面積クイズ

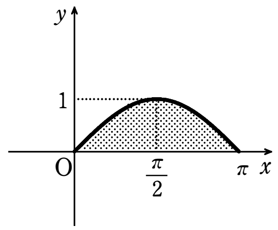
$\boxed{1}$ 曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　2

解説

$0\leqq x\leqq\pi$ で $y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=2$$



$\boxed{2}$ 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{1}{x^2}$，$x=1$，$x=2$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x}$，$x=1$，$x=e$

(3)　$y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$x=0$，$x=\pi$

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　1　　(3)　2

解説

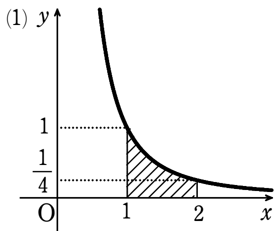
求める面積を S とする。

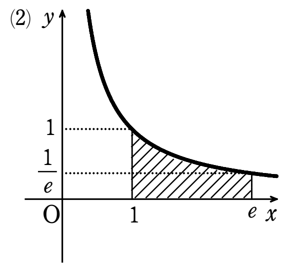
(1)　$1\leqq x\leqq 2$ で $\dfrac{1}{x^2}>0$ であるから

$$S=\int_1^2\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

(2)　$1\leqq x\leqq e$ で $\dfrac{1}{x}>0$ であるから

$$S=\int_1^e\frac{dx}{x}=\Big[\log|x|\Big]_1^e=\log e-\log 1=1$$



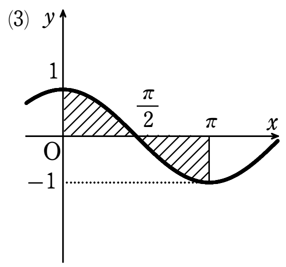


(3)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で $\cos x\geqq 0$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ で $\cos x\leqq 0$

よって　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\,dx$

$$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1-(-1)=2$$



別解　$y=\cos x$ のグラフは点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称であるから

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2(1-0)=2$$

$\boxed{3}$ 区間 $\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$2\sqrt{2}$

解説

2 つの曲線の交点の x 座標は，方程式

$\sin x=\cos x$

の解である。

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ の範囲においてこれを解くと

$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$

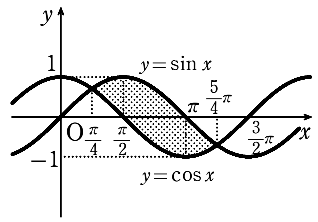
また，図からもわかるように，与えられた区間では

$\sin x\geqq\cos x$

であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}=2\sqrt{2}$$



$\boxed{4}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=x^3$，$y=\sqrt{x}$　　(2)　$xy=1$，$x+3y=4$

解答　(1)　$\dfrac{5}{12}$　　(2)　$\dfrac{4}{3}-\log 3$

解説

(1)　2 つの曲線の交点の x 座標は，方程式 $x^3=\sqrt{x}$ の解である。

両辺を 2 乗して整理すると　$x^6-x=0$

よって　$x(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$x\geqq 0$ であるから　$x=0$，1

また，図からもわかるように，$0\leqq x\leqq 1$ では $\sqrt{x}\geqq x^3$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^3)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{5}{12}$$

(2)　曲線と直線の交点の x 座標は，$xy=1$，$x+3y=4$ から y を消去した方程式

$x^2-4x+3=0$ の解である。

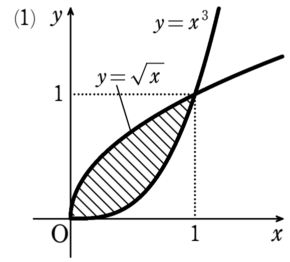
これを解くと　$x=1$，3

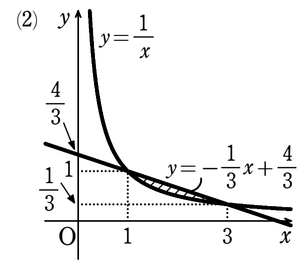
$xy=1$ を y について解くと，$x\neq 0$ から　$y=\dfrac{1}{x}$

$x+3y=4$ を y について解くと　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$

図からもわかるように，$1\leqq x\leqq 3$ では $-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}\geqq\dfrac{1}{x}$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[-\frac{x^2}{6}+\frac{4}{3}x-\log|x|\right]_1^3=\frac{4}{3}-\log 3$$





$\boxed{5}$ 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸，および直線 $y=1$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$e-1$

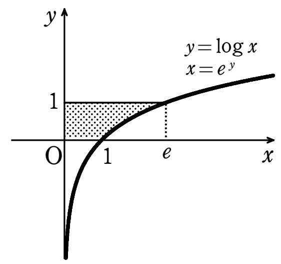
解説

$y=\log x$ を x について解くと

$x=e^y$

すべての y について $e^y>0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^1 e^y\,dy$$
$$=\Big[e^y\Big]_0^1=e-1$$



$\boxed{6}$ 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

$x=y^2-y$，$x=-2y+2$

解答　$\dfrac{9}{2}$

解説

曲線と直線の交点の y 座標は，$x=y^2-y$，$x=-2y+2$ から x を消去した方程式

$y^2+y-2=0$ の解である。

これを解くと　$y=-2$，1

また，$-2\leqq y\leqq 1$ では $y^2-y\leqq -2y+2$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^1\{(-2y+2)-(y^2-y)\}\,dy$$
$$=\int_{-2}^1(-y^2-y+2)\,dy=\left[-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-2}^1$$
$$=\frac{9}{2}$$

$\boxed{7}$ 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=\log(2x+1)$，$y=2$，y 軸　　(2)　$x=y^2$，$x=y+2$

解答　(1)　$\dfrac{e^2-3}{2}$　　(2)　$\dfrac{9}{2}$

解説

(1)　$y=\log(2x+1)$ から

$e^{y}=2x+1$

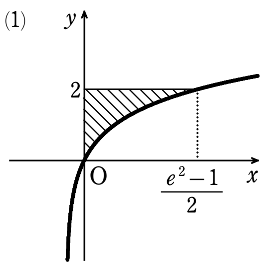
よって　$x=\frac{e^{y}-1}{2}$

$0\leqq y\leqq 2$ では $x\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^2\frac{e^{y}-1}{2}dy=\frac{1}{2}\Big[e^{y}-y\Big]_0^2$$

$$=\frac{e^2-3}{2}$$

(1)



(2)　曲線と直線の交点の y 座標は，$x=y^2$，$x=y+2$ から x を消去した方程式 $y^2-y-2=0$ の解である。

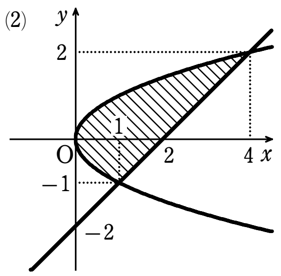
これを解くと　$y=-1,\ 2$

また，$-1\leqq y\leqq 2$ では $y^2\leqq y+2$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}dy$$

$$=\left[\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

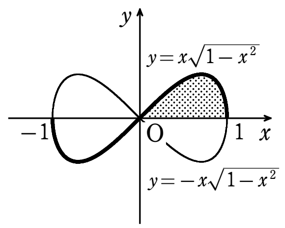
(2)



8　曲線 $y^2=x^2(1-x^2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この曲線は，x 軸および y 軸に関して対称であることを示せ。

(2)　この曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ。



解答　(1)　略　　(2)　$\frac{4}{3}$

解説

(1)　曲線 $y^2=x^2(1-x^2)$ 上の任意の点 P$(a,\ b)$ をとると，$b^2=a^2(1-a^2)$ が成り立つ。

P と x 軸に関して対称な点 Q$(a,\ -b)$ についても，$(-b)^2=a^2(1-a^2)$ が成り立ち，Q は曲線上にある。

よって，この曲線は，x 軸に関して対称である。

同様に，P と y 軸に関して対称な点 R$(-a,\ b)$ も，この曲線上の点となる。

よって，この曲線は，y 軸に関しても対称である。

(2)　曲線 $y^2=x^2(1-x^2)$ は，x 軸および y 軸に関して対称であるから，求める面積は図の斜線部分の面積の 4 倍である。

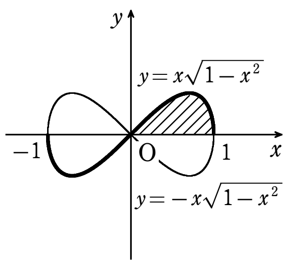
$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，曲線の方程式は

$y=x\sqrt{1-x^2}$

で表される。

よって，求める面積 S は

$$S=4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$



$1-x^2=t$ とおくと　$-2xdx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 0$

したがって

$$S=-2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot(-2x)dx$$

$$=-2\int_1^0\sqrt{t}\,dt=2\int_0^1\sqrt{t}\,dt=2\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

9　楕円 $x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta$　$(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　6π

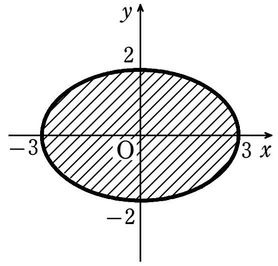
解説

この楕円を図示すると，右の図のようになり，図形は x 軸および y 軸に関して対称である。

よって，求める面積を S とすると

$S=4\int_0^3 ydx$　　ただし $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

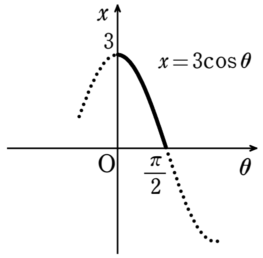
となる。



ここで，$x=3\cos\theta$ から　$dx=-3\sin\theta\,d\theta$

また，x と θ の対応は次のようにとれる。

x	$0\longrightarrow 3$
θ	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$



したがって

$$S=4\int_0^3 ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}2\sin\theta\cdot(-3\sin\theta)d\theta$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta\,d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=12\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=12\cdot\frac{\pi}{2}=6\pi$$

10　次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1)　$y=\frac{1}{x^2}$，$y=x$，$x=8y$

(2)　$y=\sin x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$，$y=\cos 2x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$，y 軸，$x=2\pi$

(3)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，x 軸，y 軸

解答　(1)　$\frac{3}{4}$　　(2)　$3\sqrt{3}$　　(3)　$\frac{1}{6}$

解説

(1)　$y=\frac{1}{x^2}$　……①，　$y=x$　……②，　$x=8y$　……③　とする。

①，②の交点の x 座標は $x=\frac{1}{x^2}$ から　$x^3=1$

よって　$x=1$（$x\neq 0$ で適する）

①，③の交点の x 座標は $\frac{x}{8}=\frac{1}{x^2}$ から　$x^3=8$

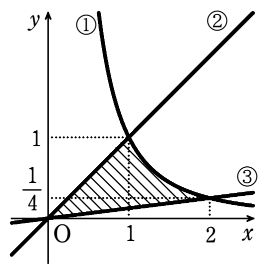
よって　$x=2$（$x\neq 0$ で適する）

②，③の交点の座標は　$(0,\ 0)$

グラフは図のようになり，求める面積 S は

$$S=\int_0^1 xdx+\int_1^2\frac{dx}{x^2}-\int_0^2\frac{x}{8}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2-\left[\frac{x^2}{16}\right]_0^2=\frac{3}{4}$$



(2)　2 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos 2x$ の共有点の x 座標は，方程式 $\sin x=\cos 2x$ の解である。

これを変形すると　$\sin x=1-2\sin^2 x$

整理すると　$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

ゆえに　$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

これを解いて　$\sin x=\frac{1}{2},\ -1$

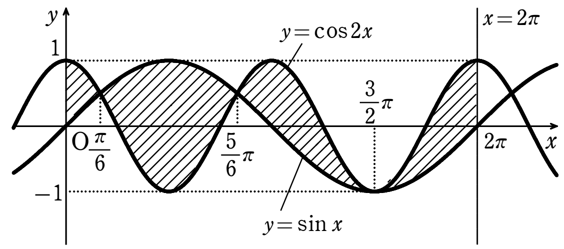
よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ では　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

グラフは図のようになり，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\sin x-\cos 2x)dx+\int_{\frac{5}{6}\pi}^{2\pi}(\cos 2x-\sin x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[-\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}+\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{2\pi}$$

$$=3\sqrt{3}$$



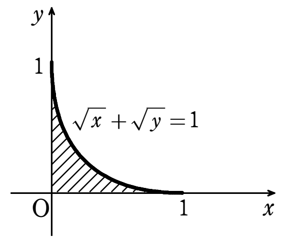
(3)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ から　$y=(1-\sqrt{x})^2$

