面積クイズ(難)

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=x\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ の，原点 O 以外の点における接線のうち，O を通るものの方程式を求めよ。

(2) (1) において，接点 P が第 4 象限にあるとき，線分 OP と曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 (1) $y=x$，$y=-x$　(2) $\dfrac{9}{8}\pi^2-1$

解説

(1) $y'=\sin x+x\cos x$ であるから，接点の座標を $(a,\ a\sin a)$ $(a\neq 0)$ とすると，接線の方程式は

$$y-a\sin a=(\sin a+a\cos a)(x-a)$$

すなわち　$y=(\sin a+a\cos a)x-a^2\cos a$

これが原点 O を通るから　$a^2\cos a=0$

$a\neq 0$ であるから　$\cos a=0$

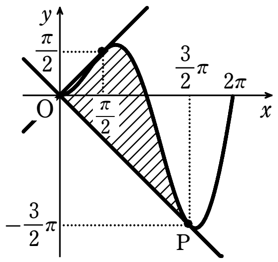
$0<a\leqq 2\pi$ であるから　$a=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

したがって，接線の方程式は

$a=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y=x$，　$a=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$y=-x$

(2) 接点が第 4 象限にあるのは，(1) において

$a=\dfrac{3}{2}\pi$ の場合である。



また，$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ で $x\sin x\geqq -x$ であるから，

求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{x\sin x-(-x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{x(-\cos x)'+x\}dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}+\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos x\,dx+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}+\frac{9}{8}\pi^2=\frac{9}{8}\pi^2-1$$

別解 $S=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(x\sin x+x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}x(-\cos x+x)'dx$

$$=\Big[x(-\cos x+x)\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}-\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(-\cos x+x)dx$$

$$=\frac{9}{4}\pi^2+\left[\sin x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{9}{8}\pi^2-1$$

$\boxed{2}$ 関数 $y=\log x$ のグラフ上の 2 点 A，B を結ぶ線分 AB の中点が，点 P(2，0) であるという。2 点 A，B の座標，および，曲線 $y=\log x$ と線分 AB で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，点 A の x 座標は点 B の x 座標より小さいものとする。

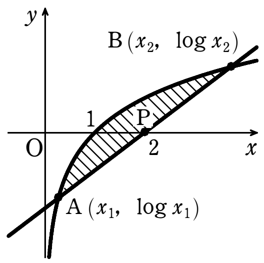
解答 A の座標 $(2-\sqrt{3},\ \log(2-\sqrt{3}))$，B の座標 $(2+\sqrt{3},\ \log(2+\sqrt{3}))$，
面積 $4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$

解説

A，B の座標を，それぞれ

$(x_1,\ \log x_1)$，$(x_2,\ \log x_2)$

とする。ただし，$0<x_1<x_2$ である。



線分 AB の中点が P(2，0) であることから

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2,\quad \frac{\log x_1+\log x_2}{2}=0$$

よって　$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=1$

解と係数の関係から，x_1 と x_2 は 2 次方程式

$t^2-4t+1=0$ の解である。

これを解くと　$t=2\pm\sqrt{3}$

$t>0$ であるから，この解は $x_1>0$，$x_2>0$ に適する。

よって，2 点 A，B の座標はそれぞれ

$(2-\sqrt{3},\ \log(2-\sqrt{3}))$，　$(2+\sqrt{3},\ \log(2+\sqrt{3}))$

点 P は直線 AB 上の点であるから，直線 AB の方程式は

$$y-0=\frac{\log(2+\sqrt{3})-0}{(2+\sqrt{3})-2}(x-2)$$

すなわち　$y=\dfrac{\log(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}(x-2)$

したがって，求める面積 S は

$$S=\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}\left\{\log x-\frac{\log(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}(x-2)\right\}dx$$

$$=\Big[x\log x\Big]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}-\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}dx-\frac{\log(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\Big[(x-2)^2\Big]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}$$

$$=(2+\sqrt{3})\log(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})\log(2-\sqrt{3})-\Big[x\Big]_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}-\frac{\log(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}(3-3)$$

$$=2\log(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})-2\log(2-\sqrt{3})+\sqrt{3}\log(2-\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$

$$=2\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$

$$=4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$

$\boxed{3}$ 曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，曲線 $y=k\sin\dfrac{x}{2}$ が 2 等分するとき， 定数 k の値を求めよ。[40 点]

解答 曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2$$

また，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=k\sin\dfrac{x}{2}$ の原点以外の交点の x 座標を α

$(0<\alpha<\pi)$ とすると，$\sin\alpha=k\sin\dfrac{\alpha}{2}$ であるから

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=k\sin\frac{\alpha}{2}$$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$ より　$k=2\cos\dfrac{\alpha}{2}$　…… ①

よって　$0<k<2$　…… ②

2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=k\sin\dfrac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_0^{\alpha}\left(\sin x-k\sin\frac{x}{2}\right)dx=\left[-\cos x+2k\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\alpha}$$

$$=1-2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2k\cos\frac{\alpha}{2}+1-2k$$

ここで ① を代入すると

$$S=1-\frac{k^2}{2}+k^2+1-2k=\frac{k^2}{2}-2k+2$$

条件から，$S=1$ より　$\dfrac{k^2}{2}-2k+2=1$　すなわち　$k^2-4k+2=0$

② から　$k=2-\sqrt{2}$

解説

曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2$$

また，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=k\sin\dfrac{x}{2}$ の原点以外の交点の x 座標を α $(0<\alpha<\pi)$ とすると，$\sin\alpha=k\sin\dfrac{\alpha}{2}$ であるから

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=k\sin\frac{\alpha}{2}$$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$ より　$k=2\cos\dfrac{\alpha}{2}$　…… ①

よって　$0<k<2$　…… ②

2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=k\sin\dfrac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_0^{\alpha}\left(\sin x-k\sin\frac{x}{2}\right)dx=\left[-\cos x+2k\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\alpha}$$

$$=1-2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2k\cos\frac{\alpha}{2}+1-2k$$

ここで ① を代入すると

$$S=1-\frac{k^2}{2}+k^2+1-2k=\frac{k^2}{2}-2k+2$$

条件から，$S=1$ より　$\dfrac{k^2}{2}-2k+2=1$　すなわち　$k^2-4k+2=0$

② から　$k=2-\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 直線 ℓ は曲線 $C_1:y=e^x$，$C_2:y=e^{2x}$ の両方に接する。このとき，ℓ と C_1，C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答 $\dfrac{3}{16}e-\dfrac{1}{2}$

解説

C_1，C_2 と ℓ との接点の座標を，それぞれ

$(s,\ e^s)$，$(t,\ e^{2t})$ とする。

このとき，ℓ の方程式は

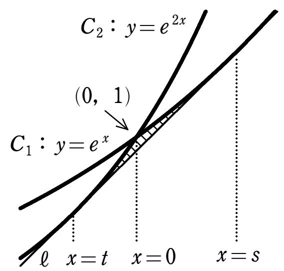
C_1 について　$y=e^s(x-s)+e^s$

C_2 について　$y=2e^{2t}(x-t)+e^{2t}$

この 2 つが同じ直線を表すから

$e^s=2e^{2t}$　…… ①

$e^s(1-s)=e^{2t}(1-2t)$　…… ②



① から　$s=\log 2+2t$　……③

① を用いて ② を変形すると　$2(1-s)=1-2t$　……④

③，④ を解いて　$s=1-\log 2=\log\frac{e}{2}$，　$t=\frac{1}{2}-\log 2=\log\frac{\sqrt{e}}{2}$

よって，ℓ の方程式は　$y=\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}\log 2$

曲線 C_1，C_2 は下に凸であるから，$t<x<s$ において接線 ℓ は曲線の下側にある。

ゆえに，求める面積は

$$\int_t^0 e^{2x}dx+\int_0^s e^x dx-\int_t^s\left(\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}\log 2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_t^0+\left[e^x\right]_0^s-\frac{e}{2}\left[\frac{x^2}{2}+x\log 2\right]_t^s$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{e}{4}\right)+\left(\frac{e}{2}-1\right)-\frac{e}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{(\log 2)^2}{2}-\frac{1}{8}+\frac{(\log 2)^2}{2}\right\}$$

$$=\frac{3}{16}e-\frac{1}{2}$$

5 曲線 $C：y=\frac{x}{2x^2+1}$ 上の点 $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$ における接線を ℓ とする。曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\frac{5}{18}-\frac{1}{4}\log 3$

