定積分と和の極限クイズ

$\boxed{1}$ 極限値 $S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めよ。

解答　$\log 2$

解説

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

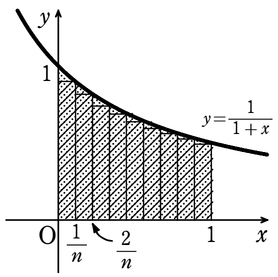
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)$$

よって，$f(x)=\frac{1}{1+x}$ とすると

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1$$

$$=\log 2$$



$\boxed{2}$ 極限値 $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$ を求めよ。

解答　$\frac{2}{\pi}$

解説

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

よって，$f(x)=\sin\pi x$ とすると

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sin\pi x\,dx$$

$$=-\frac{1}{\pi}\Big[\cos\pi x\Big]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$\boxed{3}$ 極限値 $\lim_{n\to\infty}n\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right\}$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{2}$

解説

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\tan\frac{\pi}{4n}+\tan\frac{2\pi}{4n}+\cdots\cdots+\tan\frac{(n-1)\pi}{4n}\right\}$$

解答　$\frac{2}{\pi}\log 2$

解説

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\tan\frac{\pi}{4n}+\tan\frac{2\pi}{4n}+\cdots\cdots+\tan\frac{(n-1)\pi}{4n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{0}{n}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots+\tan\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\tan\frac{\pi}{4}\cdot\frac{k}{n}=\int_0^1\tan\frac{\pi}{4}x\,dx=\int_0^1\frac{\sin\frac{\pi}{4}x}{\cos\frac{\pi}{4}x}dx$$

$$=-\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}x\right)'}{\cos\frac{\pi}{4}x}dx=-\frac{4}{\pi}\Big[\log\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|\Big]_0^1=-\frac{4}{\pi}\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}-\log 1\right)$$

$$=-\frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\log 2\right)=\frac{2}{\pi}\log 2$$

$\boxed{5}$ 次の極限値を求めよ。[25 点]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots+\frac{2n}{n}\right)$$

解答　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots+\frac{2n}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)dx$$

$$=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

解説

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots+\frac{2n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)dx$$

$$=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

$\boxed{6}$ 次の極限値を求めよ。[25 点]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\frac{n}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+4}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{n+2(n-1)}{n}\right\}$$

解答　与式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\left(1+2\cdot\frac{0}{n}\right)\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(1+2\cdot\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+2\cdot\frac{n-1}{n}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+2\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1+2x)'\log(1+2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[(1+2x)\log(1+2x)\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(1+2x)\cdot\frac{2}{1+2x}dx$$

$$=\frac{3}{2}\log 3-\int_0^1 dx=\frac{3}{2}\log 3-\Big[x\Big]_0^1=\frac{3}{2}\log 3-1$$

解説

与式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\left(1+2\cdot\frac{0}{n}\right)\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(1+2\cdot\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+2\cdot\frac{n-1}{n}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+2\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1+2x)'\log(1+2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[(1+2x)\log(1+2x)\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(1+2x)\cdot\frac{2}{1+2x}dx$$

$$=\frac{3}{2}\log 3-\int_0^1 dx=\frac{3}{2}\log 3-\Big[x\Big]_0^1=\frac{3}{2}\log 3-1$$

$\boxed{7}$ 次の極限値を求めよ。[10 点]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)$$

解答　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\right)$

$$=0+\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$$

解説

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}e^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\right)$$

$$=0+\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e-1$$

$\boxed{8}$ 極限値 $\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n^2}\{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n^2+n^2)\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。[30 点]

解答　$\log\frac{1}{n^2}\{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n^2+n^2)\}^{\frac{1}{n}}=\log\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(n^2+k^2)-\log n^2\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

よって　　与式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=\int_0^1\log(1+x^2)\,dx$

$$=\Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\log 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\log 2-2\Big[x\Big]_0^1+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\log 2-2+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ において，$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

ゆえに $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

したがって　与式$=\int_0^1\log(1+x^2)\,dx=\log2-2+2\times\frac{\pi}{4}=\log2-2+\frac{\pi}{2}$

解説

$$\log\frac{1}{n^2}\{(n^2+1^2)(n^2+2^2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n^2+n^2)\}^{\frac1n}=\log\frac{1}{n^2}+\frac1n\sum_{k=1}^{n}\log(n^2+k^2)$$

$$=\frac1n\sum_{k=1}^{n}\{\log(n^2+k^2)-\log n^2\}=\frac1n\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

