$\frac{512}{15}\pi$　　(2)　2π　　(3)　$\left(\frac{e^2}{2}+2e-\frac{3}{2}\right)\pi$　　(4)　$\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

解説

(1)　$x^2-4=0$ を解くと　$x=\pm2$

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(x^2-4)^2dx=2\pi\int_0^2(x^4-8x^2+16)dx$$

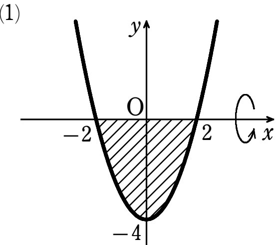
$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^2=\frac{512}{15}\pi$$

(2)　$2\sqrt{x-1}=0$ を解くと　$x=1$

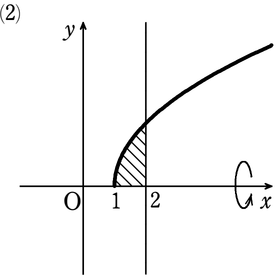
$$V=\pi\int_1^2(2\sqrt{x-1})^2dx=4\pi\int_1^2(x-1)dx$$

$$=4\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=2\pi$$

(1)



(2)



(3)　$V=\pi\int_0^1(e^x+1)^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}+2e^x+1)dx$

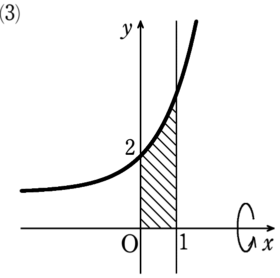
$$=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}+2e^x+x\right]_0^1=\pi\left\{\left(\frac{e^2}{2}+2e+1\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}+2e-\frac{3}{2}\right)\pi$$

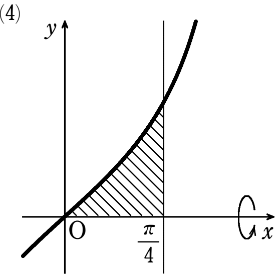
(4)　$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$

$$=\pi\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

(3)



(4)



$\boxed{30}$ 次の曲線と直線で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2-2$，x 軸　　(2)　$x=4-y^2$，y 軸

(3)　$y=\sqrt{2x}$，$y=2$，y 軸　　(4)　$y=\log x$，$y=1$，x 軸，y 軸

解答　(1)　2π　　(2)　$\frac{512}{15}\pi$　　(3)　$\frac{8}{5}\pi$　　(4)　$\frac{\pi(e^2-1)}{2}$

解説

(1)　曲線 $y=x^2-2$ と y 軸の共有点の y 座標は　$y=-2$

$$V=\pi\int_{-2}^{0}x^2dy=\pi\int_{-2}^{0}(y+2)dy=\pi\left[\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-2}^{0}=2\pi$$

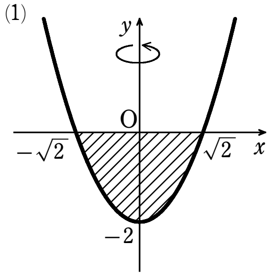
(2)　曲線 $x=4-y^2$ と y 軸の共有点の y 座標は　$y=\pm2$

$$V=\pi\int_{-2}^{2}x^2dy=\pi\int_{-2}^{2}(4-y^2)^2dy$$

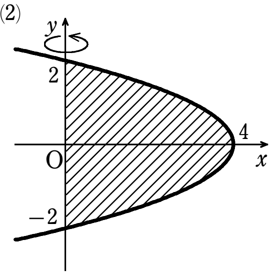
$$=2\pi\int_0^2(4-y^2)^2dy=2\pi\int_0^2(y^4-8y^2+16)dy$$

$$=2\pi\left[\frac{y^5}{5}-\frac{8}{3}y^3+16y\right]_0^2=\frac{512}{15}\pi$$

(1)



(2)



(3)　$y=\sqrt{2x}$ から　$y^2=2x$

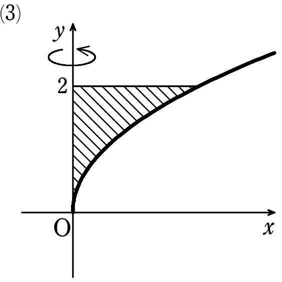
よって　$x=\frac{y^2}{2}$

$$V=\pi\int_0^2x^2dy=\pi\int_0^2\frac{y^4}{4}dy=\frac{\pi}{4}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{8}{5}\pi$$