また　$0\leqq x\leqq 1$

グラフは図のようになり，求める面積 S は

$$S=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2dx=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx$$

$$=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$



11　原点から曲線 $y=\log 2x$ へ引いた接線とこの曲線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\frac{e-2}{4}$

解説

$y=\log 2x$ を微分すると　$y'=\frac{1}{x}$

接点の座標を $(a,\ \log 2a)$ とすると，接線の方程式は

$y-\log 2a=\frac{1}{a}(x-a)$

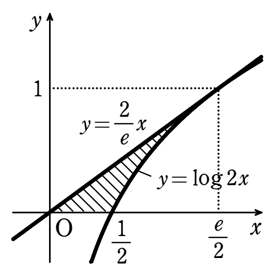
原点を通るから　$-\log 2a=-1$

これを解いて　$a=\frac{e}{2}$

よって，接線の方程式は　$y=\frac{2}{e}x$

接点の座標は　$\left(\frac{e}{2},\ 1\right)$

ゆえに，グラフは右の図のようになる。



$y=\log 2x$ は $2x=e^{y}$　すなわち　$x=\frac{1}{2}e^{y}$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^1\left(\frac{1}{2}e^{y}-\frac{e}{2}y\right)dy=\frac{1}{2}\left[e^{y}-\frac{e}{2}y^2\right]_0^1=\frac{e-2}{4}$$

12 曲線 $x=\cos t$，$y=\cos 2t$ $(0\leqq t\leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

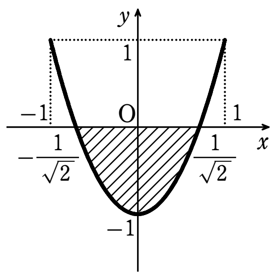
解説

$y=\cos 2t=2\cos^2 t-1=2x^2-1$

$0\leqq t\leqq \pi$ であるから　　$-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$

よって，求める面積 S は右の図の斜線部分の面積

であるから　　$S=-\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,dx$



ここで，$x=\cos t$ から　　$dx=-\sin t\,dt$

また，x と t の対応は次のようになる。

x	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
t	$\dfrac{3}{4}\pi \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

したがって

$$S=-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\cdot(-\sin t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}(\sin 3t-\sin t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3t+\cos t\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

別解　図から，求める面積 S は

$$S=-2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2x^2-1)\,dx=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-2x^2)\,dx=2\left[x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

13 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。[(1)(3) 各 10 点　(2)(4) 各 15 点]

(1)　$y=e^x$，x 軸，$x=0$，$x=3$

(2)　$y=\sin 2x\ \left(\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=\cos x\ \left(\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

(3)　$y^2=x$，$y=1$，$y=2$，y 軸

(4)　$y=\sqrt{x}$，$y=x-2$，$y=0$

解答　(1)　$0\leqq x\leqq 3$ で $y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

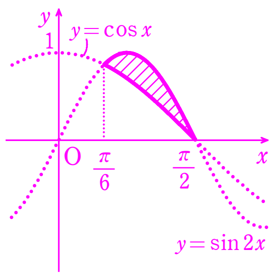
$$S=\int_0^3 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^3=e^3-1$$

(2)　2 つの曲線 $y=\sin 2x$，$y=\cos x$ の交点の x 座標は，方程式 $\sin 2x=\cos x$ の解である。

これを解くと　　$2\sin x\cos x=\cos x$

よって　　$\cos x(2\sin x-1)=0$

ゆえに　　$\cos x=0$，$\sin x=\dfrac{1}{2}$



$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ では $\sin 2x\geqq \cos x$ であるから，

求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$$

(3)　すべての y について $x>0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_1^2 y^2 dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2=\frac{7}{3}$$

(4)　曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x-2$ の交点の x 座標は，方程式 $\sqrt{x}=x-2$ の解である。

これを解くと　　$x=4$

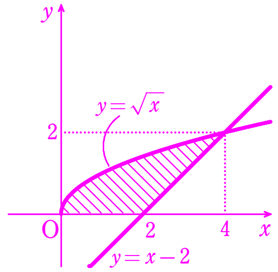
また，直線 $y=x-2$ と x 軸の交点の x 座標は

$x=2$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4-2$$

$$=\frac{10}{3}$$



解説

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ で $y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

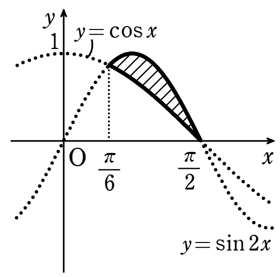
$$S=\int_0^3 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^3=e^3-1$$

(2)　2 つの曲線 $y=\sin 2x$，$y=\cos x$ の交点の x 座標は，方程式 $\sin 2x=\cos x$ の解である。

これを解くと　　$2\sin x\cos x=\cos x$

よって　　$\cos x(2\sin x-1)=0$

ゆえに　　$\cos x=0$，$\sin x=\dfrac{1}{2}$



$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}$ では $\sin 2x\geqq \cos x$ であるから，

求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}$$

(3)　すべての y について $x>0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_1^2 y^2 dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2=\frac{7}{3}$$

(4)　曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x-2$ の交点の x 座標は，方程式 $\sqrt{x}=x-2$ の解である。

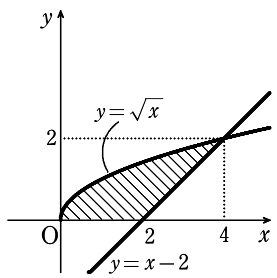
これを解くと　　$x=4$

また，直線 $y=x-2$ と x 軸の交点の x 座標は

$x=2$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4-2=\frac{10}{3}$$



14 原点から曲線 $y=2\log x$ へ引いた接線とこの曲線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。[25 点]

解答　$y'=\dfrac{2}{x}$ であるから，接点の座標を $(t,\ 2\log t)$

とすると，接線の方程式は

$$y-2\log t=\frac{2}{t}(x-t)$$

この直線が原点 $(0,\ 0)$ を通るから

$-2+2\log t=0$

よって，$\log t=1$ から　　$t=e$

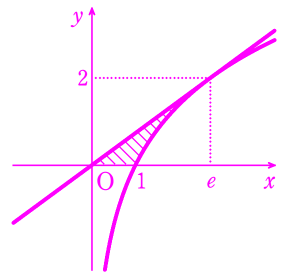
ゆえに，接線の方程式は　　$y=\dfrac{2}{e}x$

よって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\times e\times 2-\int_1^e 2\log x\,dx$$

$$=e-2\left(\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=e-2\left(e-\Big[x\Big]_1^e\right)=e-2$$



解説

$y'=\dfrac{2}{x}$ であるから，接点の座標を $(t,\ 2\log t)$

とすると，接線の方程式は

$$y-2\log t=\frac{2}{t}(x-t)$$

この直線が原点 $(0,\ 0)$ を通るから

$-2+2\log t=0$

よって，$\log t=1$ から　　$t=e$

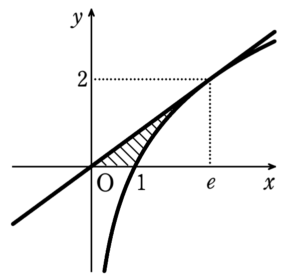
ゆえに，接線の方程式は　　$y=\dfrac{2}{e}x$

よって，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\times e\times 2-\int_1^e 2\log x\,dx$$

$$=e-2\left(\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=e-2\left(e-\Big[x\Big]_1^e\right)=e-2$$



15 曲線 $x=\sin t$，$y=\sin 2t$ $\left(0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。[20 点]

解答　$0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　　$y\geqq 0$

$x=\sin t$ から　　$dx=\cos t\,dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \rightarrow 1$
t	$0 \rightarrow \dfrac{\pi}{2}$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,dt=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)'\cos^2 t\,dt$$

$$=-2\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

解説

$0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　　$y\geqq 0$

$x=\sin t$ から　　$dx=\cos t\,dt$
また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0\ \to\ 1$
t	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$

よって，求める面積 S は

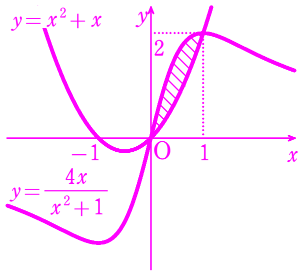
$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\,dt=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)'\cos^2 t\,dt$$

$$=-2\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

16 2つの曲線 $y=\frac{4x}{x^2+1}$，$y=x^2+x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。[35点]

解答 2つの曲線の交点の x 座標は，方程式 $\frac{4x}{x^2+1}=x^2+x$ の実数解である。



これを整理すると　　$x^4+x^3+x^2-3x=0$
因数分解して　　$x(x-1)(x^2+2x+3)=0$
ここで，$x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$ より，
交点の x 座標は　　$x=0,\ 1$
また，$0\leqq x\leqq 1$ では

$$x^2+x-\frac{4x}{x^2+1}=\frac{x(x-1)(x^2+2x+3)}{x^2+1}\leqq 0$$

よって　　$\frac{4x}{x^2+1}\geqq x^2+x$
したがって，求める面積 S は

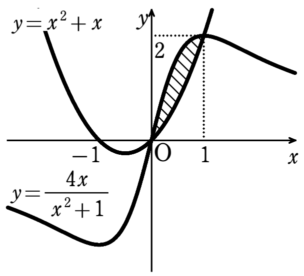
$$S=\int_0^1\left\{\frac{4x}{x^2+1}-(x^2+x)\right\}dx$$

$$=\left[2\log(x^2+1)-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=2\log 2-\frac{5}{6}$$

解説

2つの曲線の交点の x 座標は，方程式 $\frac{4x}{x^2+1}=x^2+x$ の実数解である。



これを整理すると　　$x^4+x^3+x^2-3x=0$
因数分解して　　$x(x-1)(x^2+2x+3)=0$
ここで，$x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$ より，
交点の x 座標は　　$x=0,\ 1$
また，$0\leqq x\leqq 1$ では

$$x^2+x-\frac{4x}{x^2+1}=\frac{x(x-1)(x^2+2x+3)}{x^2+1}\leqq 0$$

よって　　$\frac{4x}{x^2+1}\geqq x^2+x$
したがって，求める面積 S は

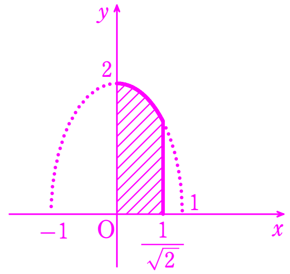
$$S=\int_0^1\left\{\frac{4x}{x^2+1}-(x^2+x)\right\}dx$$

$$=\left[2\log(x^2+1)-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=2\log 2-\frac{5}{6}$$

17 曲線 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}},\ y\geqq 0\right)$ と x 軸および直線 $x=0$，$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で囲まれた部分の面積を求めよ。[25点]

解答 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ を y について解くと



$y^2=4(1-x^2)$
$y\geqq 0$ であるから
$y=2\sqrt{1-x^2}$
ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$
また，x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\to\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

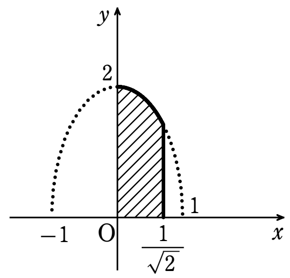
$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

よって　　$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

解説

$x^2+\frac{y^2}{4}=1$ を y について解くと



$y^2=4(1-x^2)$
$y\geqq 0$ であるから
$y=2\sqrt{1-x^2}$
ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$x=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$
また，x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\to\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

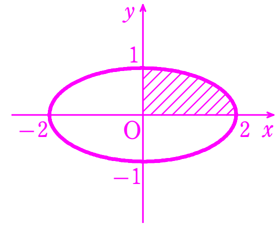
$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

よって　　$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

18 楕円 $x=2\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ によって囲まれた部分の面積を求めよ。[25点]

解答 求める面積 S は　　$S=4\int_0^2 y\,dx$



ここで，$x=2\cos\theta$ から
$dx=-2\sin\theta\,d\theta$
また，x と θ の対応は右のようになる。

よって　　$S=4\int_0^2 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin\theta(-2\sin\theta)\,d\theta$