解説

$y'=\frac{2x^2+1-x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2}$

接線 ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}(x-1)\quad すなわち\quad y=-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}$$

ここで　$-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}-\frac{x}{2x^2+1}=-\frac{(2x^2+1)(x-4)+9x}{9(2x^2+1)}$

$$=-\frac{2(x-1)^2(x-2)}{9(2x^2+1)}$$

$(x-1)^2(x-2)=0$ から，曲線 C と接線 ℓ の共有点の x 座標は　$x=1,\ 2$

また，$-\frac{2}{9(2x^2+1)}<0$ であるから，$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}\geqq\frac{x}{2x^2+1}$

すなわち，$1<x<2$ の範囲において，曲線 C は接線 ℓ の下側にある。

ゆえに，求める面積を S とすると

$$S=\int_1^2\left(-\frac{1}{9}x+\frac{4}{9}-\frac{x}{2x^2+1}\right)dx=\left[-\frac{x^2}{18}+\frac{4}{9}x-\frac{1}{4}\log(2x^2+1)\right]_1^2$$

$$=-\frac{2}{9}+\frac{8}{9}-\frac{1}{4}\log 9-\left(-\frac{1}{18}+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}\log 3\right)=\frac{5}{18}-\frac{1}{4}\log 3$$

6 曲線 $y=\log x$ が曲線 $y=ax^2$ と接するように定数 a の値を定めよ（ただし $a>0$）。
また，そのとき，これらの曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

解答　$a=\frac{1}{2e}$，面積は $\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$

解説

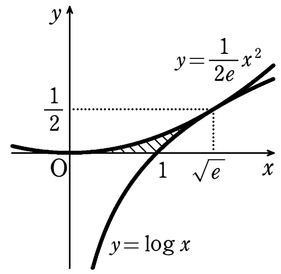
(前半)　$f(x)=\log x$，$g(x)=ax^2$ とすると　$f'(x)=\frac{1}{x}$，　$g'(x)=2ax$

接点の x 座標を c とすると　$\log c=ac^2$ かつ $\frac{1}{c}=2ac$

第 2 式から　$a=\frac{1}{2c^2}$　　第 1 式に代入して　$\log c=\frac{1}{2}$

よって　$c=\sqrt{e}$　　ゆえに　$a=\frac{1}{2e}$

(後半)　接点の座標は　$\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\right)$



囲まれる図形は，右の図のようになるから，求める面積は

$$\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{2e}x^2dx-\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx$$

$$=\frac{1}{6e}\left[x^3\right]_0^{\sqrt{e}}-\left[x\log x-x\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{e}-\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}+1\right)=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$$

7 次の曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

$$(x^2-2)^2+y^2=4$$

解答　$\frac{32}{3}$

解説

$(x^2-2)^2+y^2=4$ から　$y^2=x^2(4-x^2)$

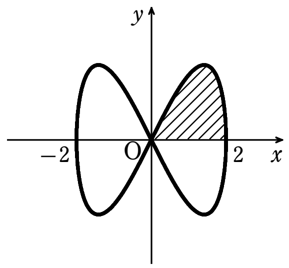
曲線の存在範囲は，$x^2(4-x^2)\geqq 0$ から　$-2\leqq x\leqq 2$

曲線は x 軸，y 軸，原点に関して対称であるから，$0\leqq x\leqq 2$，$y\geqq 0$ で考える。

このとき　$y=x\sqrt{4-x^2}$

$y=0$ のとき　$x=0,\ 2$

$0\leqq x\leqq 2$ において　$y\geqq 0$



よって，図の斜線部分の面積を S とすると

$$S=\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$\sqrt{4-x^2}=t$ とおくと　$4-x^2=t^2$

ゆえに　$-2xdx=2tdt$

よって　$xdx=-tdt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 2$
t	$2\longrightarrow 0$

ゆえに　$S=\int_2^0 t\cdot(-t)dt=\int_0^2 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$

したがって，求める面積は　$4S=\frac{32}{3}$

8 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$，x 軸，y 軸　　(2) $y^2=(x+3)x^2$　　(3) $2x^2-2xy+y^2=4$

解答　(1) $S=\frac{8}{3}$　　(2) $S=\frac{24\sqrt{3}}{5}$　　(3) $S=4\pi$

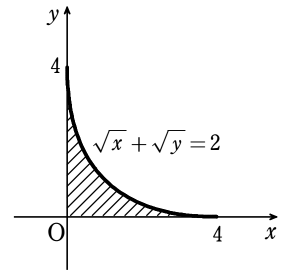
解説

(1)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ から

$y=(2-\sqrt{x})^2$ $(\geqq 0)$

また，$\sqrt{y}=2-\sqrt{x}\geqq 0$ から　$0\leqq x\leqq 4$

曲線の概形をかくと，右の図のようになる。



求める面積 S は

$$S=\int_0^4(2-\sqrt{x})^2dx=\int_0^4(4-4\sqrt{x}+x)dx$$

$$=\left[4x-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{8}{3}$$

(2)　曲線の式で $(x,\ y)$ を $(x,\ -y)$ におき換えても $y^2=(x+3)x^2$ は成り立つから，この曲線は x 軸に関して対称である。

曲線の存在範囲は，$y^2=(x+3)x^2\geqq 0$ から　$x\geqq -3$

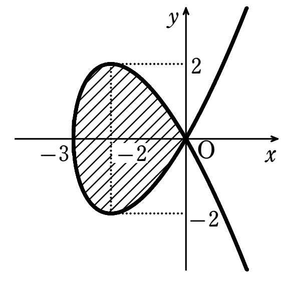
このとき　$y=\pm x\sqrt{x+3}$　……①

$f(x)=x\sqrt{x+3}$ とすると　$f'(x)=\sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}=\frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-2	↗



$y=f(x)$ に $y=-f(x)$ をつけ加えて，曲線 ① の概形は右の図のようになる。

曲線で囲まれた部分は x 軸に関して対称である。

よって，求める面積 S は　$S=2\int_{-3}^0(-x\sqrt{x+3})dx$

$\sqrt{x+3}=t$ とおくと　$x=t^2-3$，$dx=2t\,dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-3\longrightarrow 0$
t	$0\longrightarrow\sqrt{3}$

ゆえに　$S=2\int_0^{\sqrt{3}}(3-t^2)t\cdot 2t\,dt=4\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2-t^4)dt$

$$=4\left[t^3-\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{5}$$

(3)　$2x^2-2xy+y^2=4$ から

$y^2-2xy+2x^2-4=0$

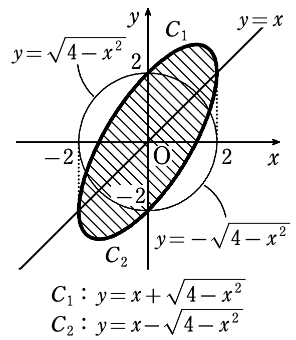
よって　$y=x\pm\sqrt{4-x^2}$ $(-2\leqq x\leqq 2)$

図から，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^2\{x+\sqrt{4-x^2}-(x-\sqrt{4-x^2})\}dx$$

$$=2\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=4\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=4\pi$$

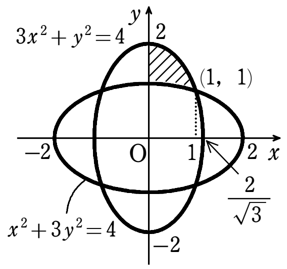


9 座標平面において，不等式 $x^2+3y^2\leqq 4$ の表す領域を A，不等式 $3x^2+y^2\leqq 4$ の表す領域を B とする。領域 A，B のどちらか一方のみに含まれる点 $(x,\ y)$ 全体の定める図形の面積を求めよ。