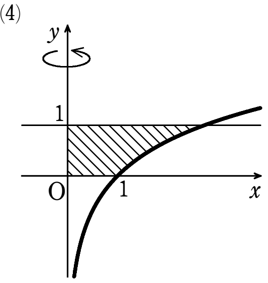
(4)　$y=\log x$ から　$x=e^y$

$$V=\pi\int_0^1x^2dy=\pi\int_0^1e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1=\frac{\pi(e^2-1)}{2}$$

(3)



(4)



$\boxed{31}$ 次の曲線と直線で囲まれた部分が，[　] 内の直線の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^3+x^2$，$y=0$　　[x 軸]

(2)　$y=\sqrt{x-1}$，$x=0$，$y=0$，$y=1$　　[y 軸]

(3)　$y=x\sqrt{x}$，$x=0$，$y=2$　　[y 軸]

解答　(1)　$\frac{\pi}{105}$　　(2)　$\frac{28}{15}\pi$　　(3)　$\frac{12\sqrt[3]{2}}{7}\pi$

解説

(1)　$x^3+x^2=0$ を解くと　$x=0,\ -1$

$$V=\pi\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{0}(x^6+2x^5+x^4)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^7}{7}+\frac{x^6}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{0}=\frac{\pi}{105}$$

(2)　$y=\sqrt{x-1}$ から　$y^2=x-1$

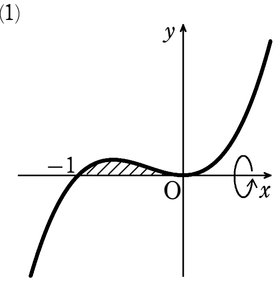
よって　$x=y^2+1$

$$V=\pi\int_0^1x^2dy=\pi\int_0^1(y^2+1)^2dy$$

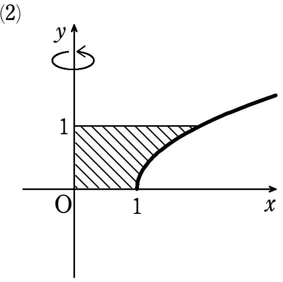
$$=\pi\int_0^1(y^4+2y^2+1)dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^5}{5}+\frac{2}{3}y^3+y\right]_0^1=\frac{28}{15}\pi$$

(1)



(2)

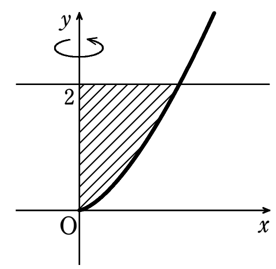


(3)　$y=x\sqrt{x}$ から　$y=x^{\frac{3}{2}}$

よって　$x=y^{\frac{2}{3}}$

$$V=\pi\int_0^2x^2dy=\pi\int_0^2y^{\frac{4}{3}}dy$$

$$=\pi\left[\frac{3}{7}y^{\frac{7}{3}}\right]_0^2=\frac{12\sqrt[3]{2}}{7}\pi$$



32 次の曲線や直線で囲まれた部分が，[ ]内の直線の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。ただし，a は正の定数とする。

(1) $y=\log x$，$x=0$，$y=0$，$y=-a$ [x 軸]

(2) $x^2+y^2-4y=0$ [x 軸]

(3) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ [x 軸]

(4) $y=\sqrt{x}\cos x$，$y=\sqrt{x}\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ [x 軸]

(5) $y=x^2-4x+3$，$y=3$ [y 軸]

解答 (1) $2(1-ae^{-a}-e^{-a})\pi$ (2) $16\pi^2$ (3) 24π (4) $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}$ (5) $\dfrac{128}{3}\pi$

解説

(1) $\log x=-a$ とすると $x=e^{-a}$

$$V=\pi\int_0^{e^{-a}}(-a)^2dx+\pi\int_{e^{-a}}^1(\log x)^2dx$$

$$=\pi a^2e^{-a}+\pi\int_{e^{-a}}^1(\log x)^2dx$$

ここで

$$\int_{e^{-a}}^1(\log x)^2dx=\int_{e^{-a}}^1(x)'(\log x)^2dx$$

$$=\Big[x(\log x)^2\Big]_{e^{-a}}^1-2\int_{e^{-a}}^1 x(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-a^2e^{-a}-2\int_{e^{-a}}^1\log x\,dx$$

$$=-a^2e^{-a}-2\Big[x\log x-x\Big]_{e^{-a}}^1$$

$$=-a^2e^{-a}-2(-1+ae^{-a}+e^{-a})$$

したがって

$$V=\pi a^2e^{-a}+\pi\{-a^2e^{-a}-2(-1+ae^{-a}+e^{-a})\}$$

$$=2(1-ae^{-a}-e^{-a})\pi$$

参考 $\pi\displaystyle\int_0^{e^{-a}}(-a)^2dx$ と計算した体積は，底面の半径が a，高さが e^{-a} の直円柱の体積である。