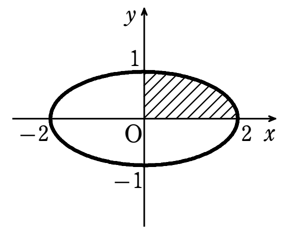
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=4\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$$

x	$0\to 2$
θ	$\frac{\pi}{2}\to 0$

解説

求める面積 S は　　$S=4\int_0^2 y\,dx$



ここで，$x=2\cos\theta$ から
$dx=-2\sin\theta\,d\theta$
また，x と θ の対応は右のようになる。

よって　　$S=4\int_0^2 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin\theta(-2\sin\theta)\,d\theta$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=4\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$$

x	$0\to 2$
θ	$\frac{\pi}{2}\to 0$

19 2つの曲線 $y=e^x$，$y=x\log x$ $(x>0)$ と，2直線 $x=1$，$x=e$ で囲まれた部分の面積を求めよ。[30点]

解答 $f(x)=e^x-x\log x$ $(x\geqq 1)$ とおくと

$$f'(x)=e^x-\log x-1,\quad f''(x)=e^x-\frac{1}{x}=\frac{xe^x-1}{x}$$

$x>1$ のとき，$xe^x>1$ であるから　　$f''(x)>0$
よって，$f'(x)$ は $x\geqq 1$ で単調に増加する。
ゆえに　　$f'(x)\geqq f'(1)=e-1>0$
よって，$f(x)$ は $x\geqq 1$ で単調に増加する。
ゆえに　　$f(x)\geqq f(1)=e>0$
よって，$x\geqq 1$ のとき　　$e^x>x\log x$
したがって，求める面積は

$$\int_1^e(e^x-x\log x)\,dx=\left[e^x\right]_1^e-\left\{\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}$$

$$=e^e-e-\frac{e^2}{2}+\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=e^e-e-\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}$$

解説

$f(x)=e^x-x\log x$ $(x\geqq 1)$ とおくと

$$f'(x)=e^x-\log x-1,\quad f''(x)=e^x-\frac{1}{x}=\frac{xe^x-1}{x}$$

$x>1$ のとき，$xe^x>1$ であるから　　$f''(x)>0$
よって，$f'(x)$ は $x\geqq 1$ で単調に増加する。
ゆえに　　$f'(x)\geqq f'(1)=e-1>0$
よって，$f(x)$ は $x\geqq 1$ で単調に増加する。
ゆえに　　$f(x)\geqq f(1)=e>0$

よって，$x \geqq 1$ のとき　　$e^x > x\log x$

したがって，求める面積は

$$\int_1^e (e^x - x\log x)\,dx = \Big[e^x\Big]_1^e - \left\{\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}$$

$$= e^e - e - \frac{e^2}{2} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = e^e - e - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

20 曲線 C：$y=\sin^2 2x$ について，次の問いに答えよ。[(1) 10 点　(2) 20 点]

(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{8},\ \frac{1}{2}\right)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　原点を O，ℓ と y 軸との交点を Q とする。C と ℓ および y 軸で囲まれた部分 OPQ の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$y=\frac{1-\cos 4x}{2}=-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}$ から　　$y'=2\sin 4x$

よって，接線 ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=2\sin\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=2x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

(2)　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{8}$ において　　$\sin^2 2x \geqq 2x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left\{\left(-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\right)-\left(2x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(-\frac{1}{2}\cos 4x-2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{8}\sin 4x-x^2+\frac{\pi}{4}x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi^2}{64}-\frac{1}{8}$$

解説

(1)　$y=\frac{1-\cos 4x}{2}=-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}$ から　　$y'=2\sin 4x$

よって，接線 ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}=2\sin\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{すなわち} \quad y=2x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

(2)　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{8}$ において　　$\sin^2 2x \geqq 2x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left\{\left(-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\right)-\left(2x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(-\frac{1}{2}\cos 4x-2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{8}\sin 4x-x^2+\frac{\pi}{4}x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi^2}{64}-\frac{1}{8}$$

21 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=\frac{1}{2x}$，x 軸，$x=1$，$x=2$

(2)　$y=e^x+1$，x 軸，$x=-2$，$x=3$

(3)　$y=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸

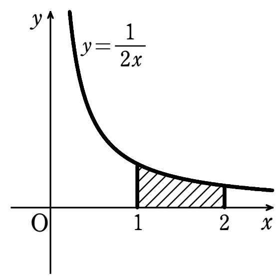
解答　(1)　$S=\frac{1}{2}\log 2$　　(2)　$S=e^3-e^{-2}+5$　　(3)　$S=\frac{\pi}{4}$

解説

(1)　$1 \leqq x \leqq 2$ において $y \geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_1^2 \frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\Big[\log x\Big]_1^2$$

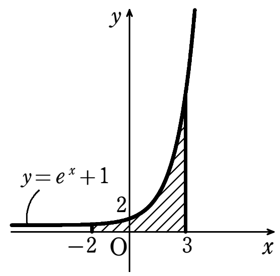
$$=\frac{1}{2}\log 2$$



(2)　$-2 \leqq x \leqq 3$ において $y \geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^3 (e^x+1)dx=\Big[e^x+x\Big]_{-2}^3$$

$$=e^3-e^{-2}+5$$



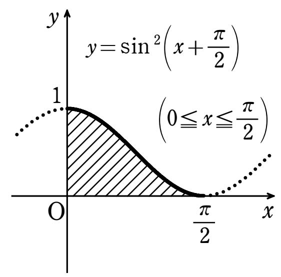
(3)　$y=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ は常に　　$y \geqq 0$

また　　$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$



22 (1)　$y=\frac{4-2x}{x+1}$ のグラフと x 軸，y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　関数 $y=(3-x)e^x$ が極大値をとる x の値を a とするとき，曲線 $y=(3-x)e^x$ と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1)　$6\log 3-4$　　(2)　e^3-2e^2

解説

(1)　$y=\frac{4-2(x+1)+2}{x+1}=\frac{6}{x+1}-2$

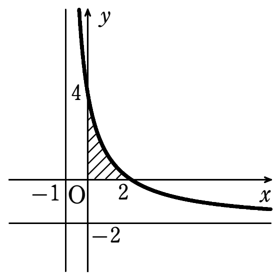
$x=0$ のとき　　$y=4$

$y=0$ のとき　　$x=2$

$0 \leqq x \leqq 2$ において，$y \geqq 0$ であるから，求める面積は

$$\int_0^2\left(\frac{6}{x+1}-2\right)dx=\Big[6\log(x+1)-2x\Big]_0^2$$

$$=6\log 3-4$$



(2)　$y'=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x$

$y'=0$ とすると　　$x=2$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$y=0$ とすると　　$x=3$

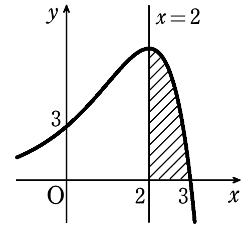
また　　$x \leqq 3$ のとき $y \geqq 0$，

$x \geqq 3$ のとき $y \leqq 0$

求める面積は

$$\int_2^3 (3-x)e^x dx=\Big[(3-x)e^x\Big]_2^3-\int_2^3(-1)e^x dx$$

$$=-e^2+\int_2^3 e^x dx=-e^2+\Big[e^x\Big]_2^3=e^3-2e^2$$



23 関数 $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{9-8\cos^2 x}}$ $(0<x<\pi)$ について，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=\frac{\pi}{6}$，$x=\frac{\pi}{3}$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

解答　$S=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$

解説

$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$ において

$$\sin 2x>0,\quad \sqrt{9-8\cos^2 x}>0$$

よって，$y>0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{\sqrt{9-8\cos^2 x}}dx$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{9-8\cos^2 x}}dx$$

$\sqrt{9-8\cos^2 x}=t$ とおくと　　$9-8\cos^2 x=t^2$

ゆえに　　$16\sin x\cos x\,dx=2t\,dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$
t	$\sqrt{3} \longrightarrow \sqrt{7}$

よって　　$S=2\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}}\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{8}dt=\frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}}dt$

$$=\frac{1}{4}\Big[t\Big]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$$

24 区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　$S=5$

解説

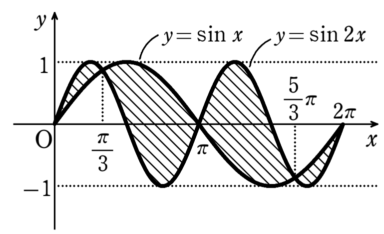
$\sin x=\sin 2x$ とすると　　$\sin x=2\sin x\cos x$

よって　　$\sin x(1-2\cos x)=0$

ゆえに　　$\sin x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ であるから

$$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi$$



また，2 曲線の位置関係は，右の図のようになり，面積を求める図形は点 $(\pi,\ 0)$ に関して

対称である。

よって　$\frac{1}{2}S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)-\left(-\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{2}$$

したがって　$S=5$

25 次の 2 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=\sqrt{3}\cos x$, $y=\sin 2x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

(2) $y=4\sin^2\frac{x}{2}$, $y=-2\cos 2x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $y=\log\frac{3}{4-x}$, $y=\log x$

(4) $y=xe^{-x}$, $y=2xe^{-2x}$

解答　(1) $\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$　(2) $2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$　(3) $4\log 3-4$　(4) $\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{8}$

解説

(1) $\sqrt{3}\cos x=\sin 2x$ とすると

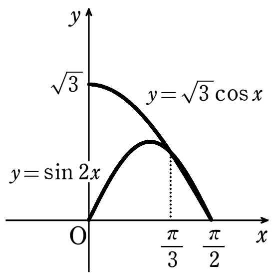
$\sqrt{3}\cos x=2\sin x\cos x$

よって　$\cos x(2\sin x-\sqrt{3})=0$

ゆえに　$\cos x=0$ または $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　$x=\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$

2 曲線の概形は右の図のようになる。



求める面積は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\sqrt{3}\cos x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sqrt{3}\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{-1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}-\sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$$

(2) $y=4\sin^2\frac{x}{2}=2(1-\cos x)$

$2(1-\cos x)=-2\cos 2x$ とすると

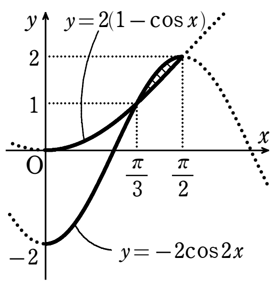
$1-\cos x=-(2\cos^2 x-1)$

よって　$\cos x(2\cos x-1)=0$

ゆえに　$\cos x=0$, $\frac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　$x=\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$

2 曲線の概形は右の図のようになる。



求める面積は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\{-2\cos 2x-2(1-\cos x)\}dx=\left[-\sin 2x-2x+2\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$$

(3) $y=\log\frac{3}{4-x}=\log 3-\log(4-x)$ の定義域は　$x<4$

また，$y=\log x$ の定義域は　$x>0$

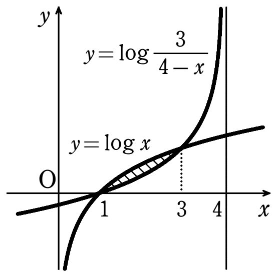
$\log\frac{3}{4-x}=\log x$ $(0<x<4)$ とすると　$\frac{3}{4-x}=x$

よって　$3=(4-x)x$

整理すると　$x^2-4x+3=0$

これを解くと　$x=1$, 3　($0<x<4$ を満たす)

2 曲線の概形は右の図のようになる。



求める面積は

$$\int_1^3\{\log x-\log 3+\log(4-x)\}dx$$

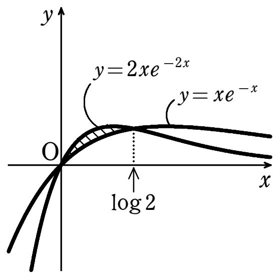
$$=\left[x\log x-x\right]_1^3-(\log 3)\left[x\right]_1^3+\left[(x-4)\log(4-x)-x\right]_1^3$$

$$=(3\log 3-2)-2\log 3+(3\log 3-2)=4\log 3-4$$

(4) $xe^{-x}=2xe^{-2x}$ とすると　$x(e^x-2)=0$

ゆえに　$x=0$, $\log 2$

2 曲線の概形は右の図のようになる。



求める面積は

$$\int_0^{\log 2}(2xe^{-2x}-xe^{-x})dx$$

$$=\left[x(-e^{-2x}+e^{-x})\right]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}(-e^{-2x}+e^{-x})dx$$

$$=\log 2(-e^{-2\log 2}+e^{-\log 2})-\left[\frac{e^{-2x}}{2}-e^{-x}\right]_0^{\log 2}$$

$$=\frac{\log 2}{4}-\left(\frac{e^{-2\log 2}}{2}-e^{-\log 2}\right)+\left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{8}$$

26 $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$, $g(x)=xf(x)$ とする。次のものを求めよ。

(1) $g(x)$ の最大値と最小値

(2) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積

解答　(1) $x=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$；$x=0$, 2 で最小値 0　(2) $\frac{2}{3}$