解答　$S=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

第1象限において，2曲線 $x^2+3y^2=4$，$3x^2+y^2=4$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，曲線 $x^2+3y^2=4$ と直線 $y=x$ の交点は2曲線の交点である。



$x^2+3y^2=4$，$y=x$，$x>0$，$y>0$

を解くと，交点の座標は　(1, 1)

$x^2+3y^2=4$，$y\geqq 0$ のとき　$y=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{3}}$

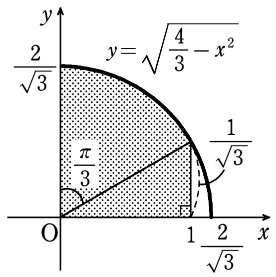
$3x^2+y^2=4$，$y\geqq 0$ のとき　$y=\sqrt{4-3x^2}$

ゆえに，図の斜線部分の面積を S とすると

$$S=\int_0^1\sqrt{4-3x^2}\,dx-\int_0^1\sqrt{\frac{4-x^2}{3}}\,dx$$

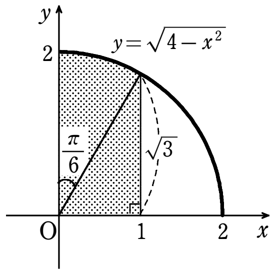
$$=\sqrt{3}\int_0^1\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}\,dx-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$$

ここで，右の図を利用すると



$$\int_0^1\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2}{9}\pi+\frac{\sqrt{3}}{6}$$



$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}$$

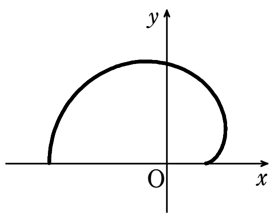
$$=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$S=\sqrt{3}\left(\dfrac{2}{9}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

問題の図形は，直線 $y=x$，x 軸，y 軸に関して対称であるから，求める面積は　$8S=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

10 媒介変数 t によって，$x=2\cos t-\cos 2t$，$y=2\sin t-\sin 2t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と表される右図の曲線と，x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



解答　$S=3\pi$

解説

$y=2\sin t(1-\cos t)$ であるから，$y=0$ とすると

$\sin t=0$　または　$\cos t=1$

$0\leqq t\leqq\pi$ であるから　$t=0$，π

また，$0\leqq t\leqq\pi$ において，$\sin t\geqq0$，$1-\cos t\geqq 0$ であるから

$y\geqq 0$

更に　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t+2\sin 2t=2\sin t(2\cos t-1)$

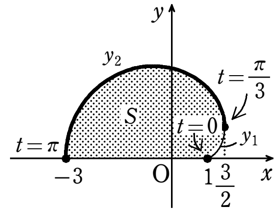
$0<t<\pi$ で $\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると，$\cos t=\dfrac{1}{2}$ から

$t=\dfrac{\pi}{3}$

よって，x の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	π
$\frac{dx}{dt}$		+	0	−	
x	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	−3

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{3}$ における y を y_1，$\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq\pi$ における y を y_2 とすると，求める面積 S は



$$S=\int_{-3}^{\frac{3}{2}}y_2dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_1dx$$

$$=\int_\pi^{\frac{\pi}{3}}y\frac{dx}{dt}dt-\int_0^{\frac{\pi}{3}}y\frac{dx}{dt}dt=\int_\pi^0 y\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_\pi^0(2\sin t-\sin 2t)(-2\sin t+2\sin 2t)dt$$

$$=2\int_0^\pi(2\sin^2 t-3\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)dt$$

$$=2\int_0^\pi\left(2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}-6\sin^2 t\cos t+\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$=2\left[\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\sin 2t-2\sin^3 t-\frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^\pi=3\pi$$

11 曲線 $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}\\ y=t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}\end{cases}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{4}$

解説

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}+t^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{3}{4}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\cdot(-1)=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-4t)$$

$0<t<1$ において $\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=\dfrac{1}{4}$

$x=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}$ の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{1}{4}$	…	1
$\frac{dx}{dt}$		+	0	−	
x	0	↗	極大	↘	0

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}+t^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\cdot(-1)$$

$$=\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}(3-4t)$$

$0<t<1$ において $\dfrac{dy}{dt}=0$ とすると　$t=\dfrac{3}{4}$

$y=t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}$ の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{3}{4}$	…	1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	−	
y	0	↗	極大	↘	0

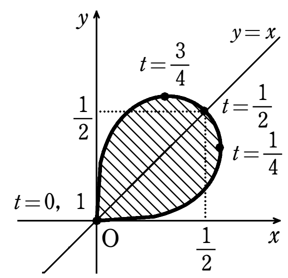
また，$y=x$ とすると　$t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}$

$0<t<1$ のとき，$t^{\frac{1}{4}}>0$，$(1-t)^{\frac{1}{4}}>0$ であるから

$t^{\frac{1}{2}}=(1-t)^{\frac{1}{2}}$

ゆえに　$t=\dfrac{1}{2}$

よって，曲線の概形は右の図のようになる。



求める面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}xdy-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}ydx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{dy}{dt}dt+\int_1^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{dx}{dt}dt-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(3-4t)dt+\frac{1}{4}\int_1^{\frac{1}{2}}(1-4t)dt-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[3t-2t^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\Big[t-2t^2\Big]_1^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

12 座標平面上の原点を O とし，点 A (1, 0) をとる。また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ に対して，第1象限の点 P を，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ と $\angle\mathrm{OPA}=\dfrac{\theta}{2}$ を満たすようにとる。

(1)　点 P の軌跡の極方程式が $r=1+2\cos\theta$ となることを示せ。

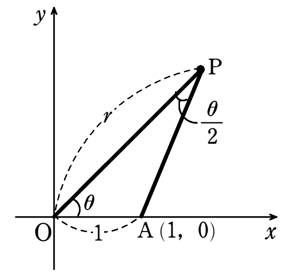
(2)　曲線 $r=1+2\cos\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1)　略　　(2)　$\dfrac{3}{4}\pi+2$

解説

(1)　原点 O を極，x 軸の正の部分を始線として，点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

△OAP において，正弦定理により



$$\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{r}{\sin\left(\pi-\frac{3}{2}\theta\right)}$$

よって　$r=\dfrac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{3\sin\frac{\theta}{2}-4\sin^3\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$$=3-4\sin^2\frac{\theta}{2}=3-4\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$=1+2\cos\theta$$

(2)　P$(x,\ y)$ とすると

$x=r\cos\theta=(1+2\cos\theta)\cos\theta$

$y=r\sin\theta=(1+2\cos\theta)\sin\theta$

$\theta=0$ のとき　$(x,\ y)=(3,\ 0)$，　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$(x,\ y)=(0,\ 1)$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において　$y\geqq0$

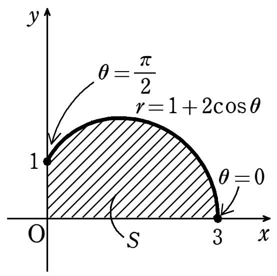
また　$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta\cdot\cos\theta-(1+2\cos\theta)\sin\theta=-\sin\theta(1+4\cos\theta)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{dx}{d\theta}<0$ であるから，θ に対して x は単調に減少する。

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 3$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

よって，求める面積を S とすると



$$S=\int_0^3 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1+2\cos\theta)\sin\theta\cdot(-\sin\theta)(1+4\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta+6\sin^2\theta\cos\theta+8\sin^2\theta\cos^2\theta)d\theta$$

ここで $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=\frac12\left[\theta-\frac12\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}6\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=2\Big[\sin^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta$$

$$=\left[\theta-\frac14\sin4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに　$S=\frac{\pi}{4}+2+\frac{\pi}{2}=\frac34\pi+2$

13 xy 平面において，原点 O を極とし，x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ に関して，極方程式 $r=1+\cos\theta$ によって表される曲線 C を考える。ただし，偏角 θ の動く範囲は $0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。