よって，積分の計算をせずに πa^2e^{-a} と求めてもよい。

(2) $x^2+y^2-4y=0$ から

$x^2+(y-2)^2=4$ ……①

これは点 $(0,\ 2)$ を中心とする半径2の円を表す。

① を y について解くと

$y=2\pm\sqrt{4-x^2}$

$2+\sqrt{4-x^2}\geqq 2-\sqrt{4-x^2}\geqq 0$ であるから，図より求める体積は

$$V=\pi\int_{-2}^2(2+\sqrt{4-x^2})^2dx-\pi\int_{-2}^2(2-\sqrt{4-x^2})^2dx$$

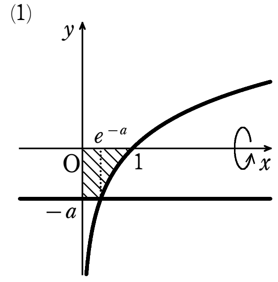
$$=\pi\int_{-2}^2\{(2+\sqrt{4-x^2})^2-(2-\sqrt{4-x^2})^2\}dx$$

$$=8\pi\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

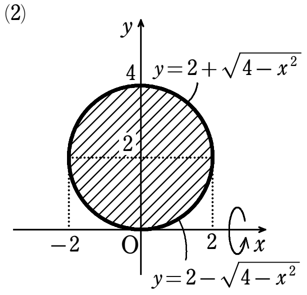
$\displaystyle\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ は半径2の円の面積の半分であるから

$$V=8\pi\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=16\pi^2$$

(1)



(2)



(3) 与えられた曲線は図のような楕円である。

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ から $y^2=9\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right)$

$$V=2\cdot\pi\int_0^2y^2dx=2\pi\int_0^2 9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$=18\pi\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_0^2=24\pi$$

(4) $\sqrt{x}\cos x=\sqrt{x}\sin x$ とすると

$\sqrt{x}(\cos x-\sin x)=0$ ……①

ゆえに $\sqrt{2x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で解くと $x=0$，$\dfrac{\pi}{4}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\sqrt{x}\cos x\geqq\sqrt{x}\sin x\geqq 0$ であるから，求める体積は

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{x}\cos x)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{x}\sin x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos^2x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\cos^2x-\sin^2x)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos 2x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx$$

$$=\pi\left(\left[x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{2}dx\right)$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{8}+\left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$$

参考 ① は次のように解いてもよい。

① から $\sqrt{x}=0$ または $\sin x=\cos x$

$\sqrt{x}=0$ のとき $x=0$

$\sin x=\cos x$ のとき，$\cos x\neq 0$ であるから

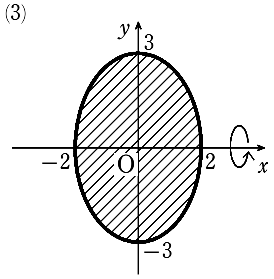
$\dfrac{\sin x}{\cos x}=1$

すなわち $\tan x=1$

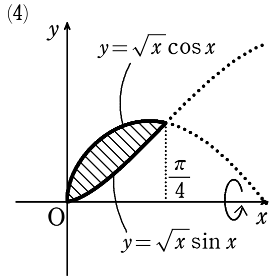
これを $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で解くと $x=\dfrac{\pi}{4}$

よって，① を満たす x の値は $x=0$，$\dfrac{\pi}{4}$

(3)



(4)