解説

(1) $f(x)$ の定義域は $2x-x^2\geqq 0$ から　$0\leqq x\leqq 2$

また，$g(x)$ の定義域は　$0\leqq x\leqq 2$

$g(x)=x(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$ から

$$g'(x)=(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}+x\cdot\frac{1}{2}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2-2x)$$

$$=\frac{x(3-2x)}{\sqrt{2x-x^2}}\quad(0<x<2)$$

$0<x<2$ において，$g'(x)=0$ とすると　$x=\frac{3}{2}$

$g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	極大	↘	

また　$g(0)=g(2)=0$

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(3-\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

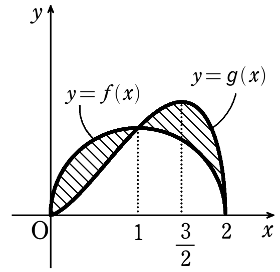
よって，$g(x)$ は $x=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=0$, 2 で最小値 0 をとる。

(2) $\sqrt{2x-x^2}=x\sqrt{2x-x^2}$ とすると

$(1-x)\sqrt{x(2-x)}=0$

ゆえに　$x=0$, 1, 2

よって，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の位置関係は右の図のようになる。



求める面積は

$$\int_0^1(\sqrt{2x-x^2}-x\sqrt{2x-x^2})dx$$

$$+\int_1^2(x\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{2x-x^2})dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}(2x-x^2)'(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx-\int_1^2\frac{1}{2}(2x-x^2)'(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\left[\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

27 曲線 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin 2t\end{cases}$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$S=\frac{4}{3}$

解説

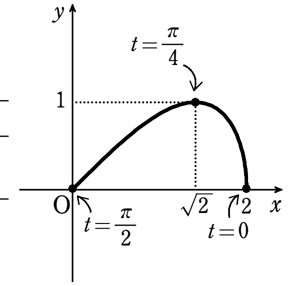
$t=0$ のとき　$(x,\ y)=(2,\ 0)$，　$t=\frac{\pi}{2}$ のとき　$(x,\ y)=(0,\ 0)$

$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ において　$y\geqq 0$　　また　$\frac{dx}{dt}=-2\sin t$

$0<t<\frac{\pi}{2}$ のとき，$\frac{dx}{dt}<0$ であるから，t に対して x は単調に減少する。

x と t の対応は右のようになる。

x	0	$\longrightarrow$	2
t	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0



よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^2 ydx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\cdot\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin 2t\cdot(-2\sin t)dt$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\,dt=4\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$$

28 曲線 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と x 軸および直線 $x=\pi$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

解答　$S=\frac{3}{2}\pi$

解説

$t=0$ のとき　$(x,\ y)=(0,\ 0)$

$t=\pi$ のとき　$(x,\ y)=(\pi,\ 2)$

$0\leqq t\leqq\pi$ において　$y\geqq 0$

また　$\frac{dx}{dt}=1-\cos t$

$0<t<\pi$ のとき，$\frac{dx}{dt}>0$ であるから，t に対して x は単調に増加する。

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \pi$
t	$0 \longrightarrow \pi$

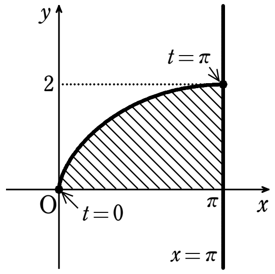
よって　$S=\int_0^{\pi} y\,dx=\int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt$

$=\int_0^{\pi}(1-\cos t)^2dt$

$=\int_0^{\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$

$=\int_0^{\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$

$=\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi$



29 次の曲線や直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=\frac{1}{x}$, $x=e$, $x=e^3$　(2) $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1$, $x=2$

(3) $y=\tan x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}\right)$, $x=\frac{\pi}{4}$　(4) $y=\log(x-1)$, $x=2$, $x=e+1$

(5) $y=e^x$, $x=0$, $x=1$

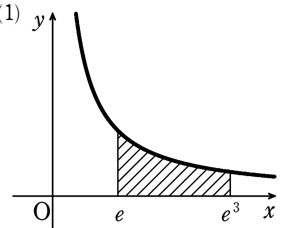
解答 (1) 2　(2) $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$　(3) $\frac{1}{2}\log 2$　(4) 1　(5) $e-1$

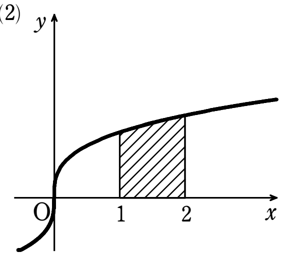
解説

求める面積を S とする。

(1) $e\leqq x\leqq e^3$ で $y\geqq 0$ であるから　$S=\int_e^{e^3}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_e^{e^3}=2$

(2) $1\leqq x\leqq 2$ で $y\geqq 0$ であるから　$S=\int_1^2\sqrt[3]{x}\,dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^2=\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$

(1)


(2)


(3) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ で $y\geqq 0$ であるから

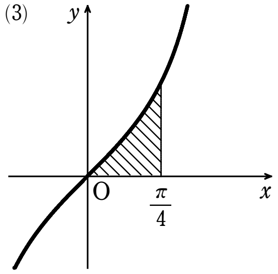
$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=-\Big[\log\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

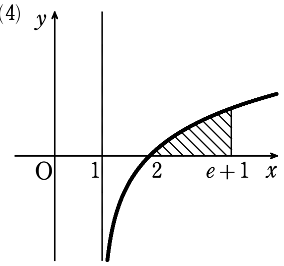
$=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$

(4) $2\leqq x\leqq e+1$ で $y\geqq 0$ であるから

$S=\int_2^{e+1}\log(x-1)dx=\Big[(x-1)\log(x-1)\Big]_2^{e+1}-\int_2^{e+1}(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}dx$

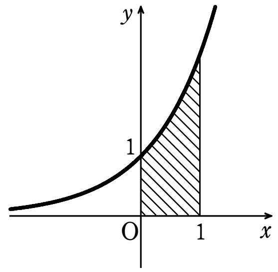
$=e-\Big[x\Big]_2^{e+1}=1$

(3)


(4)


(5) $0\leqq x\leqq 1$ で $y\geqq 0$ であるから

$S=\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$



30 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x}$, $y=x$　(2) $y^2=4x$, $x^2=4y$

(3) $y=\cos 2x$, $y=\sin 2x$ $\left(\frac{\pi}{8}\leqq x\leqq\frac{5}{8}\pi\right)$

解答 (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{16}{3}$　(3) $\sqrt{2}$

解説

求める面積を S とする。

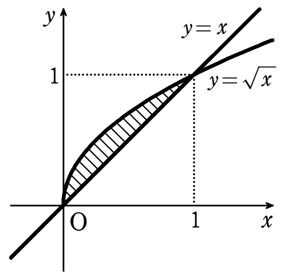
(1) $\sqrt{x}=x$ とすると　$x=x^2$

ゆえに　$x(x-1)=0$

よって　$x=0,\ 1$

ゆえに，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ は，2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$ で交わり，$0\leqq x\leqq 1$ では　$\sqrt{x}\geqq x$

よって　$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$



(2) $y^2=4x$, $x^2=4y$ から y を消去すると

$\left(\frac{x^2}{4}\right)^2=4x$

よって　$x^4=64x$

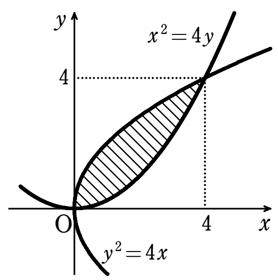
$x(x^3-64)=0$

ゆえに　$x=0,\ 4$

よって，2 曲線は，2 点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 4)$ で交わり，

$0\leqq x\leqq 4$ では　$2\sqrt{x}\geqq\frac{x^2}{4}$

よって　$S=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\frac{16}{3}$



(3) $\cos 2x=\sin 2x$ とすると　$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

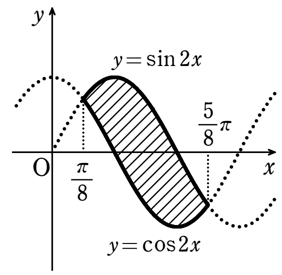
$\frac{\pi}{8}\leqq x\leqq\frac{5}{8}\pi$ から　$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi$

よって，2 曲線は，2 点 $\left(\frac{\pi}{8},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(\frac{5}{8}\pi,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

で交わり，$\frac{\pi}{8}\leqq x\leqq\frac{5}{8}\pi$ では　$\sin 2x\geqq\cos 2x$

よって　$S=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi}(\sin 2x-\cos 2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi}=\sqrt{2}$



31 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y^2=x$, $y=1$, $y=4$, y 軸　(2) $y^2=x-1$, $y=x-1$

(3) $x=\sin y$ $(0\leqq y\leqq\pi)$, y 軸　(4) $y=e^x$, $y=e$, y 軸

解答 (1) 21　(2) $\frac{1}{6}$　(3) 2　(4) 1

解説

求める面積を S とする。

(1) $1\leqq y\leqq 4$ のとき　$y^2\geqq 0$

$S=\int_1^4 y^2dy=\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^4=\frac{1}{3}(64-1)=21$

(2) $y^2=x-1$, $y=x-1$ から x を消去すると　$y^2+1=y+1$

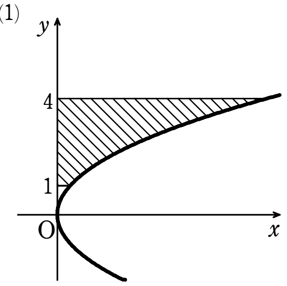
ゆえに　$y=0,\ 1$

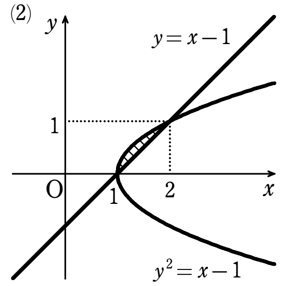
よって，2 曲線は，2 点 $(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ で交わり，$0\leqq y\leqq 1$ のとき　$y^2+1\leqq y+1$

$S=\int_0^1\{(y+1)-(y^2+1)\}dy=\int_0^1(y-y^2)dy=\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$

別解 [積分の計算]

$S=\int_0^1(y-y^2)dy=\int_0^1\{-y(y-1)\}dy=\frac{1}{6}(1-0)^3=\frac{1}{6}$

(1)


(2)


(3) $0\leqq y\leqq\pi$ のとき　$\sin y\geqq 0$

$S=\int_0^{\pi}\sin y\,dy=\Big[-\cos y\Big]_0^{\pi}=2$

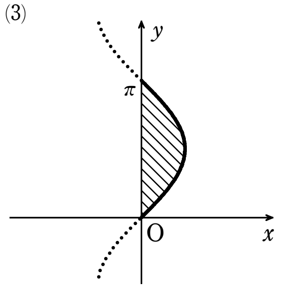
(4) $y=e^x$ から　$x=\log y$

曲線 $y=e^x$ と y 軸の交点の座標は $(0,\ 1)$ で，$1\leqq y\leqq e$ のとき　$\log y\geqq 0$

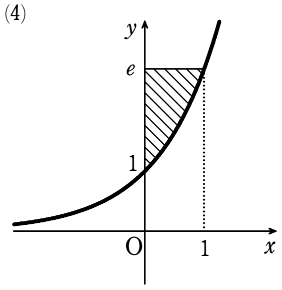
$S=\int_1^e\log y\,dy=\Big[y\log y-y\Big]_1^e=e-e-(-1)=1$

別解　$S=\int_0^1(e-e^x)dx=\Big[ex-e^x\Big]_0^1=1$

(3)



(4)



$\boxed{32}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y=xe^{1-x}$，$y=xe^{x-1}$ (2) $y=x^2$，$y=xe^{1-x}$

(3) $y=e^x$，$y=e^{3x}$，$y=e^{2-x}$ (4) $y=(x-e)\log x$，$y=0$

(5) $x^2=2\sqrt{2}\,y$，$y^2=2\sqrt{2}\,x$ (6) $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

解答 (1) $e-\dfrac{1}{e}-2$ (2) $e-\dfrac{7}{3}$ (3) $\dfrac{4}{3}e^{\frac{3}{2}}-2e+\dfrac{2}{3}$