(1) 曲線 C 上の点で，y 座標が最大となる点 P_1，および x 座標が最小となる点 P_2 の極座標を求めよ。

(2) 上の (1) の点 P_1，P_2 に対して，2 つの線分 OP_1，OP_2 および曲線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　(1) 順に $\left(\frac32,\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\left(\frac12,\ \frac23\pi\right)$　(2) $S=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt3}{8}$

解説

(1) $y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta$ であるから

$$\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$$

$$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$$

$0<\theta<\pi$ において $\frac{dy}{d\theta}=0$ とすると　$\theta=\frac{\pi}{3}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ における yの増減表は右のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大	↘	0

よって，yは $\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大となる。

このとき，点 P_1 の極座標は

$$\left(\frac32,\ \frac{\pi}{3}\right)$$

$x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta$ であるから

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$$

$0<\theta<\pi$ において $\frac{dx}{d\theta}=0$ とすると　$\theta=\frac23\pi$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ における x の増減表は右のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac23\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	2	↘	極小	↗	0

よって，x は $\theta=\frac23\pi$ のとき最小となる。

このとき，点 P_2 の極座標は

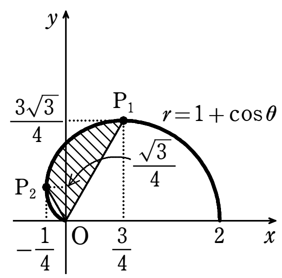
$$\left(\frac12,\ \frac23\pi\right)$$

(2) $\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき　$x=\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}=\frac34$

$$y=\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt3}{4}$$

$\theta=\frac23\pi$ のとき　$x=\left(1+\cos\frac23\pi\right)\cos\frac23\pi=-\frac14$

$$y=\left(1+\cos\frac23\pi\right)\sin\frac23\pi=\frac{\sqrt3}{4}$$



また，$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac23\pi$ において　$y>0$

(1) より，$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac23\pi$ のとき $\frac{dx}{d\theta}<0$ であるから，θ に対して x は単調に減少する。

x と θ の対応は右のようになる。

x	$-\frac14 \longrightarrow \frac34$
θ	$\frac23\pi \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-\frac14}^{\frac34}y\,dx-\frac12\cdot\frac34\cdot\frac{3\sqrt3}{4}-\frac12\cdot\frac14\cdot\frac{\sqrt3}{4}$$

$$=\int_{\frac23\pi}^{\frac{\pi}{3}}y\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{5}{16}\sqrt3$$

$$=\int_{\frac23\pi}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot(-\sin\theta)(2\cos\theta+1)d\theta-\frac{5\sqrt3}{16}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}(\sin^2\theta+3\sin^2\theta\cos\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta)d\theta-\frac{5\sqrt3}{16}$$

ここで　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=\frac12\left[\theta-\frac12\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}$

$$=\frac12\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt3}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}3\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin^3\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}=0$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}2\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac12\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac12\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}\frac{1-\cos4\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac14\left[\theta-\frac14\sin4\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}=\frac14\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt3}{4}\right)$$

ゆえに　$S=\frac12\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt3}{2}\right)+\frac14\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt3}{4}\right)-\frac{5\sqrt3}{16}$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt3}{8}$$

別解　$S=\displaystyle\frac12\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac12\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$

$$=\frac12\left[\frac32\theta+2\sin\theta+\frac14\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac23\pi}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt3}{8}$$

14 曲線 C：$(x+y)^2=x-y$ について，次のものを求めよ。

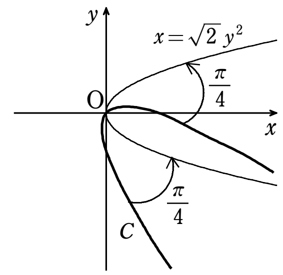
(1) 曲線 C を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させてできる曲線の方程式

(2) 曲線 C と直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積

解答　(1) $x=\sqrt2\,y^2$　(2) $\frac94$

解説

(1) 曲線 C 上の点 $(X,\ Y)$ を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点の座標を $(x,\ y)$ とする。



複素数平面上で，$P(X+Yi)$，$Q(x+yi)$ とすると，点 Q を原点を中心として $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点が P であるから

$$X+Yi=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(x+yi)$$

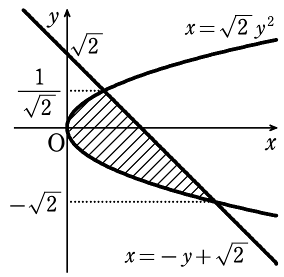
よって　$X=\frac{1}{\sqrt2}(x+y)$　……①，$Y=\frac{1}{\sqrt2}(-x+y)$

これらを $(X+Y)^2=X-Y$ に代入して　$(\sqrt2\,y)^2=\sqrt2\,x$

ゆえに，求める曲線の方程式は　$x=\sqrt2\,y^2$

(2) 直線 $x=1$ を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させてできる直線の方程式は，① を $X=1$ に代入して

$$x=-y+\sqrt2$$



曲線 $x=\sqrt2\,y^2$ と直線 $x=-y+\sqrt2$ の交点の y 座標は $\sqrt2\,y^2=-y+\sqrt2$ すなわち $\sqrt2\,y^2+y-\sqrt2=0$ の解である。これを解くと，

$(y+\sqrt2)(\sqrt2\,y-1)=0$ から　$y=-\sqrt2,\ \frac{1}{\sqrt2}$

よって，求める面積は

$$\int_{-\sqrt2}^{\frac{1}{\sqrt2}}(-y+\sqrt2-\sqrt2\,y^2)dy=-\sqrt2\int_{-\sqrt2}^{\frac{1}{\sqrt2}}(y+\sqrt2)\left(y-\frac{1}{\sqrt2}\right)dy$$

$$=-\sqrt2\left(-\frac16\right)\left\{\frac{1}{\sqrt2}-(-\sqrt2)\right\}^3=\frac94$$

15 $c\geqq1$ とする。2 つの曲線 $y=cx^2$ と $y=\log(1+x^2)$，および，2 つの直線 $x=1$ と $x=-1$ で囲まれる図形の面積が 4 となる c の値を求めよ。

解答　$c=3\log2+\frac32\pi$

解説

$x^2=t$ とおくと　$t\geqq0$

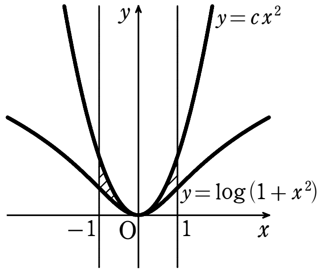
また，$f(t)=ct-\log(1+t)$ とすると，$t>0$ のとき　$f'(t)=c-\frac{1}{1+t}$

$c \geqq 1$，$t>0$ であるから　$f'(t)>0$

$f(0)=0$ であるから，$c \geqq 1$ のとき　$f(t) \geqq 0$

よって，常に $cx^2 \geqq \log(1+x^2)$ が成り立つ。

関数 $y=cx^2-\log(1+x^2)$ は偶関数であるから，
与えられた図形の面積を S とすると



$$S=\int_{-1}^{1}\{cx^2-\log(1+x^2)\}dx$$
$$=2\int_0^1\{cx^2-\log(1+x^2)\}dx$$
$$=2\left[\frac{c}{3}x^3\right]_0^1-2\Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1+2\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{2}{3}c-2\log 2+4\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$
$$=\frac{2}{3}c-2\log 2+4-4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

また，x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

ゆえに　$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

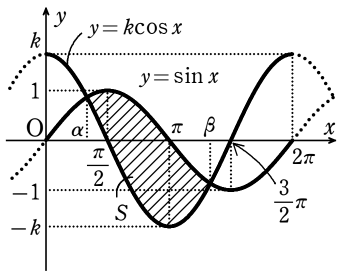
よって　$S=\dfrac{2}{3}c-2\log 2+4-\pi$

$S=4$ とおいて，c について解くと　$c=3\log 2+\dfrac{3}{2}\pi$　　これは $c \geqq 1$ を満たす。

16 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で2つの曲線 $y=\sin x$ と $y=k\cos x$ を考える。ただし，$k>0$ とする。この2つの曲線の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とし，この2つの曲線に囲まれた図形の面積を S とする。$S=4$ のとき，$\alpha \leqq x \leqq \theta$ の範囲でこの2つの曲線および直線 $x=\theta$ で囲まれた図形の面積が2となるような θ の値を求めよ。