(5) $y=x^2-4x+3$ から

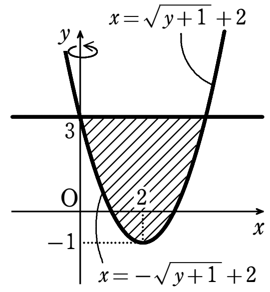
$y=(x-2)^2-1$ ……①

この放物線の頂点は 点 $(2,\ -1)$

① を x について解くと

$x=\pm\sqrt{y+1}+2$

$\sqrt{y+1}+2\geqq-\sqrt{y+1}+2$ であるから，図より求める体積は



$$V=\pi\int_{-1}^3(\sqrt{y+1}+2)^2dy-\pi\int_{-1}^3(-\sqrt{y+1}+2)^2dy$$

$$=\pi\int_{-1}^3(y+4\sqrt{y+1}+5)dy-\pi\int_{-1}^3(y-4\sqrt{y+1}+5)dy$$

$$=8\pi\int_{-1}^3\sqrt{y+1}\,dy=8\pi\left[\frac{2}{3}(y+1)\sqrt{y+1}\right]_{-1}^3=\frac{128}{3}\pi$$

33 次の曲線や直線で囲まれた部分が，[ ]内の直線の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y=2-x^2$，$y=-7$ [$y=-7$]

(2) $y=2\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$，$y=1$ [$y=1$]

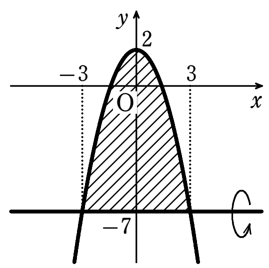
解答 (1) $\dfrac{1296}{5}\pi$ (2) $2\pi^2-3\sqrt{3}\pi$

解説

(1) $2-x^2=-7$ を解くと $x=\pm 3$

曲線 $y=2-x^2$ と直線 $y=-7$ を y 軸方向に7だけ平行移動すると，それぞれ $y=9-x^2$，$y=0$ (x 軸) に移る。

よって



$$V=\pi\int_{-3}^3(9-x^2)^2dx$$

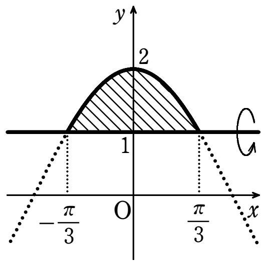
$$=\pi\int_{-3}^3(x^4-18x^2+81)dx$$

$$=2\pi\int_0^3(x^4-18x^2+81)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-6x^3+81x\right]_0^3=\frac{1296}{5}\pi$$

(2)　$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ において，$2\cos x = 1$ を解くと

$$x = -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}$$



曲線 $y = 2\cos x$ と直線 $y = 1$ を y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，それぞれ $y = 2\cos x - 1$，$y = 0$（x 軸）に移る。

したがって

$$V = \pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2 x - 4\cos x + 1) dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2 x - 4\cos x + 1) dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} - 4\cos x + 1\right) dx$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos 2x - 4\cos x + 3) dx$$

$$= 2\pi\Big[\sin 2x - 4\sin x + 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\pi^2 - 3\sqrt{3}\,\pi$$

$\boxed{34}$ 次の曲線で囲まれた部分が，[　] 内の直線の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。ただし，a，b は正の定数とする。

(1)　$x = a\cos\theta$，$y = b\sin\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$　　[x 軸]

(2)　$x = \cos^3\theta$，$y = \sin^3\theta$　$\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，$x = 0$，$y = 0$　[x 軸]

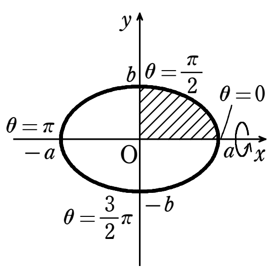
解答　(1)　$\frac{4}{3}\pi ab^2$　　(2)　$\frac{16}{105}\pi$

解説

(1)　この曲線は右の図のような楕円であり，x 軸，y 軸に関して対称である。

よって，$0 \leqq x \leqq a$，$y \geqq 0$ すなわち

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のときの曲線を，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求め，それを 2 倍すればよい。



$x = a\cos\theta$ から

$dx = -a\sin\theta\, d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow a$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

したがって

$$V = 2\pi\int_0^a y^2 dx = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (b\sin\theta)^2(-a\sin\theta)d\theta$$

$$= -2\pi ab^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta) d\theta$$

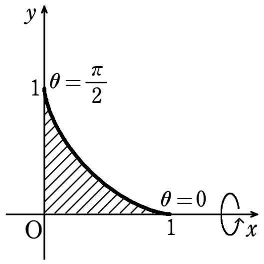
$$= 2\pi ab^2\Big[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$y = 0$ とすると