(4) $-\dfrac{e^2}{4}+e-\dfrac{1}{4}$ (5) $\dfrac{8}{3}$ (6) $\dfrac{5}{2}$

解説

求める面積を S とする。

(1) $y=xe^{x-1}$，$y=xe^{1-x}$ から y を消去して $xe^{x-1}=xe^{1-x}$

ゆえに $x(e^{1-x}-e^{x-1})=0$

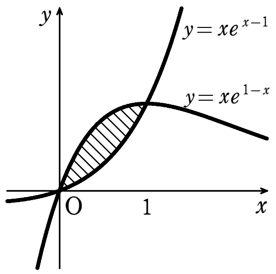
よって，2 つの曲線の交点の x 座標は $x=0$，1

また，$0\leqq x\leqq 1$ では $xe^{x-1}\leqq xe^{1-x}$

$$S=\int_0^1 x(e^{1-x}-e^{x-1})dx$$

$$=\Big[x(-e^{1-x}-e^{x-1})\Big]_0^1+\int_0^1(e^{1-x}+e^{x-1})dx$$

$$=-2+\Big[-e^{1-x}+e^{x-1}\Big]_0^1=e-\frac{1}{e}-2$$



(2) $x^2-xe^{1-x}=x(x-e^{1-x})$

$f(x)=x-e^{1-x}$ とおくと $f'(x)=1+e^{1-x}>0$

$f(x)$ は単調に増加し，$f(1)=0$ である。

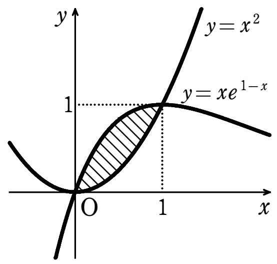
2 つの曲線の交点の x 座標は，$x^2-xe^{1-x}=0$ とすると

$x=0$，1

また，$0\leqq x\leqq 1$ では $x^2\leqq xe^{1-x}$

$$S=\int_0^1(xe^{1-x}-x^2)dx$$

$$=\Big[-xe^{1-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx-\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=-1+\Big[-e^{1-x}\Big]_0^1-\frac{1}{3}=e-\frac{7}{3}$$



(3) $y=e^x$ と $y=e^{3x}$ の交点の x 座標は $x=0$

$y=e^x$ と $y=e^{2-x}$ の交点の x 座標は $x=1$

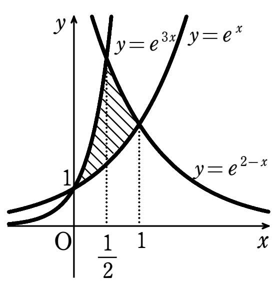
$y=e^{3x}$ と $y=e^{2-x}$ の交点の x 座標は $x=\dfrac{1}{2}$

よって，グラフは右図のようになり，

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ で $e^x\leqq e^{3x}$

$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ で $e^x\leqq e^{2-x}$

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}e^{3x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{2-x}dx-\int_0^1 e^x dx$$



$$=\Big[\frac{1}{3}e^{3x}\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\Big[-e^{2-x}\Big]_{\frac{1}{2}}^1-\Big[e^x\Big]_0^1=\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}}-2e+\frac{2}{3}$$

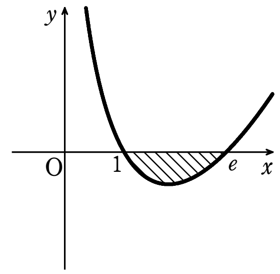
(4) $(x-e)\log x=0$ とすると $x=1$，e

また，$1\leqq x\leqq e$ では $(x-e)\log x\leqq 0$

よって $S=-\displaystyle\int_1^e(x-e)\log x\,dx$

$$=-\Big[\frac{(x-e)^2}{2}\log x\Big]_1^e+\int_1^e\frac{(x-e)^2}{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}-2ex+e^2\log x\Big]_1^e=-\frac{e^2}{4}+e-\frac{1}{4}$$



(5) $x^2=2\sqrt{2}\,y$，$y^2=2\sqrt{2}\,x$ から y を消去して

$$\Big(\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\Big)^2=2\sqrt{2}\,x$$

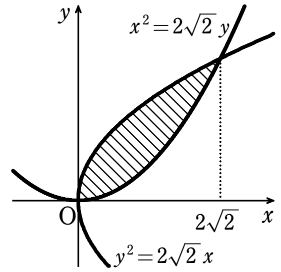
ゆえに $x\{x^3-(2\sqrt{2})^3\}=0$

よって，2 つの曲線の交点の x 座標は $x=0$，$2\sqrt{2}$

$0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$ では $\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}\leqq 2^{\frac{3}{4}}\sqrt{x}$

よって $S=\displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}}\Big(2^{\frac{3}{4}}\sqrt{x}-\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\Big)dx$

$$=\Big[2^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6\sqrt{2}}\Big]_0^{2\sqrt{2}}=2^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2^{\frac{9}{4}}-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$$



(6) $\sin x=\sin 2x$ とすると $\sin x(1-2\cos x)=0$

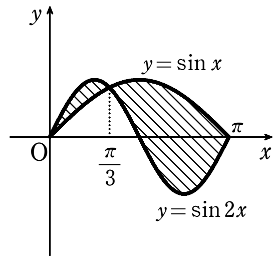
$0\leqq x\leqq\pi$ から $x=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，π

グラフは右図のようになるから

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\frac{5}{2}$$



$\boxed{33}$ 次の楕円によって囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $2x^2+3y^2=6$ (2) $3x^2+4y^2=1$

解答 (1) $\sqrt{6}\,\pi$ (2) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

解説

(1) $2x^2+3y^2=6$ から $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

この曲線は楕円で，x 軸および y 軸に関して対称である。

よって，求める面積 S は第 1 象限にある部分の面積の 4 倍である。

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ での曲線の方程式は $y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{3-x^2}$

また，$3-x^2\geqq 0$ であるから $0\leqq x\leqq\sqrt{3}$

よって $S=4\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{3-x^2}\,dx=\frac{4\sqrt{6}}{3}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$ は，半径 $\sqrt{3}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表すから

$$S=\frac{4\sqrt{6}}{3}\cdot\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\frac{1}{4}=\sqrt{6}\,\pi$$

(2) この曲線は楕円で，x 軸および y 軸に関して対称である。

よって，求める面積 S は第 1 象限にある部分の面積の 4 倍である。

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ での曲線の方程式は $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-3x^2}$

また，$1-3x^2\geqq 0$ であるから $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって $S=4\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{2}\sqrt{1-3x^2}\,dx=2\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\,dx$ は，半径 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ を表すから

$$S=2\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

$\boxed{34}$ 次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y^2=x^2(1-x)$ (2) $|y+1|=x|x-3|$

解答 (1) $\dfrac{8}{15}$ (2) 9

解説

求める面積を S とする。

(1) $y^2\geqq 0$，$x^2\geqq 0$ から $1-x\geqq 0$

ゆえに $x\leqq 1$

このとき $y=\pm x\sqrt{1-x}$

$y=0$ とすると $x=0$，1

$y_1=x\sqrt{1-x}$，$y_2=-x\sqrt{1-x}$ とおくと，

$0\leqq x\leqq 1$ で $y_1\geqq y_2$

ゆえに $S=\displaystyle\int_0^1(y_1-y_2)dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

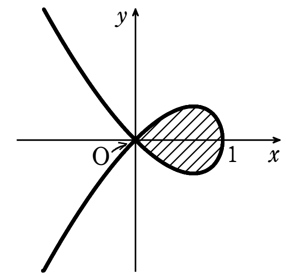
$\sqrt{1-x}=t$ とおくと $x=1-t^2$

$dx=-2tdt$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 0$

よって $S=2\displaystyle\int_1^0(1-t^2)t\cdot(-2t)dt$

$$=4\int_0^1(t^2-t^4)dt=4\Big[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\Big]_0^1=\frac{8}{15}$$



参考 曲線は x 軸に関して対称であるから，求める面積は曲線 $y=x\sqrt{1-x}$ と x 軸で囲まれた部分の 2 倍である。

よって $S=2\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

(2) $|y+1|\geqq 0$ であるから $x|x-3|\geqq 0$

ゆえに $x\geqq 0$

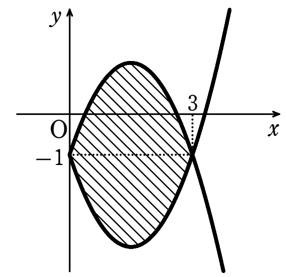
このとき $y=-1\pm x(x-3)$

$y_1=-1+x(x-3)$，$y_2=-1-x(x-3)$とすると，

$0\leqq x\leqq 3$ の範囲において $y_1\leqq y_2$

よって $S=\displaystyle\int_0^3(y_2-y_1)dx=-2\int_0^3 x(x-3)dx$

$$=-2\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\Big]_0^3=9$$



別解 [積分の計算]

$$S=-2\int_0^3 x(x-3)dx=\frac{2}{6}(3-0)^3=9$$

35 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $x=2t,\ y=2t-t^2\ (0\leqq t\leqq 2)$　　(2) $x=\cos\theta,\ y=2\sin\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$

解答 (1) $\frac{8}{3}$　(2) π

解説

求める面積を S とする。

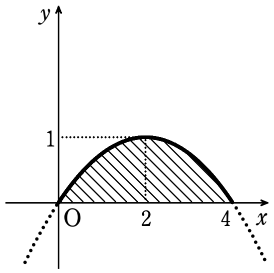
(1) $x=2t$ から　$dx=2dt$

x	$0 \longrightarrow 4$
t	$0 \longrightarrow 2$

$0\leqq t\leqq 2$ のとき $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^4 y\,dx=\int_0^2(2t-t^2)\cdot 2dt$$

$$=\int_0^2(4t-2t^2)dt=\left[2t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^2=\frac{8}{3}$$



(2) $x=\cos\theta$ から　$dx=-\sin\theta\,d\theta$

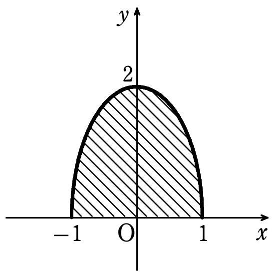
x	$1 \longrightarrow -1$
θ	$0 \longrightarrow \pi$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_{-1}^1 y\,dx=\int_\pi^0 2\sin\theta\cdot(-\sin\theta)d\theta$$

$$=2\int_0^\pi\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^\pi(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^\pi=\pi$$



36 次の曲線と直線および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\sin x,\ x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{2}$　　(2) $y=\sqrt{x},\ x=3$

(3) $y=-\frac{1}{x},\ x=\frac{e}{2},\ x=e$

解答 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(2) $2\sqrt{3}$　(3) $\log 2$

解説

(1) $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ では，$y>0$ であるから

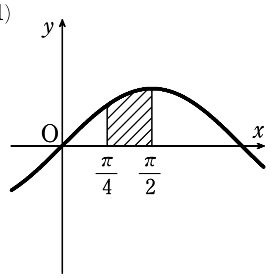
$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と x 軸の共有点の x 座標は，$\sqrt{x}=0$ を解いて　$x=0$

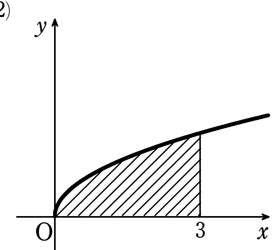
$0\leqq x\leqq 3$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^3\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{2}{3}\Big[x\sqrt{x}\Big]_0^3=2\sqrt{3}$$

(1)



(2)

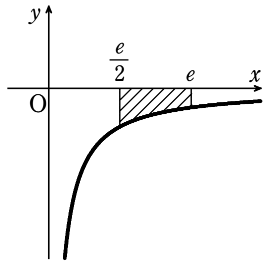


(3) $\frac{e}{2}\leqq x\leqq e$ では，$y<0$ であるから

$$S=\int_{\frac{e}{2}}^{e}\left\{-\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{e}{2}}^{e}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_{\frac{e}{2}}^{e}$$

$$=\log e-\log\frac{e}{2}=\log 2$$



37 曲線 $y=e^x-1$ と x 軸および 2 直線 $x=-1,\ x=2$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答 $\frac{1}{e}+e^2-3$

解説

曲線 $y=e^x-1$ と x 軸の交点の x 座標は，

$e^x-1=0$ を解いて　$x=0$

$-1\leqq x\leqq 0$ では　$y\leqq 0$，

$0\leqq x\leqq 2$　では　$y\geqq 0$

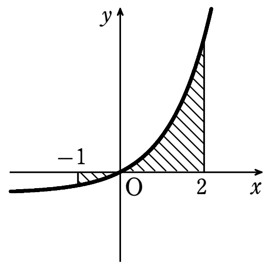
であるから

$$S=-\int_{-1}^0(e^x-1)dx+\int_0^2(e^x-1)dx$$

$$=-\Big[e^x-x\Big]_{-1}^0+\Big[e^x-x\Big]_0^2$$

$$=-\left\{(1-0)-\left(\frac{1}{e}+1\right)\right\}+(e^2-2)-(1-0)$$

$$=\frac{1}{e}+e^2-3$$



38 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\sqrt{x},\ y=x$　　(2) $y=\sin x,\ y=2\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$