解答　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

解説



$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，

$\sin x=k\cos x$　……①

とすると，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$ は①を満たさないから　$x \neq \dfrac{\pi}{2}$，$x \neq \dfrac{3}{2}\pi$

このとき，①から　$\dfrac{\sin x}{\cos x}=k$

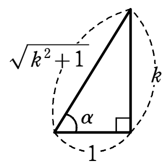
すなわち　$\tan x=k$

この方程式の解が $x=\alpha$，β であるから　$k=\tan\alpha$

$0 \leqq \alpha<\beta \leqq 2\pi$，$\tan\alpha=\tan\beta$ から　$\beta=\alpha+\pi$

上の図から　$S=\displaystyle\int_\alpha^\beta(\sin x-k\cos x)dx=\Big[-\cos x-k\sin x\Big]_\alpha^{\alpha+\pi}=2(\cos\alpha+k\sin\alpha)$

ここで，上の図から，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ である。



右の図から　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，$\sin\alpha=\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$

よって　$S=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}+k\cdot\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}\right)=2\sqrt{k^2+1}$

$S=4$ のとき　$2\sqrt{k^2+1}=4$

これを解くと　$k=\sqrt{3}$

ゆえに　$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

したがって　$\beta=\dfrac{4}{3}\pi$

このとき，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \theta$ の範囲において，2曲線 $y=\sin x$，$y=\sqrt{3}\cos x$ および 直線 $x=\theta$ で囲まれた図形の面積を T とすると，$T<4$ となるためには

$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{4}{3}\pi$　……② でなければならない。

②のとき　$T=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\theta}(\sin x-\sqrt{3}\cos x)dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\theta}2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx=\left[-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\theta}=2-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$T=2$ とすると　$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

②より，$0<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\pi$ であるから　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$

したがって　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$

17 a を $1 \leqq a \leqq e^2$ を満たす定数とする。関数 $y=|e^x-a|$ のグラフと x 軸，y 軸および直線 $x=2$ で囲まれる部分の面積の和を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　a が $1 \leqq a \leqq e^2$ の範囲を動くときの，面積 $S(a)$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　(1)　$S(a)=2a\log a-4a+e^2+1$

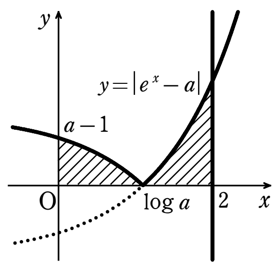
(2)　$a=e^2$ のとき最大値 e^2+1，$a=e$ のとき最小値 $(e-1)^2$

解説

(1)　$e^x-a=0$ とすると　$x=\log a$

$1 \leqq a \leqq e^2$ より $0 \leqq \log a \leqq 2$ であるから，

$y=|e^x-a|$ のグラフは右の図のようになる。



$$S(a)=\int_0^{\log a}(a-e^x)dx+\int_{\log a}^2(e^x-a)dx$$
$$=\Big[ax-e^x\Big]_0^{\log a}+\Big[e^x-ax\Big]_{\log a}^2$$
$$=(a\log a-a+1)+(e^2-2a-a+a\log a)$$
$$=2a\log a-4a+e^2+1$$

(2)　$S'(a)=2\log a+2-4=2(\log a-1)$

$S'(a)=0$ とすると　$a=e$

$1 \leqq a \leqq e^2$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	1	…	e	…	e^2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	e^2-3	↘	$(e-1)^2$	↗	e^2+1

よって，$S(a)$ は $a=e^2$ のとき最大値 e^2+1，

$a=e$ のとき最小値 $(e-1)^2$ をとる。

18 曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x \geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k$ を求めよ。

解答　$\dfrac{e^\pi}{2(e^\pi-1)}$

解説

曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x \geqq 0)$ と x 軸との交点の x 座標は，$e^{-x}\sin x=0$ から

$\sin x=0$

ゆえに　$x=n\pi$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

また　$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx$

$$=-e^{-x}\cos x-\left(e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\,dx\right)$$

よって　$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$　(C は積分定数)

整数 k に対して $2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ で $y \geqq 0$，$(2k+1)\pi \leqq x \leqq 2(k+1)\pi$ で $y \leqq 0$ であるから

$$S_k=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\cos x+\sin x)\Big]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}$$
$$=\frac{1}{2}\{e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}\}=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)(e^{-2\pi})^k$$

$|e^{-2\pi}|<1$ であるから，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}S_k$ は収束し

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k=\sum_{k=0}^{\infty}S_k=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi}}$$
$$=\frac{e^{-\pi}+1}{2(1+e^{-\pi})(1-e^{-\pi})}=\frac{e^\pi}{2(e^\pi-1)}$$

19 曲線 $y=e^{-x}$ と $y=e^{-x}|\cos x|$ で囲まれた図形のうち，$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ を満たす部分の面積を a_n とする ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)。

(1)　$\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}(p\sin x+q\cos x)+C$ を満たす定数 p，q を求めよ。ただし，C は積分定数である。

(2)　a_1 の値を求めよ。

(3)　a_n の値を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ を求めよ。

解答　(1)　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$a_1=\dfrac{1}{2}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)$

(3)　$a_n=\dfrac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)$　　(4)　$\dfrac{e^\pi-2e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2(e^\pi-1)}$

解説

(1)　$\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}(p\sin x+q\cos x)+C$

が成り立つための条件は

$e^{-x}\cos x=\{e^{-x}(p\sin x+q\cos x)\}'$　……①

が任意の実数 x について成り立つことである。

(①の右辺) $=-e^{-x}(p\sin x+q\cos x)+e^{-x}(p\cos x-q\sin x)$

$=e^{-x}\{(p-q)\cos x-(p+q)\sin x\}$

よって　$p-q=1$，$p+q=0$　これを解いて　$p=\frac{1}{2}$，$q=-\frac{1}{2}$

(2)　$0\leqq|\cos x|\leqq1$，$e^{-x}>0$ であるから　$e^{-x}\geqq e^{-x}|\cos x|$

よって　$a_1=\int_0^{\pi}(e^{-x}-e^{-x}|\cos x|)dx$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=1-e^{-\pi}-\frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)$$

(3)　$a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(e^{-x}-e^{-x}|\cos x|)dx$

$x=t+(n-1)\pi$ とおくと　$dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$(n-1)\pi \longrightarrow n\pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

よって　$a_n=\int_0^{\pi}[e^{-t-(n-1)\pi}-e^{-t-(n-1)\pi}|\cos\{t+(n-1)\pi\}|]dt$

$$=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}(e^{-t}-e^{-t}|\cos t|)dt=e^{-(n-1)\pi}a_1$$

$$=\frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)$$

(4)　(3) より，数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1，公比 $e^{-\pi}$ の等比数列であるから

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

$0<e^{-\pi}<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}e^{-n\pi}=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a_1}{1-e^{-\pi}}=\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}=\frac{e^{\pi}-2e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2(e^{\pi}-1)}$

20 座標平面上に2つの曲線を次のように定める。

$C_1: x=1-\cos\theta$，$y=\theta-\sin\theta$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$

$C_2: y=3k(x-a)^{\frac{2}{3}}$　$(x\geqq a)$

C_1，C_2 は点 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}-1\right)$ を共有し，その点で共通の接線をもつとする。

(1)　k，a の値を求めよ。

(2)　x 軸，C_1 および C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。

解答　(1)　$k=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$a=\frac{5-\pi}{3}$　(2)　$\frac{1}{20}(-2\pi^2+3\pi+12)$

解説

(1)　C_1 について　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

点 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}-1\right)$ は $\theta=\frac{\pi}{2}$ のときであるから，この点における接線の傾きは

$$\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=1$$

C_2 について，$y'=\frac{2k}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}$ から，点 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}-1\right)$ における接線の傾きは