$\theta = 0$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$x = 0$ とすると

$\theta = \frac{\pi}{2}$



また，$y \geqq 0$ である。

$x = \cos^3\theta$ から

$dx = -3\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

したがって

$$V = \pi\int_0^1 y^2 dx$$

$$= \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6\theta(-3\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$= -3\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$

ここで，$\cos\theta = t$ とおくと，

$-\sin\theta\, d\theta = dt$

であるから

θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$V = 3\pi\int_0^1 (1-t^2)^3 t^2 dt$$

$$= 3\pi\int_0^1 (t^2 - 3t^4 + 3t^6 - t^8)dt$$

$$= 3\pi\Big[\frac{t^3}{3} - \frac{3}{5}t^5 + \frac{3}{7}t^7 - \frac{t^9}{9}\Big]_0^1 = \frac{16}{105}\pi$$

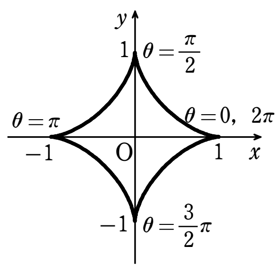
参考　曲線 $x = \cos^3\theta$，$y = \sin^3\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の概形は，図のようになる。

また，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より，

$(\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}} = 1$ であるから

θ を消去すると

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1$$



$\boxed{35}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分が，[　] 内の直線の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y = 2 - x^2$，$y = -x$　　[x 軸]

(2)　$y = \sin x$，$y = \cos x$　$\left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi\right)$　[x 軸]

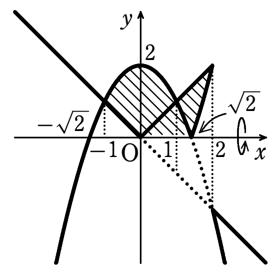
解答　(1)　$\frac{60+32\sqrt{2}}{15}\pi$　　(2)　$\frac{\pi(\pi+6)}{4}$

解説

(1)　$2 - x^2 = -x$ を解くと　　$x = -1,\ 2$

$2 - x^2 = x$ を $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で解くと　　$x = 1$

求める立体の体積は，図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積に等しいから



$$V = \pi\int_{-1}^1 (2-x^2)^2 dx + \pi\int_1^2 x^2 dx$$

$$- \pi\int_{-1}^0 (-x)^2 dx - \pi\int_{\sqrt{2}}^2 \{-(2-x^2)\}^2 dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4)dx + \pi\int_1^2 x^2 dx$$

$$- \pi\int_{-1}^0 x^2 dx - \pi\int_{\sqrt{2}}^2 (x^4 - 4x^2 + 4)dx$$

$$= 2\pi\Big[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 4x\Big]_0^1 + \pi\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^2$$

$$- \pi\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^0 - \pi\Big[\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 4x\Big]_{\sqrt{2}}^2$$

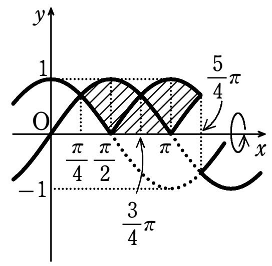
$$= \frac{60+32\sqrt{2}}{15}\pi$$

(2)　$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi$ の範囲で $\sin^2 x = \cos^2 x$ ……(＊) を解くと

$$x = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

求める立体の体積は，図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積に等しく，

斜線部分は直線 $x = \frac{3}{4}\pi$ に関して対称である。



したがって

$$V = 2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2 x\, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx\right)$$

$$= 2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx\right)$$

$$= \pi\left(\Big[x - \frac{\sin 2x}{2}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} - \Big[x + \frac{\sin 2x}{2}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \pi\left\{\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{\pi(\pi+6)}{4}$$

注意　(方程式(＊)について)

$\sin^2 x = \cos^2 x$ の解は，

$\sin x = \cos x$　または　$\sin x = -\cos x$

の解である。

参考　$\sin^2 x = \cos^2 x$ は次のように解けばよい。

$\sin^2 x = \cos^2 x$ のとき，$\cos^2 x \neq 0$ であるから

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

すなわち　　$\tan^2 x = 1$

よって　　$\tan x = \pm 1$

これを $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi$ の範囲で解くと

$$x = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$

$\sin^2 x = \cos^2 x$ を $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ すなわち $\cos 2x = 0$ と変形して解くこともできる。

$\boxed{36}$ 曲線 $y=\log x$，原点を通るこの曲線の接線，および x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