(3) $xy=2,\ x+y=3$　　(4) $y^2=2x,\ x^2=2y$

解答 (1) $\frac{1}{6}$　(2) 2　(3) $\frac{3}{2}-2\log 2$　(4) $\frac{4}{3}$

解説

(1) $\sqrt{x}=x$ ……① とすると　$x=x^2$

よって　$x(x-1)=0$

ゆえに　$x=0,\ 1$

これらはともに ① を満たす。

したがって，曲線と直線の共有点の x 座標は　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ では，$\sqrt{x}\geqq x$ であるから

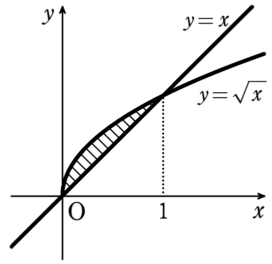
$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ では，$2\sin x\geqq\sin x$ であるから

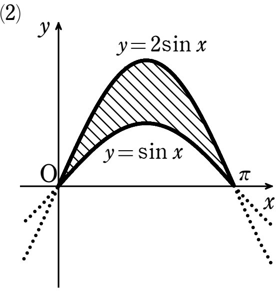
$$S=\int_0^\pi(2\sin x-\sin x)dx=\int_0^\pi\sin x\,dx$$

$$=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=2$$

(1)



(2)



(3) $xy=2,\ x+y=3$ から y を消去すると　$x(3-x)=2$

ゆえに　$(x-1)(x-2)=0$

よって，曲線と直線の交点の x 座標は　$x=1,\ 2$

$xy=2$ から $y=\frac{2}{x}$，$x+y=3$ から $y=-x+3$ であり，$1\leqq x\leqq 2$ では $-x+3\geqq\frac{2}{x}$ であるから

$$S=\int_1^2\left(-x+3-\frac{2}{x}\right)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+3x-2\log x\right]_1^2$$

$$=(-2+6-2\log 2)-\left(-\frac{1}{2}+3-2\log 1\right)=\frac{3}{2}-2\log 2$$

(4) $y^2=2x,\ x^2=2y$ から y を消去すると

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=2x$$

ゆえに　$x^4=8x$

よって　$x(x^3-8)=0$

すなわち　$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

したがって，2 曲線の交点の x 座標は　$x=0,\ 2$

$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき，$y^2=2x$ から　$y=\sqrt{2x}$

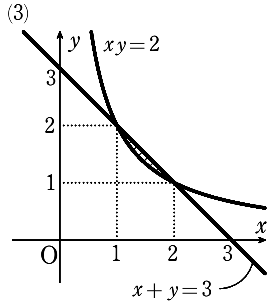
また，$x^2=2y$ から　$y=\frac{1}{2}x^2$

$0\leqq x\leqq 2$ では，$\sqrt{2x}\geqq\frac{1}{2}x^2$ であるから

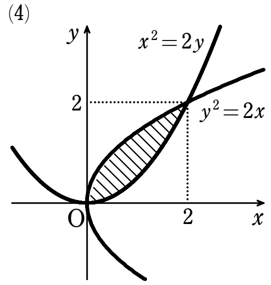
$$S=\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

(3)



(4)



$\boxed{39}$ 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=y^2+1$, $y=1$, $y=3$, y 軸　　(2) $y=\log x$, $y=2$, x 軸, y 軸

(3) $x=\dfrac{1}{y-2}$, $y=3$, $y=4$, y 軸　　(4) $x=y^2-3$, $x=2y$

解答 (1) $\dfrac{32}{3}$　(2) e^2-1　(3) $\log 2$　(4) $\dfrac{32}{3}$

解説

(1) 常に $x>0$ であるから

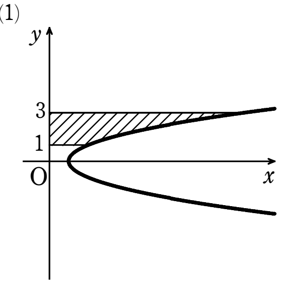
$$S=\int_1^3(y^2+1)dy=\left[\frac{y^3}{3}+y\right]_1^3=\frac{32}{3}$$

(2) $y=\log x$ より　$x=e^y$

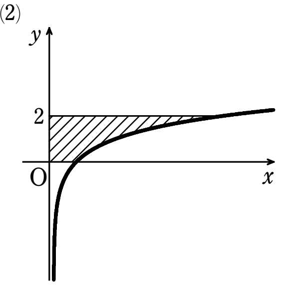
常に $x>0$ であるから

$$S=\int_0^2 e^y dy=\left[e^y\right]_0^2=e^2-1$$

(1)



(2)



(3) $3\leqq y\leqq 4$ では, $x>0$ であるから

$$S=\int_3^4\frac{dy}{y-2}=\left[\log(y-2)\right]_3^4=\log 2$$

(4) $y^2-3=2y$ とすると　$(y+1)(y-3)=0$

よって，曲線と直線の交点の y 座標は　$y=-1$, 3

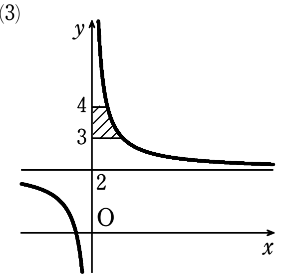
$-1\leqq y\leqq 3$ では, $2y\geqq y^2-3$ であるから

$$S=\int_{-1}^3\{2y-(y^2-3)\}dy$$

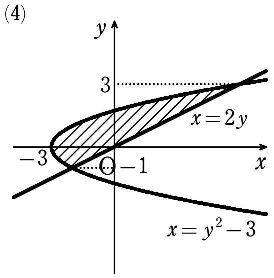
$$=\left[-\frac{y^3}{3}+y^2+3y\right]_{-1}^3=\frac{32}{3}$$

別解　$S=-\displaystyle\int_{-1}^3(y+1)(y-3)dy=\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$

(3)



(4)



$\boxed{40}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\log x$, $x=e$, $y=0$

(2) $y=\cos 2x$, $y=\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

(3) $y=e^x$, $y=e$, $y=e^2$, y 軸

(4) $x=y^2-2$, $x=2y^2-3$

解答 (1) 1　(2) $\sqrt{2}$　(3) e^2　(4) $\dfrac{4}{3}$

解説

(1) $\log x=0$ を解くと　$x=1$

$1\leqq x\leqq e$ では, $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_1^e\log x\,dx=\left[x\log x-x\right]_1^e=1$$

(2) $\cos 2x=\sin 2x$ とすると, $\cos 2x\neq 0$ であり

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1$$

すなわち　$\tan 2x=1$

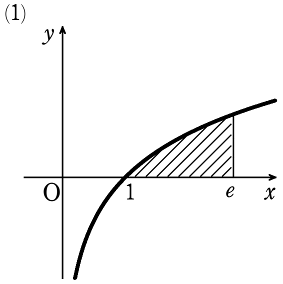
これを $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で解くと　$x=\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{5}{8}\pi$

$\dfrac{\pi}{8}\leqq x\leqq\dfrac{5}{8}\pi$ では, $\sin 2x\geqq\cos 2x$ であるから

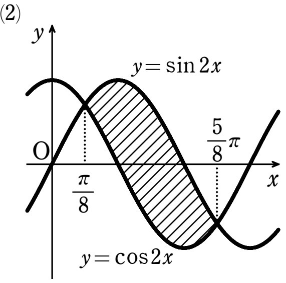
$$S=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi}(\sin 2x-\cos 2x)dx$$

$$=\left[-\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{5}{8}\pi}=\sqrt{2}$$

(1)



(2)



(3) $y=e^x$ から　$x=\log y$

$e\leqq y\leqq e^2$ では, $x>0$ であるから

$$S=\int_e^{e^2}\log y\,dy=\left[y\log y-y\right]_e^{e^2}$$

$$=(e^2\cdot 2-e^2)-(e\cdot 1-e)=e^2$$

(4) $y^2-2=2y^2-3$ とすると　$y^2=1$

よって, 2 曲線の交点の y 座標は　$y=\pm 1$

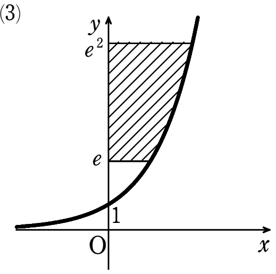
$-1\leqq y\leqq 1$ では, $y^2-2\geqq 2y^2-3$ であるから

$$S=\int_{-1}^1\{(y^2-2)-(2y^2-3)\}dy$$

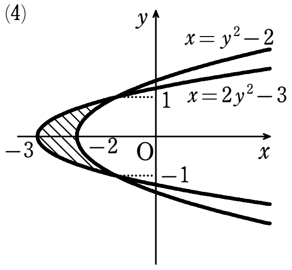
$$=\int_{-1}^1(-y^2+1)dy=2\int_0^1(-y^2+1)dy$$

$$=2\left[-\frac{y^3}{3}+y\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

(3)



(4)



$\boxed{41}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x\sqrt{3-x}$, $y=x$　　(2) $y=\cos x$, $y=\cos 2x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(3) $y=xe^{1-x}$, $y=x$　　(4) $y=(x-e)\log x$, $y=0$

解答 (1) $\dfrac{12\sqrt{3}-18}{5}$　(2) $3\sqrt{3}$　(3) $e-\dfrac{5}{2}$　(4) $-\dfrac{e^2}{4}+e-\dfrac{1}{4}$

解説

(1) 曲線と直線の交点の x 座標は,

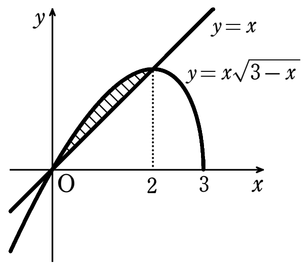
方程式 $x\sqrt{3-x}=x$　すなわち

$x(\sqrt{3-x}-1)=0$ を解いて　$x=0$, 2

$0\leqq x\leqq 2$ では, $x\sqrt{3-x}\geqq x$ であるから

$$S=\int_0^2(x\sqrt{3-x}-x)dx$$

$$=\int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx-\int_0^2 x\,dx\quad\cdots\cdots①$$



$\sqrt{3-x}=t$ とおくと

$x=3-t^2$, $dx=-2t\,dt$

x	$0\longrightarrow 2$
t	$\sqrt{3}\longrightarrow 1$

したがって，① から

$$S=\int_{\sqrt{3}}^1(3-t^2)t\cdot(-2t)dt-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}(-2t^4+6t^2)dt-2$$

$$=\left[-\frac{2}{5}t^5+2t^3\right]_1^{\sqrt{3}}-2=\frac{12\sqrt{3}-18}{5}$$

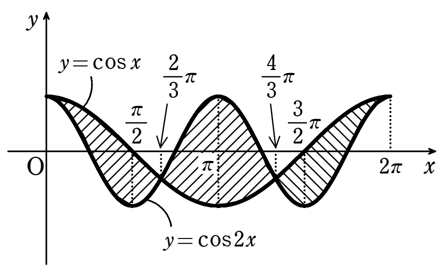
(2) 2 曲線の共有点の x 座標は，方程式

$$\cos 2x-\cos x=0$$

$$(2\cos^2 x-1)-\cos x=0$$

すなわち $(\cos x-1)(2\cos x+1)=0$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で解いて

$$x=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ 2\pi$$



図の斜線部分は，直線 $x=\pi$ に関して対称である。

$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ では　$\cos x\geqq\cos 2x$

$\frac{2}{3}\pi \leqq x \leqq \pi$ では　　$\cos 2x \geqq \cos x$

したがって

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x-\cos 2x)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(\cos 2x-\cos x)dx$$

$$=\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[\frac{\sin 2x}{2}-\sin x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