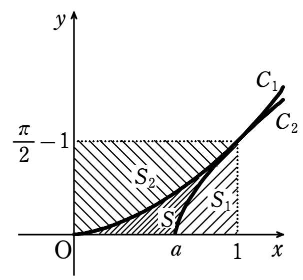
$\frac{2k}{(1-a)^{\frac{1}{3}}}=1$　すなわち　$2k=(1-a)^{\frac{1}{3}}$ ……①

また，C_2 は点 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}-1\right)$ を通るから　$\frac{\pi}{2}-1=3k(1-a)^{\frac{2}{3}}$ ……②

①，②より　$\frac{\pi}{2}-1=3\cdot\frac{1}{2}(1-a)$　よって　$a=\frac{5-\pi}{3}$

ゆえに，①から　$k=\frac{1}{2}\left(1-\frac{5-\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

(2)　S_1，S_2 を右の図のようにすると，求める面積 S は



$$S=1\times\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-S_1-S_2$$

ここで　$S_1=\int_a^1 3k(x-a)^{\frac{2}{3}}dx=\left[\frac{9k}{5}(x-a)^{\frac{5}{3}}\right]_a^1$

$$=\frac{9k}{5}(1-a)^{\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{(\pi-2)^2}{10}$$

また　$S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}-1}x\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\frac{dy}{d\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos\theta)^2d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}\pi-2$$

よって　$S=\frac{\pi}{2}-1-\frac{(\pi-2)^2}{10}-\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)$

$$=\frac{1}{20}(-2\pi^2+3\pi+12)$$

21 式 $x=\tan\theta$，$y=\frac{1}{\cos\theta}$　$\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ で表される xy 平面上の曲線 C を考える。定数 $t>0$ に対し，点 P$(t,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線 ℓ と曲線 C の交点を Q とする。曲線 C，x 軸，y 軸および直線 ℓ で囲まれた図形の面積を S_1 とし，△OPQ の面積を S_2 とする。

(1)　S_1，S_2 を t を用いて表せ。

(2)　極限 $\lim_{t\to\infty}\frac{S_1-S_2}{\log t}$ を求めよ。

解答　(1)　$S_1=\frac{1}{2}\{t\sqrt{1+t^2}+\log(\sqrt{1+t^2}+t)\}$，$S_2=\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}$　(2)　$\frac{1}{2}$

解説

(1)　$x=\tan\theta$，$y=\frac{1}{\cos\theta}$ から θ を消去すると　$y^2=1+x^2$

よって　$x^2-y^2=-1$

また，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき　$\tan\theta\geqq0$，$\cos\theta>0$

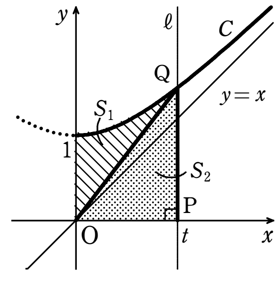
ゆえに　$x\geqq0$，$y>0$

よって，曲線 C は，双曲線の一部

$x^2-y^2=-1$ $(x\geqq0,\ y>0)$

である。

ゆえに，$\tan\alpha=t$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，右の図から



$$S_1=\int_0^t y\,dx=\int_0^{\alpha}y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

ここで　$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

よって　$S_1=\int_0^{\alpha}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}d\theta$$

$\sin\theta=u$ とおくと　$\cos\theta\,d\theta=du$

θ と u の対応は右のようになる。

θ	$0 \longrightarrow \alpha$
u	$0 \longrightarrow \sin\alpha$

$$S_1=\int_0^{\sin\alpha}\frac{du}{(1-u^2)^2}$$

$$=\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\right\}^2du$$

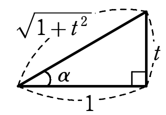
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{(1+u)^2}+\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)+\frac{1}{(1-u)^2}\right\}du$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{1+u}+\log(1+u)-\log(1-u)+\frac{1}{1-u}\right]_0^{\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{1+\sin\alpha}+1+\log(1+\sin\alpha)-\log(1-\sin\alpha)+\frac{1}{1-\sin\alpha}-1\right\}$$

ここで，$\tan\alpha=t$ であるから

$$\sin\alpha=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$



よって

S_1

$$=\frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}+\log\left(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)-\log\left(1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)+\frac{1}{1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{-\sqrt{1+t^2}(\sqrt{1+t^2}-t)+\log\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t}+\sqrt{1+t^2}(\sqrt{1+t^2}+t)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{t\sqrt{1+t^2}+\log(\sqrt{1+t^2}+t)\}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\tan\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{2(1-\sin^2\alpha)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t^2}{1+t^2}}=\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}$$

(2)　(1) の結果から　$S_1-S_2=\frac{1}{2}\log(\sqrt{1+t^2}+t)$

よって　$\lim_{t\to\infty}\frac{S_1-S_2}{\log t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\log(\sqrt{1+t^2}+t)}{\log t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{\log t+\log\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{t}}{\log t}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left\{1+\frac{\log\left(\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}+1\right)}{\log t}\right\}=\frac{1}{2}$$

22 曲線 $5x^2+2xy+y^2=16$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　8π

解説

$5x^2+2xy+y^2=16$ から　$y^2+2xy+5x^2-16=0$

これを y について解くと　$y=-x\pm2\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2\geqq0$ から，曲線は $-2\leqq x\leqq2$ の範囲にある。

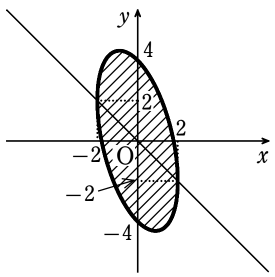
$$f(x)=-x+2\sqrt{4-x^2}$$
$$g(x)=-x-2\sqrt{4-x^2}$$

とすると，定義域内で　$f(x)\geqq g(x)$

よって

$$S=\int_{-2}^{2}\{(-x+2\sqrt{4-x^2})-(-x-2\sqrt{4-x^2})\}dx$$
$$=4\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ は，半径 2 の円の面積の $\frac{1}{2}$ を表すから　$S=4\cdot\pi\cdot2^2\cdot\frac{1}{2}=8\pi$



23 2 つの曲線 $y=x^2$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\frac{3}{2}$

解説

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ から　$\sqrt{y}=2-\sqrt{x}$

$x\geqq0$，$2-\sqrt{x}\geqq0$ であるから，この曲線が存在する範囲は　$0\leqq x\leqq4$

また，2 曲線の方程式から y を消去して

$$\sqrt{x}+\sqrt{x^2}=2$$

よって　$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)=0$

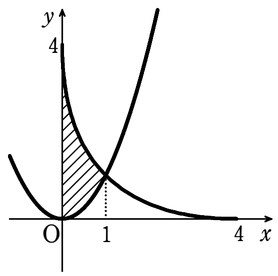
ゆえに，2 曲線の交点の x 座標は　$x=1$

$0\leqq x\leqq1$ では $x\leqq2-\sqrt{x}$ であるから

$$x^2\leqq(2-\sqrt{x})^2$$

よって，求める面積 S は　$S=\int_0^1\{(2-\sqrt{x})^2-x^2\}dx=\int_0^1(4-4\sqrt{x}+x-x^2)dx$

$$=\left[4x-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{3}{2}$$



24 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$x=1-t^4$，$y=t-t^3$　$(0\leqq t\leqq1)$

(2)　$x=t+\sin t$，$y=1-\cos t$　$(0\leqq t\leqq2\pi)$

解答　(1)　$\frac{8}{35}$　　(2)　π

解説

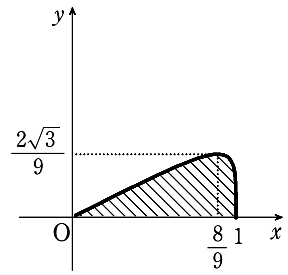
求める面積を S とする。

(1)　$x=1-t^4$ より　$dx=-4t^3dt$

x	$1\longrightarrow0$
t	$0\longrightarrow1$

$0\leqq t\leqq1$ のとき，$y\geqq0$ であるから

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_1^0(t-t^3)(-4t^3)dt$$
$$=4\int_0^1(t^4-t^6)dt=4\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7\right]_0^1=\frac{8}{35}$$