解答　$\pi\left(2-\dfrac{2}{3}e\right)$

解説

$y=\log x$ から　　$y'=\dfrac{1}{x}$

よって，曲線 $y=\log x$ 上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$$

すなわち　　$y=\dfrac{1}{t}x+\log t-1$　……①

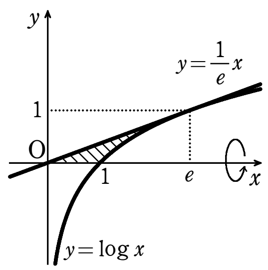
この直線が原点 $(0,\ 0)$ を通るとき

$$0=\log t-1$$

ゆえに　　$t=e$

よって，原点を通る接線の方程式は，① から

$$y=\frac{1}{e}x$$



接点の x 座標は e であるから

$$V=\pi\int_0^e\left(\frac{1}{e}x\right)^2dx-\pi\int_1^e(\log x)^2dx\quad\cdots\cdots②$$

ここで

$$\int_0^e\left(\frac{1}{e}x\right)^2dx=\frac{1}{e^2}\int_0^e x^2dx=\frac{1}{e^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^e=\frac{e}{3}$$

$$\int_1^e(\log x)^2dx=\int_1^e(x)'(\log x)^2dx$$

$$=\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e-2\int_1^e x(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=e-2\int_1^e\log x\,dx=e-2\Big[x\log x-x\Big]_1^e$$

$$=e-2$$

したがって，② から

$$V=\frac{\pi e}{3}-\pi(e-2)=\pi\left(2-\frac{2}{3}e\right)$$

参考　$\pi\displaystyle\int_0^e\left(\frac{1}{e}x\right)^2dx$ と計算した体積は，底面の半径が 1，高さが e の円錐の体積である。

よって，積分の計算をせずに $\dfrac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot e=\dfrac{\pi e}{3}$ と求めてもよい。

$\boxed{37}$ 曲線 $y=2\sqrt{\log x}$ と直線 $x=e$ および x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

解答　4π

解説

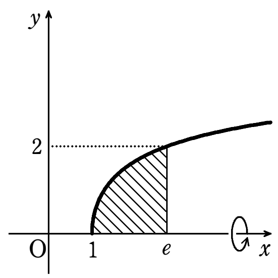
$2\sqrt{\log x}=0$ を解くと　　$x=1$

よって，求める体積は

$$V=\pi\int_1^e y^2dx=\pi\int_1^e(2\sqrt{\log x})^2dx$$

$$=4\pi\int_1^e\log x\,dx=4\pi\Big[x\log x-x\Big]_1^e$$

$$=4\pi$$



$\boxed{38}$ 放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=3x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

解答　132π

解説

$x^2-4=3x$ を解くと　　$x=-1,\ 4$

$-(x^2-4)=3x$ を $x>0$ の範囲で解くと　　$x=1$

回転体は，図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転すると得られる。

したがって，求める体積は

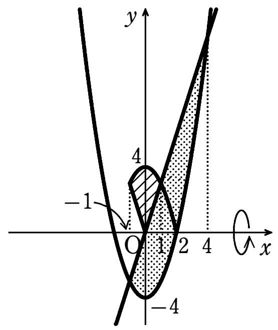
$$V=\pi\int_{-1}^1\{-(x^2-4)\}^2dx+\pi\int_1^4(3x)^2dx$$

$$-\pi\int_{-1}^0(-3x)^2dx-\pi\int_2^4(x^2-4)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^1+\pi\Big[3x^3\Big]_1^4$$

$$-\pi\Big[3x^3\Big]_{-1}^0-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_2^4$$

$$=\frac{406}{15}\pi+189\pi-3\pi-\frac{1216}{15}\pi=132\pi$$



$\boxed{39}$ 曲線 $x=\cos^3\theta$，$y=\cos^2\theta\sin\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

解答　$\dfrac{2}{21}\pi$

解説

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$y=0$ とすると　　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$

また，$y\geqq0$ である。

$x=\cos^3\theta$ から　　$dx=-3\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	0	$\longrightarrow$	1
θ	$\dfrac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0

したがって，求める体積は

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx$$

$$=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^4\theta\sin^2\theta(-3\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\sin^3\theta\,d\theta$$

$$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6\theta-\cos^8\theta)(\cos\theta)'d\theta$$

$$=-3\pi\left[\frac{\cos^7\theta}{7}-\frac{\cos^9\theta}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{21}\pi$$