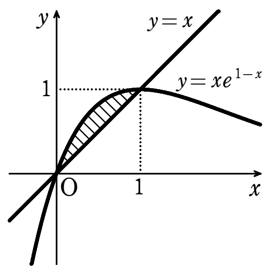
よって，求める面積は　　$S=3\sqrt{3}$

(3)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式

$xe^{1-x}=x$　すなわち　$x(e^{1-x}-1)=0$

を解いて　　$x=0,\ 1$

$0 \leqq x \leqq 1$ では，$xe^{1-x} \geqq x$ であるから



$$S=\int_0^1 (xe^{1-x}-x)dx$$

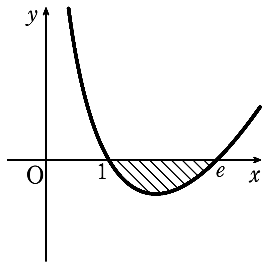
$$=\int_0^1 x(-e^{1-x})'dx-\int_0^1 x\,dx$$

$$=\left[x(-e^{1-x})\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-x}dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=-1+\left[-e^{1-x}\right]_0^1-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}$$

(4)　$(x-e)\log x=0$ を解くと　　$x=1,\ e$

$1 \leqq x \leqq e$ では，$y \leqq 0$ であるから



$$S=-\int_1^e (x-e)\log x\,dx$$

$$=-\int_1^e \left\{\frac{(x-e)^2}{2}\right\}'\log x\,dx$$

$$=-\left[\frac{(x-e)^2}{2}\log x\right]_1^e+\int_1^e \frac{(x-e)^2}{2x}dx$$

$$=\int_1^e \frac{x^2-2ex+e^2}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x-2e+\frac{e^2}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2ex+e^2\log x\right]_1^e=-\frac{e^2}{4}+e-\frac{1}{4}$$

42　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$9x^2+4y^2=36$　　　　(2)　$x^3=y^2$，$x=1$

解答　(1)　6π　　(2)　$\frac{4}{5}$

解説

(1)　与えられた曲線は楕円であるから，求める面積 S は，図の斜線部分の面積を 4 倍すると得られる。

$y \geqq 0$ のとき，与えられた方程式を y について解くと

$$y=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$$

よって　　$S=4\int_0^2 \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=6\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

定積分 $\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ は，半径 2 の四分円の面積を表すから

$$S=6\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=6\pi$$

(2)　$y^2 \geqq 0$ であるから　　$x^3 \geqq 0$

したがって　　$x \geqq 0$

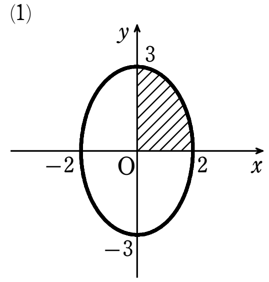
また，$y^2=x^3$ から　　$y=\pm\sqrt{x^3}$

よって，与えられた曲線は x 軸に関して対称である。

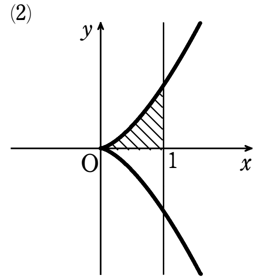
求める面積 S は，図の斜線部分の面積を 2 倍すると得られるから

$$S=2\int_0^1\sqrt{x^3}\,dx=2\left[\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{4}{5}$$

(1)



(2)



43　次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=4\cos\theta$，$y=3\sin\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

(2)　$x=\tan\theta$，$y=\cos 2\theta$　$\left(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$，$x$ 軸

(3)　$x=\cos^4\theta$，$y=\sin^4\theta$　$\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸

(4)　$x=t^3$，$y=1-t^2$，x 軸

解答　(1)　12π　　(2)　$\pi-2$　　(3)　$\frac{1}{6}$　　(4)　$\frac{4}{5}$

解説

(1)　与えられた曲線は楕円であり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，第 1 象限にある。

$x=4\cos\theta$ から　　$dx=-4\sin\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 4$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

よって，求める面積は

$$S=4\int_0^4 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 3\sin\theta\cdot(-4\sin\theta)d\theta$$

$$=48\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=24\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=12\pi$$

(2)　$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ において，$y=0$ とすると　　$\theta=-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}$

また，$y \geqq 0$ である。

$x=\tan\theta$ から

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって，求める面積は

$$S=\int_{-1}^1 y\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=2\left[2\theta-\tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-2$$

参考　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1$

であるから　　$y=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

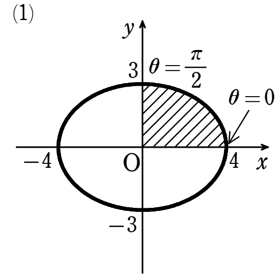
$$y'=-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ における増減表は

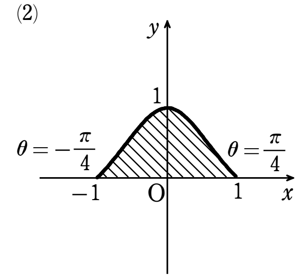
x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

曲線の概形は，図のようになる。

(1)



(2)



(3)　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$y=0$ とすると　　$\theta=0$

また，$y \geqq 0$ である。

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$x=0$ とすると　　$\theta=\frac{\pi}{2}$

$x=\cos^4\theta$ から

$dx=-4\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

したがって，求める面積は

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4\theta\cdot(-4\cos^3\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^5\theta\cos^3\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta-\sin^7\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5\theta-\sin^7\theta)(\sin\theta)'d\theta$$

$$=4\left[\frac{\sin^6\theta}{6}-\frac{\sin^8\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$$

参考　曲線の概形は，図のようになる。

また，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ より，$(\cos^4\theta)^{\frac{1}{2}}+(\sin^4\theta)^{\frac{1}{2}}=1$ であるから，θ を消去すると

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

(4)　$y=0$ とすると，$1-t^2=0$ から　　$t=\pm 1$

また，$-1 \leqq t \leqq 1$ で　　$y \geqq 0$

$t<-1,\ 1<t$ で　$y<0$

よって，曲線と x 軸で囲まれるのは $-1 \leqq t \leqq 1$ の部分である。

$x=t^3$ から　　$dx=3t^2dt$

x と t の対応は右のようになる。

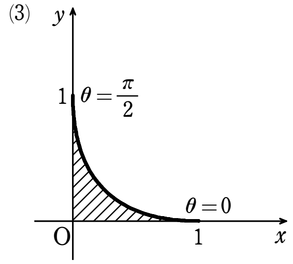
x	$-1 \longrightarrow 1$
t	$-1 \longrightarrow 1$

したがって

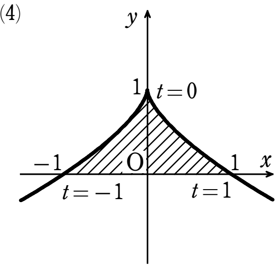
$$S=\int_{-1}^{1} y\,dx=\int_{-1}^{1}(1-t^2)\cdot 3t^2dt$$

$$=6\int_0^1 (t^2-t^4)dt=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{5}$$

(3)



(4)



44 曲線 $\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=1$ およびその両端を結ぶ線分によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$\frac{1}{3}$

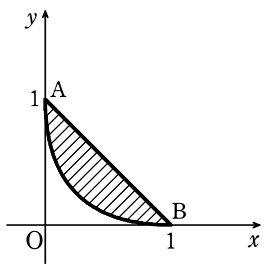
解説

求める部分の面積は，曲線を平行移動して考えても変わらない。

x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると，曲線の方程式は

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$$

となるから，右の図の斜線部分の面積を求めればよい。



$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}$ の両辺を 2 乗して

$$y=x-2\sqrt{x}+1$$

よって　　$S=\triangle\mathrm{OAB}-\int_0^1 (x-2\sqrt{x}+1)dx$

$$=\frac{1}{2}-\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

45 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=e^{2x}$，$y=2e^{-x}+3$，$x=0$　　　(2)　$2x^2+3y^2=6$

(3)　$x=\sin\theta$，$y=-\cos 2\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸

解答　(1)　$3\log 2-\frac{1}{2}$　　(2)　$\sqrt{6}\pi$　　(3)　$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

解説

(1)　$e^{2x}=2e^{-x}+3$ とすると

$$e^{3x}-3e^x-2=0$$

ゆえに　　$(e^x+1)^2(e^x-2)=0$

$e^x+1>0$ であるから　　$e^x=2$

よって，2 曲線の交点の x 座標は　　$x=\log 2$

$0 \leqq x \leqq \log 2$ では，$2e^{-x}+3 \geqq e^{2x}$ であるから

$$S=\int_0^{\log 2}\{(2e^{-x}+3)-e^{2x}\}dx$$

$$=\left[-2e^{-x}+3x-\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\log 2}=3\log 2-\frac{1}{2}$$

(2)　与えられた曲線は楕円であるから，求める面積 S は，図の斜線部分の面積を 4 倍すると得られる。

$y \geqq 0$ のとき，与えられた方程式を y について解くと

$$y=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3-x^2}$$

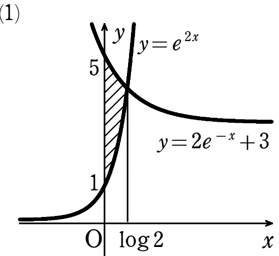
よって　　$S=4\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3-x^2}\,dx$

$$=4\sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$$

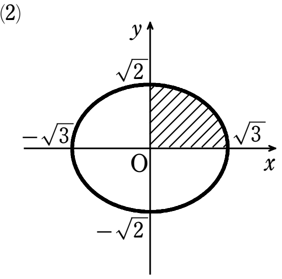
定積分 $\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx$ は，半径 $\sqrt{3}$ の四分円の面積を表すから

$$S=4\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\pi\cdot(\sqrt{3})^2}{4}=\sqrt{6}\pi$$

(1)



(2)



(3)　$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$y=0$ とすると　　$\theta=\pm\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ では　　$y \leqq 0$

$x=\sin\theta$ から　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって，求める面積は

$$S=-\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\,dx=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(-\cos 2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

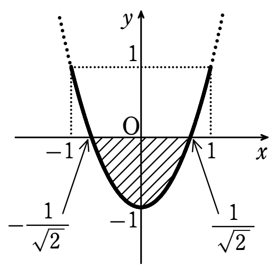
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 3\theta+\cos\theta)d\theta$$

$$=\left[\frac{\sin 3\theta}{3}+\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

別解　$y=-\cos 2\theta=2\sin^2\theta-1$ であるから，θ を消去すると

$y=2x^2-1$　　ただし　$-1 \leqq x \leqq 1$

よって，放物線の一部 $y=2x^2-1$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めればよい（面積の計算は省略）。



46 次の曲線と直線，および与えられた曲線上の点における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$，x 軸，点 $(1,\ 1)$　　　(2)　$y=\log x$，$x=e$，点 $(1,\ 0)$

解答　(1)　$\frac{1}{3}$　　(2)　$\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}$

解説

(1)　$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ であるから，点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)$$

すなわち　　$y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

また，接線と x 軸との交点の座標は　$(-1,\ 0)$

グラフは図のようになるから，求める面積は

$$S=\frac{1}{2}\{1-(-1)\}\cdot 1-\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$=1-\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2)　$y'=\frac{1}{x}$ であるから，点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=1\cdot(x-1)$$

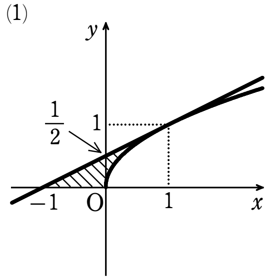
すなわち　　$y=x-1$

グラフは図のようになるから，求める面積は

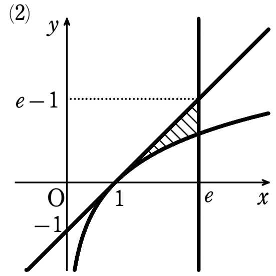
$$S=\frac{1}{2}(e-1)\cdot(e-1)-\int_1^e \log x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)^2-\Big[x\log x-x\Big]_1^e=\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}$$

(1)



(2)



47 曲線 $C: y=e^{\frac{x}{2}}+1$ に接し，点 $(0,\ 1)$ を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。

また，曲線 C と直線 ℓ，および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　順に　$y=\frac{e}{2}x+1$，$S=e-2$

解説

$y=e^{\frac{x}{2}}+1$ から　　$y'=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$

よって，曲線 C 上の点 $\left(t,\ e^{\frac{t}{2}}+1\right)$ における接線の方程式は

$$y-\left(e^{\frac{t}{2}}+1\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}(x-t)$$

すなわち　$y=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}x-\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{2}}+1$　……①

この直線が点 $(0,\ 1)$ を通るとき

$$1=-\frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}}+e^{\frac{t}{2}}+1$$

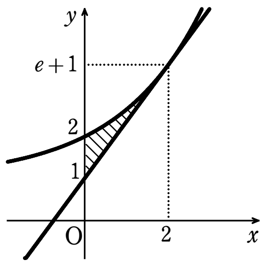
ゆえに　$\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}(t-2)=0$