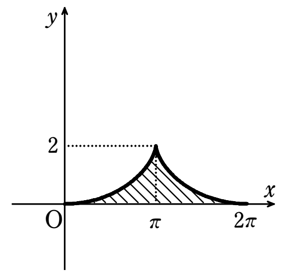


(2)　$x=t+\sin t$ より　$dx=(1+\cos t)dt$

x	$0\longrightarrow2\pi$
t	$0\longrightarrow2\pi$

$0\leqq t\leqq2\pi$ のとき，$y\geqq0$ であるから

$$S=\int_0^{2\pi}y\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)(1+\cos t)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(1-\cos^2t)dt=\int_0^{2\pi}\sin^2t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos2t)dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin2t\right]_0^{2\pi}$$
$$=\pi$$



25 曲線 $x=\cos^3\theta$，$y=\sin^3\theta$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\frac{3}{8}\pi$

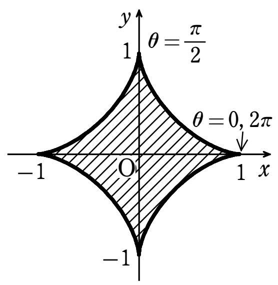
解説

$\cos\theta$，$\sin\theta$ はともに周期 2π の周期関数であるから，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲で考えればよい。

また　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

この曲線は x 軸と y 軸に関して対称で，概形は右図のようになる。

よって，求める面積を S とすると，S は第 1 象限の部分の面積の 4 倍である。



$x\geqq0$，$y\geqq0$ のとき

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$$

x	$0\longrightarrow1$
θ	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow0$

$x=\cos^3\theta$ から

$$dx=3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)d\theta$$

よって　$S=4\int_0^1 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^3\theta\cdot(-3\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta\quad\cdots\cdots①$$
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^2\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^22\theta}{4}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos4\theta}{8}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta-\cos4\theta+\cos4\theta\cos2\theta)d\theta$$
$$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\cos2\theta-\cos4\theta+\frac{1}{2}(\cos6\theta+\cos2\theta)\right\}d\theta$$
$$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\cos2\theta-\cos4\theta+\frac{1}{2}\cos6\theta\right)d\theta$$
$$=\frac{3}{4}\left[\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta-\frac{1}{4}\sin4\theta+\frac{1}{12}\sin6\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}\pi$$

別解　[① 以降の計算]

$$①=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)d\theta$$

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$，$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ を用いると

$$S=12(I_4-I_6)=12\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi$$

26 $1\leqq a\leqq e$ とする。曲線 $y=e^x-a$ と x 軸，y 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を求めよ。

(2)　$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答　(1)　$S(a)=2a\log a-3a+1+e$　　(2)　$a=\sqrt{e}$ で最小値 $1+e-2\sqrt{e}$

解説

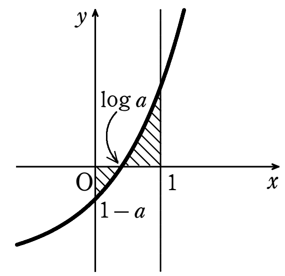
(1)　曲線 $y=e^x-a$ と x 軸の交点の x 座標は

$e^x-a=0$ より　$x=\log a$

また，$1\leqq a\leqq e$ より　$0\leqq\log a\leqq1$

よって　$S(a)=\int_0^{\log a}(a-e^x)dx+\int_{\log a}^1(e^x-a)dx$

$$=\left[ax-e^x\right]_0^{\log a}+\left[e^x-ax\right]_{\log a}^1$$
$$=2a\log a-3a+1+e$$



(2)　$S'(a)=2\log a-1$

$S'(a)=0$ とすると　$a=\sqrt{e}$

よって，$S(a)$ の増減表は右のようになる。

よって，$S(a)$ は $a=\sqrt{e}$ で最小値をとり，

その値は　$S(\sqrt{e})=1+e-2\sqrt{e}$

a	1	…	$\sqrt{e}$	…	e
$S'(a)$		−	0	+	
$S(a)$		↘	極小	↗	

27 x 軸に平行な直線と曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq3\pi)$ が 4 点で交わるとき，この直線と曲線で囲まれた 3 つの部分の面積の和が最小となるような直線の方程式を求めよ。

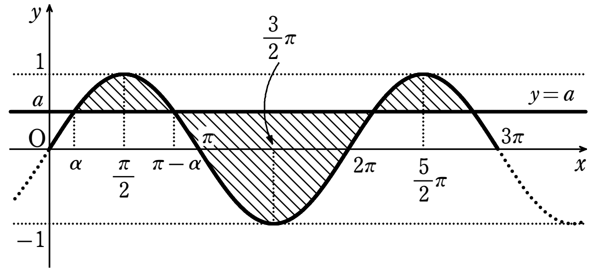
解答　$y=\frac{1}{2}$

解説

直線 $y=a$ が曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq3\pi)$ と 4 点で交わるのは $0\leqq a<1$ のときである。

最も左の交点の x 座標を α とすると　$a=\sin\alpha$，$0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$

また，他の 3 つの交点の x 座標は $\pi-\alpha$，$2\pi+\alpha$，$3\pi-\alpha$ である。



図形は直線 $x=\frac{3}{2}\pi$ に関して対称であるから，面積の和を S とすると

$$S=2\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}(\sin x-a)dx+2\int_{\pi-\alpha}^{\frac{3}{2}\pi}(a-\sin x)dx$$

$$=2\Big[-\cos x-ax\Big]_{\alpha}^{\pi-\alpha}+2\Big[ax+\cos x\Big]_{\pi-\alpha}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$=6\cos\alpha+(6\alpha-\pi)a=6\cos\alpha+(6\alpha-\pi)\sin\alpha \quad (a=\sin\alpha \text{ から})$$

また　$\frac{dS}{d\alpha}=(6\alpha-\pi)\cos\alpha$

$0\leqq\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\alpha>0$

よって，$\frac{dS}{d\alpha}=0$ とすると　$\alpha=\frac{\pi}{6}$

S の増減表は右のようになる。

よって，S は $\alpha=\frac{\pi}{6}$ で最小になる。

このとき　$a=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

したがって，求める直線の方程式は　$y=\frac{1}{2}$

α	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\alpha}$		−	0	+	
S		↘	極小	↗	

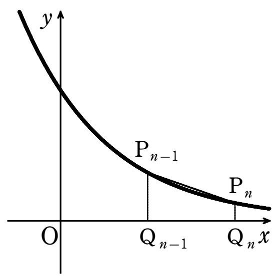
28 曲線 $y=e^{-x}$ 上で x 座標が n の点を P_n とし，線分 $P_{n-1}P_n$ と曲線 $y=e^{-x}$ で囲まれた部分の面積を S_n とするとき，次の無限級数の和を求めよ。

$$S=S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$$

解答　$\frac{3-e}{2(e-1)}$

解説

P_{n-1}，P_n から x 軸へ下ろした垂線を，それぞれ $P_{n-1}Q_{n-1}$，P_nQ_n とすると



$$S_n=(\text{台形 } P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1})-\int_{n-1}^{n}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-n+1}+e^{-n})\cdot1+\Big[e^{-x}\Big]_{n-1}^{n}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-n+1}+e^{-n})+(e^{-n}-e^{-n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(3e^{-n}-e^{-n+1})=\frac{3-e}{2e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$$

よって，S は初項 $\frac{3-e}{2e}$，公比 $\frac{1}{e}$ の無限等比級数の和であるから

$$S=\frac{3-e}{2e}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{e}}=\frac{3-e}{2(e-1)}$$

29 a を正の実数とする。2つの曲線 C_1：$y=ax^3$ $(x\geqq0)$，C_2：$y=x\log x$ $(x\geqq1)$ がある点 P を共有し，P におけるそれぞれの接線が一致している。

(1) 点 P の座標と a を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と C_2 は P 以外に共有点をもたないことを示せ。