よって　与式$=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1+\left(\frac kn\right)^2\right\}=\int_0^1\log(1+x^2)\,dx$

$$=\Big[x\log(1+x^2)\Big]_0^1-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\log2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\log2-2\Big[x\Big]_0^1+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\log2-2+2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ において，$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

ゆえに　$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

したがって　与式$=\int_0^1\log(1+x^2)\,dx=\log2-2+2\times\frac{\pi}{4}=\log2-2+\frac{\pi}{2}$

9 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac kn\right)^2\frac1n$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac kn}$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{6n}$

解答　(1) $\frac13$　(2) $\frac23$　(3) $\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt3}{4}$

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac kn\right)^2\frac1n=\int_0^1x^2dx=\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=\frac13$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac kn}=\int_0^1\sqrt x\,dx=\Big[\frac23x^{\frac32}\Big]_0^1=\frac23$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{6n}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac kn\right)$

$$=\pi\int_0^1\cos^2\frac{\pi}{6}x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left(1+\cos\frac{\pi}{3}x\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x+\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\sqrt3}{2\pi}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt3}{4}$$

10 極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(k+n)^2(k+2n)}$ を求めよ。

解答　$\frac12+\log\frac34$

解説

求める極限値を S とする。

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(k+n)^2(k+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{n^3}{(k+n)^2(k+2n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac kn+1\right)^2\left(\frac kn+2\right)}=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx$$

$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$ とすると

$a=1,\ b=-1,\ c=1$

ゆえに　$S=\int_0^1\left\{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right\}dx$

$$=\Big[-\frac{1}{x+1}-\log(x+1)+\log(x+2)\Big]_0^1$$

$$=\frac12+\log\frac34$$

11 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n+3k}{n^2+k^2}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt n\sin\left(\frac1n\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

(3) $\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k)(2n-k-1)}$

解答　(1) $\pi+\frac32\log2$　(2) $2(\sqrt2-1)$　(3) $\frac23\log2$

解説

求める極限値を S とする。

(1) $S=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{4+3\cdot\frac kn}{1+\left(\frac kn\right)^2}=\int_0^1\frac{4+3x}{1+x^2}dx=4\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\frac32\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって　$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta+\frac32\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta+\frac32\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1=\pi+\frac32\log2$$

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac1n\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt n}{\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac1n\right)}{\frac1n}\cdot\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac kn}}$

$$=1\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1=2(\sqrt2-1)$$

(3) $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k)(2n-k-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3n-1}\left(\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n-k-1}\right)$

$$=\frac{1}{3n-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+(n-1-k)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=\frac{2}{3n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$$

よって　$S=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3-\frac1n}\cdot\frac1n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac kn}$

$$=\frac23\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\frac23\Big[\log(x+1)\Big]_0^1=\frac23\log2$$

12 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{3n-1}\frac{1}{2n+k}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{nk}}$

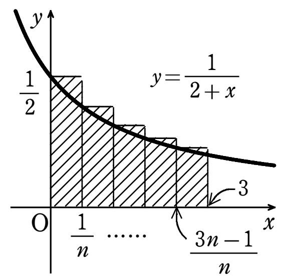
解答　(1) $\log\frac52$　(2) $2(\sqrt2-1)$

解説

求める極限値を S とする。

(1) $S=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=0}^{3n-1}\frac{1}{2+\frac kn}$ であり，$S_n=\frac1n\sum_{k=0}^{3n-1}\frac{1}{2+\frac kn}$

とすると，S_n は右図の長方形の面積の和を表すから



$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^3\frac{1}{2+x}dx$$

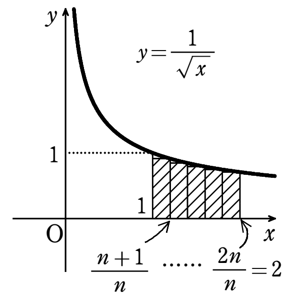
$$=\Big[\log(2+x)\Big]_0^3$$

$$=\log5-\log2=\log\frac52$$

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{\frac kn}}$ であり，

$S_n=\frac1n\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{\frac kn}}$ とすると，S_n は右図の長方形

の面積の和を表すから



$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_1^2\frac{1}{\sqrt x}dx=\Big[2\sqrt x\Big]_1^2$$

$$=2(\sqrt2-1)$$

別解　$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{nk}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(k+n)}}$ であるから

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(k+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac kn+1}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\Big[2\sqrt{x+1}\Big]_0^1=2(\sqrt2-1)$$