$e^{\frac{t}{2}}>0$ であるから　$t=2$

よって，直線 ℓ の方程式は，① から

$$y=\frac{e}{2}x+1$$

接点の座標は $(2,\ e+1)$ であり，グラフは図のようになるから，求める面積は



$$S=\int_0^2\left\{e^{\frac{x}{2}}+1-\left(\frac{e}{2}x+1\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^2\left(e^{\frac{x}{2}}-\frac{e}{2}x\right)dx$$

$$=\left[2e^{\frac{x}{2}}-\frac{e}{4}x^2\right]_0^2=(2e-e)-2=e-2$$

48 a は定数とする。2 曲線 $y=\sqrt{x}$，$y=a\log x$ が接するとき

(1)　定数 a の値と接点の座標を求めよ。

(2)　この 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$a=\frac{e}{2}$，接点の座標 $(e^2,\ e)$　　(2)　$\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}$

解説

(1)　$f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=a\log x$ とすると

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad g'(x)=\frac{a}{x}$$

接点の x 座標を t $(t>0)$ とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ が成り立つから

$\sqrt{t}=a\log t$　……①

$\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{a}{t}$　……②

② から　$a=\frac{\sqrt{t}}{2}$　……③

① に代入して　$\sqrt{t}=\frac{\sqrt{t}}{2}\log t$

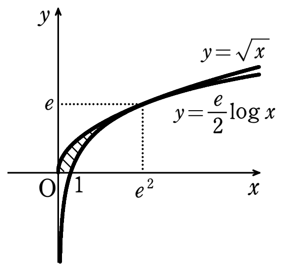
$\sqrt{t}>0$ であるから　$\log t=2$

ゆえに　$t=e^2$

よって，接点の座標は　$(e^2,\ e)$

a の値は，$t=e^2$ を ③ に代入して　$a=\frac{e}{2}$

(2)　グラフは図のようになるから



$$S=\int_0^{e^2}\sqrt{x}\,dx-\int_1^{e^2}\frac{e}{2}\log x\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{e^2}-\frac{e}{2}\Big[x\log x-x\Big]_1^{e^2}$$

$$=\frac{2}{3}e^3-\frac{e}{2}(2e^2-e^2+1)$$

$$=\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}$$

49 曲線 $x^2-xy+y^2=3$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$2\sqrt{3}\pi$

解説

$x^2-xy+y^2=3$ から　$y^2-xy+x^2-3=0$

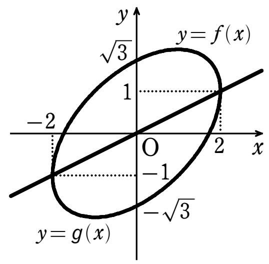
これを y について解くと

$$y=\frac{-(-x)\pm\sqrt{(-x)^2-4(x^2-3)}}{2}$$

$$=\frac{x\pm\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$$

$4-x^2\geqq0$ から　$-2\leqq x\leqq2$

$f(x)=\frac{x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$，$g(x)=\frac{x-\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$ とすると，$-2\leqq x\leqq2$ で $f(x)\geqq g(x)$ であるから



$$S=\int_{-2}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\sqrt{3}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ は半径 2 の円の面積の半分であるから

$$S=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi\cdot2^2}{2}=2\sqrt{3}\pi$$

50 $a>0$ とする。曲線 $y=\sin2x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，曲線 $y=a\sin x$ が 2 等分するように定数 a の値を定めよ。

解答　$a=2-\sqrt{2}$

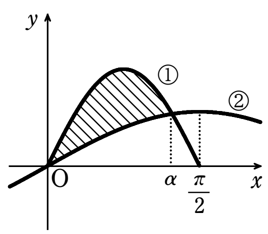
解説

$y=\sin2x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ ……①,

$y=a\sin x$　……②

とおく。

曲線 ② が，曲線 ① と x 軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するとき，①，② の原点以外の共有点の x 座標を α とする。



$\sin2\alpha=a\sin\alpha$ から

$2\sin\alpha\cos\alpha=a\sin\alpha$

$\sin\alpha>0$ であるから　$\cos\alpha=\frac{a}{2}$　……③

ここで，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから

$0<\cos\alpha<1$

よって　$0<\frac{a}{2}<1$

すなわち　$0<a<2$　……④

面積が 2 等分されるとき

$$\int_0^{\alpha}(\sin2x-a\sin x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2x\,dx\quad\cdots\cdots⑤$$

ここで

$$\int_0^{\alpha}(\sin2x-a\sin x)dx=\left[-\frac{\cos2x}{2}+a\cos x\right]_0^{\alpha}$$

$$=-\frac{\cos2\alpha}{2}+a\cos\alpha+\frac{1}{2}-a$$

$$=-\frac{2\cos^2\alpha-1}{2}+a\cos\alpha+\frac{1}{2}-a$$

$$=-\cos^2\alpha+a\cos\alpha+1-a$$

これに ③ を代入すると

$$\int_0^{\alpha}(\sin2x-a\sin x)dx=\frac{a^2}{4}-a+1$$

一方　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2x\,dx=\left[-\frac{\cos2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

ゆえに，⑤ から　$\frac{a^2}{4}-a+1=\frac{1}{2}\times1$

よって　$a^2-4a+2=0$

これを解くと　$a=2\pm\sqrt{2}$

④ を満たすものは　$a=2-\sqrt{2}$

51 a は $0<a<1$ を満たす定数とする。

(1)　2 つの曲線 $y=\frac{x^2}{a}$，$y^2=a(1-a)x$ の原点以外の交点の座標を求めよ。

(2)　(1) の 2 曲線で囲まれた部分の面積が最大となるとき，定数 a の値を求めよ。

解答　(1)　$\left(a\sqrt[3]{1-a},\ a\sqrt[3]{(1-a)^2}\right)$　　(2)　$a=\frac{2}{3}$

解説

(1)　$y=\frac{x^2}{a}$，$y^2=a(1-a)x$ から y を消去すると

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2=a(1-a)x$$

原点以外の交点の座標を求めるから，$x\neq0$ とすると

$x^3=a^3(1-a)$

ゆえに　$x=a\sqrt[3]{1-a}$

このとき　$y=\frac{(a\sqrt[3]{1-a})^2}{a}=a\sqrt[3]{(1-a)^2}$

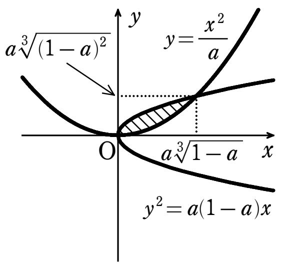
よって，求める交点の座標は

$\left(a\sqrt[3]{1-a},\ a\sqrt[3]{(1-a)^2}\right)$

(2) 2 曲線で囲まれた部分の面積を S とすると

$0\leqq x\leqq a\sqrt[3]{1-a}$ では $\sqrt{a(1-a)x}\geqq\dfrac{x^2}{a}$

であるから



$$S=\int_0^{a\sqrt[3]{1-a}}\left\{\sqrt{a(1-a)x}-\frac{x^2}{a}\right\}dx$$
$$=\left[\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3a}\right]_0^{a\sqrt[3]{1-a}}$$
$$=\frac{2\sqrt{a(1-a)}}{3}(a\sqrt[3]{1-a})^{\frac{3}{2}}-\frac{a^3(1-a)}{3a}$$
$$=\frac{2a^2(1-a)}{3}-\frac{a^2(1-a)}{3}=\frac{a^2(1-a)}{3}$$
$$=\frac{1}{3}(a^2-a^3)$$

よって　$S'=\dfrac{1}{3}(2a-3a^2)=\dfrac{1}{3}a(2-3a)$

$S'=0$ とすると，$0<a<1$ から　$a=\dfrac{2}{3}$

$0<a<1$ における S の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
S'	／	$+$	0	$-$	／
S	／	↗	極大	↘	／

ゆえに，$a=\dfrac{2}{3}$ で面積は最大になる。

52 曲線 $y=e^x$ と 3 直線 $y=x$，$x=t$，$x=t+1$ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

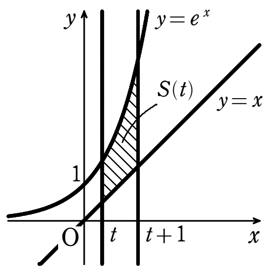
(1) $S(t)$ を求めよ。　　(2) $S(t)$ の最小値を求めよ。

解答　(1) $S(t)=(e-1)e^t-t-\dfrac{1}{2}$　　(2) $t=-\log(e-1)$ で最小値 $\log(e-1)+\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $S(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}(e^x-x)dx=\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_t^{t+1}$

$$=e^{t+1}-e^t-\frac{1}{2}\{(t+1)^2-t^2\}$$
$$=(e-1)e^t-t-\frac{1}{2}$$



参考　本問では，曲線 $y=e^x$ は直線 $y=x$ の上側にあることは既知としたが，不等式の証明を利用して，次のように示すこともできる。

$f(x)=e^x-x$ とすると　$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

ゆえに，すべての実数 x について　$f(x)\geqq 1$

よって，曲線 $y=e^x$ は直線 $y=x$ の上側にある。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

(2) $S'(t)=(e-1)e^t-1$

$S'(t)=0$ とすると　$e^t=\dfrac{1}{e-1}$

よって　$t=\log\dfrac{1}{e-1}=-\log(e-1)$

$S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	$-\log(e-1)$	$\cdots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	↘	極小	↗

よって，$S(t)$ は $t=-\log(e-1)$ で極小かつ最小であり，その最小値は

$$(e-1)\cdot\frac{1}{e-1}+\log(e-1)-\frac{1}{2}=\log(e-1)+\frac{1}{2}$$

53 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=\dfrac{x}{2}$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$\dfrac{4}{3}$

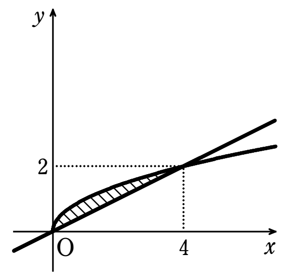
解説

曲線と直線の共有点の x 座標は，方程式 $\sqrt{x}=\dfrac{x}{2}$ の解である。

これを解くと　$x=0,\ 4$

$0\leqq x\leqq 4$ では $\sqrt{x}\geqq\dfrac{x}{2}$ であるから

$$S=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{4}\right]_0^4$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 2^3-4=\frac{4}{3}$$



54 2 曲線 $y=2\log x$，$y=ax^2$ がある点で共通の接線をもつとき，定数 a の値を求めよ。また，このとき，2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　$a=\dfrac{1}{e}$，$S=\dfrac{4}{3}\sqrt{e}-2$

解説

$f(x)=2\log x$，$g(x)=ax^2$ とすると　$f'(x)=\dfrac{2}{x}$，$g'(x)=2ax$

接点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ が成り立つから

$2\log t=at^2$ ……①，　$\dfrac{2}{t}=2at$ ……②

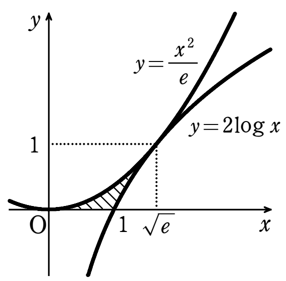
② から　$at^2=1$ ……③

① に代入して　$2\log t=1$　　ゆえに　$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

したがって，③ から　$a=\dfrac{1}{e}$

グラフは右の図のようになるから

$$S=\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{e}dx-\int_1^{\sqrt{e}}2\log x\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3e}\right]_0^{\sqrt{e}}-2\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}=\frac{4}{3}\sqrt{e}-2$$



55 曲線 $2x^2-2xy+y^2=1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　π

解説

$2x^2-2xy+y^2=1$ から

$y^2-2xy+2x^2-1=0$

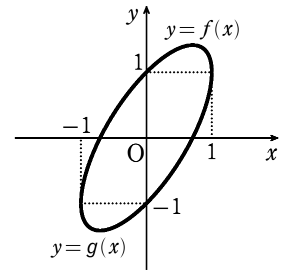
これを y について解くと　$y=x\pm\sqrt{1-x^2}$

$1-x^2\geqq 0$ から　$-1\leqq x\leqq 1$

$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$，$g(x)=x-\sqrt{1-x^2}$ とすると，

$-1\leqq x\leqq 1$ で $f(x)\geqq g(x)$ であるから

$$S=\int_{-1}^1\{f(x)-g(x)\}dx=2\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$



$\displaystyle\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は半径 1 の円の面積の半分であるから

$$S=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$