(3) 曲線 C_1，C_2，および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　(1) $\mathrm{P}\left(\sqrt{e},\ \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$，$a=\frac{1}{2e}$　(2) 略　(3) $\frac{e}{8}-\frac{1}{4}$

解説

(1) $f(x)=ax^3$，$g(x)=x\log x$ とし，点 P の x 座標を $t\,(t\geqq1)$ とする。

このとき　$f'(x)=3ax^2$，$g'(x)=\log x+1$

点 P に関する条件から　$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} at^3=t\log t & \cdots\cdots ① \\ 3at^2=\log t+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①×3−②×t から　$0=2t\log t-t$

$t\geqq1$ であるから　$2\log t=1$

よって　$t=\sqrt{e}$

$g(\sqrt{e})=\frac{\sqrt{e}}{2}$ から，点 P の座標は　$\left(\sqrt{e},\ \frac{\sqrt{e}}{2}\right)$

また，① より　$a(\sqrt{e})^3=\frac{\sqrt{e}}{2}$

よって　$a=\frac{1}{2e}$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とすると，(1) から

$$h(x)=\frac{1}{2e}x^3-x\log x=\frac{1}{2e}x(x^2-2e\log x)$$

ここで，$k(x)=x^2-2e\log x$ とすると

$$k'(x)=2x-\frac{2e}{x}=\frac{2(x^2-e)}{x}$$

$x>1$ において $k'(x)=0$ とすると　$x=\sqrt{e}$

ゆえに，$x\geqq1$ における $k(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	…	$\sqrt{e}$	…
$k'(x)$		−	0	+
$k(x)$	1	↘	極小	↗

よって，$k(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で極小かつ最小で，$k(\sqrt{e})=0$ であるから，$x\geqq1$ で $k(x)\geqq0$ が成り立ち，$x=\sqrt{e}$ のときのみ $k(x)=0$ となる。

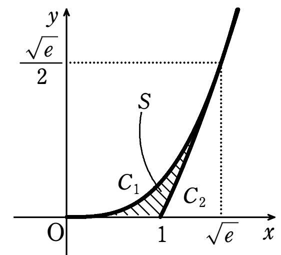
$x\geqq1$ において $\frac{1}{2e}x>0$ であるから，$h(x)$ も $x\geqq1$ で $h(x)\geqq0$ が成り立ち，$x=\sqrt{e}$ のときのみ $h(x)=0$ となる。

したがって，$1\leqq x<\sqrt{e}$，$\sqrt{e}<x$ で $f(x)>g(x)$ が成り立ち，2 曲線 C_1，C_2 は点 P 以外に共有点をもたない。

(3) $x\geqq1$ で　$g'(x)=\log x+1>0$

ゆえに，$x\geqq1$ で $g(x)$ は単調に増加する。

よって，2 曲線 C_1，C_2 の概形は右の図のようになり，求める面積 S は斜線部分の面積である。



したがって　$S=\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{2e}x^3dx-\int_1^{\sqrt{e}}x\log x\,dx$

ここで

$$\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{2e}x^3dx=\left[\frac{1}{8e}x^4\right]_0^{\sqrt{e}}=\frac{e}{8}$$

$$\int_1^{\sqrt{e}}x\log x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e}{4}-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{\sqrt{e}}=\frac{1}{4}$$

よって　$S=\frac{e}{8}-\frac{1}{4}$

30 媒介変数 t を用いて $x=t^2$，$y=t^3$ と表される曲線を C とする。ただし，t は実数全体を動くとする。また，実数 $a\,(a\neq0)$ に対して，点 $(a^2,\ a^3)$ における C の接線を ℓ_a とする。

(1) ℓ_a の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C の $0\leqq t\leqq1$ に対応する部分の長さを求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ_1 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(4) 曲線 C と直線 ℓ_1 で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

解答　(1) $y=\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}a^3$　(2) $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$　(3) $\frac{27}{320}$　(4) $\frac{27}{448}\pi$

解説

(1) $x=t^2$，$y=t^3$ から　$\frac{dx}{dt}=2t$，$\frac{dy}{dt}=3t^2$

よって，$t\neq0$ のとき　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2}{2t}=\frac{3}{2}t$

$x=a^2$，$y=a^3$ のとき　$t=a$

ゆえに，接線 ℓ_a の方程式は　$y-a^3=\frac{3}{2}a(x-a^2)$

すなわち　$y=\frac{3}{2}ax-\frac{1}{2}a^3$

(2) 求める長さを L とすると

$$L=\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{t^2(4+9t^2)}\,dt$$

$$=\int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{4+9t^2}\cdot\frac{1}{18}(4+9t^2)'dt$$

$$=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

(3) x，y の増減表は右のようになる。

t	…	0	…
$\frac{dx}{dt}$	−	0	+
x	←	0	→
$\frac{dy}{dt}$	+	0	+
y	↑	0	↑

また，接線 ℓ_1 の方程式は　$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$

これに $x=t^2$，$y=t^3$ を代入すると　$t^3=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}$

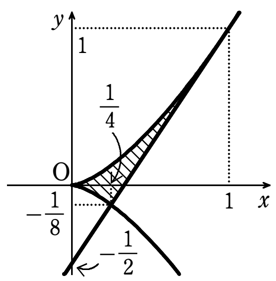
よって　$2t^3-3t^2+1=0$

すなわち　$(t-1)^2(2t+1)=0$

ゆえに　$t=1,\ -\frac{1}{2}$

したがって，曲線 C と直線 ℓ_1 の共有点の座標は　$(1,\ 1)$，$\left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{8}\right)$

よって，曲線 C と直線 ℓ_1 の位置関係は右の図のようになり，求める面積は図の斜線部分の面積である。



求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+1\right)\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}-\int_{-\frac{1}{8}}^{1}x\,dy$$

$$=\frac{45}{64}-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}t^2\cdot 3t^2dt$$

$$=\frac{45}{64}-\int_{-\frac{1}{2}}^{1}3t^4dt=\frac{45}{64}-\left[\frac{3}{5}t^5\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{45}{64}-\left\{\frac{3}{5}-\left(-\frac{3}{160}\right)\right\}=\frac{27}{320}$$

(4)　求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\left\{-\frac{1}{8}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}-\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{1}x^2\,dy$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{128}\right)-\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{1}t^4\cdot 3t^2dt=\frac{63}{128}\pi-\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{1}3t^6dt$$

$$=\frac{63}{128}\pi-\pi\left[\frac{3}{7}t^7\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{63}{128}\pi-\frac{3}{7}\pi\left\{1-\left(-\frac{1}{128}\right)\right\}$$

$$=\frac{27}{448}\pi$$

$\boxed{31}$ 次の2曲線で囲まれた部分の面積の和が，最小となるように定数 k の値を定めよ。ただし，$0\leqq k\leqq\pi$ とする。

$$y=x\sin x,\quad y=k\sin x\quad(0\leqq x\leqq\pi)$$

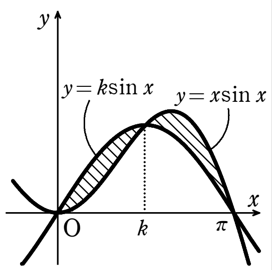
解答　$k=\dfrac{\pi}{2}$

解説

$0\leqq x\leqq k$ のとき　　$k\sin x\geqq x\sin x$

$k\leqq x\leqq\pi$ のとき　　$k\sin x\leqq x\sin x$

よって，2曲線で囲まれた部分の面積の和を S とすると



$$S=\int_0^k(k\sin x-x\sin x)dx$$
$$+\int_k^{\pi}(x\sin x-k\sin x)dx\quad\cdots\cdots ①$$

ここで

$$\int x\sin x\,dx=\int x(-\cos x)'dx$$
$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C$$

したがって，① から

$$S=\Big[-k\cos x+x\cos x-\sin x\Big]_0^k+\Big[-x\cos x+\sin x+k\cos x\Big]_k^{\pi}$$
$$=(-\sin k+k)+(\pi-k-\sin k)$$
$$=\pi-2\sin k$$

ゆえに，S を最小にする k の値は　　$k=\dfrac{\pi}{2}$