13 次の極限値を求めよ。(3) では $p>0$ とする。

(1) $\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(n+2k)^2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac1n\left\{\left(\frac1n\right)^2+\left(\frac2n\right)^2+\left(\frac3n\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{3n}{n}\right)^2\right\}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p+(n+2)^p+\cdots\cdots+(n+2n)^p}{1^p+2^p+\cdots\cdots+(2n)^p}$

解答　(1) $\frac25$　(2) 9　(3) $\frac{3^{p+1}-1}{2^{p+1}}$

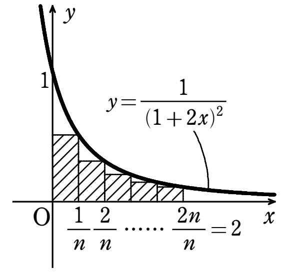
解説

求める極限値を S とする。

(1) $S=\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{(n+2k)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n^2}{(n+2k)^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\left(1+2\cdot\frac{k}{n}\right)^2}$

$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\left(1+2\cdot\frac{k}{n}\right)^2}$ とすると，S_n は右図の長方形の面積の和を表すから

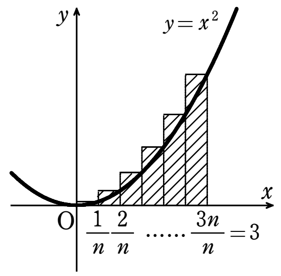


$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^2\frac{1}{(1+2x)^2}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2(1+2x)}\right]_0^2=\frac{2}{5}$$

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

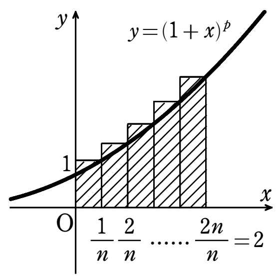
$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ とすると，S_n は右図の長方形の面積の和を表すから



$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^3x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9$$

(3) $\frac{(n+1)^p+(n+2)^p+\cdots\cdots+(n+2n)^p}{1^p+2^p+\cdots\cdots+(2n)^p}$

$=\frac{\sum_{k=1}^{2n}(n+k)^p}{\sum_{k=1}^{2n}k^p}=\frac{\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}$ であり

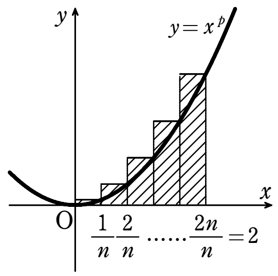


$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^p$

$=\int_0^2(1+x)^pdx$

$=\left[\frac{(1+x)^{p+1}}{p+1}\right]_0^2=\frac{3^{p+1}-1}{p+1}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$



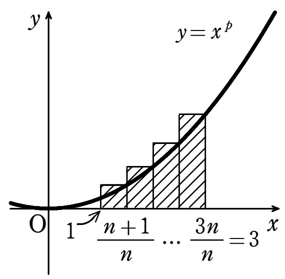
$=\int_0^2x^pdx$

$=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^2=\frac{2^{p+1}}{p+1}$

したがって　$S=\frac{3^{p+1}-1}{p+1}\cdot\frac{p+1}{2^{p+1}}=\frac{3^{p+1}-1}{2^{p+1}}$

別解　$\frac{(n+1)^p+(n+2)^p+\cdots\cdots+(n+2n)^p}{1^p+2^p+\cdots\cdots+(2n)^p}$

$=\frac{\sum_{k=n+1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}$ と考えると



$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$

$=\int_1^3x^pdx$

$=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^3=\frac{3^{p+1}-1}{p+1}$

以後は，上の解答と同じ。

14 極限値 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

解答　$\frac{27}{16}$

解説

$a_n=\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ とすると

$\log\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=\lim_{n\to\infty}(\log a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\log\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\log\frac{2+\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}dx$

$=\int_0^1\log(2+x)dx-\int_0^1\log(1+x)dx$

$=\Big[(2+x)\log(2+x)\Big]_0^1-\int_0^1dx-\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1+\int_0^1dx$

$=3\log3-2\log2-2\log2=\log\frac{27}{16}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{27}{16}$

15 極限値 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

解答　$\frac{4}{e}$

解説

$\log\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot2n}{n^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots\cdots+\log\frac{n+n}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{n+k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$=\int_0^1\log(1+x)dx=\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1=\log\frac{4}{e}$

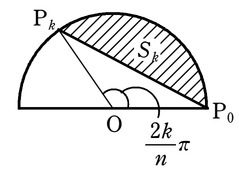
したがって　$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$

16 半径 1 の円周を n 等分する。ただし，$n\geqq2$ である。分点の 1 つを P_0 とし，残りの分点を P_0 から反時計回りに順番に P_1，P_2，……，P_{n-1} とする。
$1\leqq k\leqq n-1$ である k に対して，点 P_0 から反時計回りにとった円弧 P_0P_k と弦 P_0P_k で囲まれた部分の面積を S_k とする。
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}kS_k$ を求めよ。

解答　$\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4\pi}$

解説

円の中心を O とすると　$\angle P_0OP_k=\frac{2k}{n}\pi$

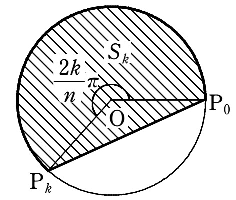


$\frac{2k}{n}\pi<\pi$ のとき

$S_k=$扇形 $OP_0P_k-\triangle OP_0P_k$

$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2k}{n}\pi-\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\frac{2k}{n}\pi$

$=\frac{k}{n}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{2k}{n}\pi$



$\frac{2k}{n}\pi\geqq\pi$ のとき

$S_k=$扇形 $OP_0P_k+\triangle OP_0P_k$

$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2k}{n}\pi+\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\left(2\pi-\frac{2k}{n}\pi\right)$

$=\frac{k}{n}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{2k}{n}\pi$

どちらの場合も同じ式で表されるから

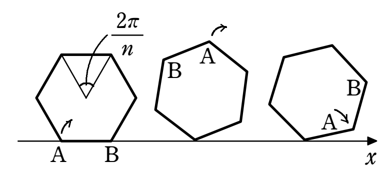
$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}kS_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2\pi-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n}\sin\frac{2k}{n}\pi\right\}$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2\pi-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n}\sin2\pi\frac{k}{n}\right\}-\frac{\pi}{n}$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}kS_k=\int_0^1\left(\pi x^2-\frac{1}{2}x\sin2\pi x\right)dx-\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}$

$=\left[\frac{\pi}{3}x^3\right]_0^1-\frac{1}{2}\left(\left[x\cdot\frac{\cos2\pi x}{-2\pi}\right]_0^1+\int_0^1\frac{\cos2\pi x}{2\pi}dx\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4\pi}$

17 半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。1 つの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上を滑らないように転がし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける。
点 A が描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。



図は $n=6$ の場合

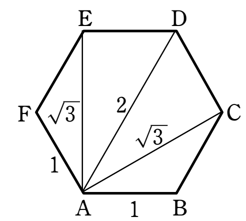
(1)　$L(6)$ を求めよ。　　(2)　$\lim_{n\to\infty}L(n)$ を求めよ。

解答　(1)　$\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi$　　(2)　8

解説

(1)　右の図の正六角形について

$AB=1$，$AC=\sqrt{3}$，$AD=2$，$AE=\sqrt{3}$，$AF=1$



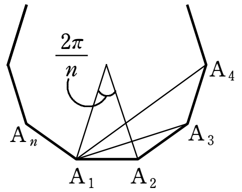
また，正六角形の 1 つの外角の大きさは $\frac{\pi}{3}$ である。

よって　$L(6)=\frac{\pi}{3}(1+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+1)$

$=\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\pi$

(2) 右の図の正 n 角形 $A_1A_2 \cdots\cdots A_n$ について

$$A_1A_k=2\sin\frac{k-1}{n}\pi \quad (k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$$



また，正 n 角形の1つの外角の大きさは $\frac{2\pi}{n}$ である。

$\sin\pi=0$ であるから

$$L(n)=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=2}^{n}2\sin\frac{k-1}{n}\pi$$

$$=\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k}{n}\pi=\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}L(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi=4\pi\int_0^1\sin\pi x\,dx=4\Big[-\cos\pi x\Big]_0^1=8$

18 次の極限値を，積分を用いて求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2k}{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\frac{3^3}{n^3}+\cdots\cdots+\frac{n^3}{n^3}\right)$

解答 (1) 0 (2) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ (3) $\frac{1}{4}$

解説

(1) $f(x)=\cos\pi x$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\cos\pi x\,dx=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1=0$$

(2) $f(x)=e^{2x}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3}+\frac{2^3}{n^3}+\frac{3^3}{n^3}+\cdots\cdots+\frac{n^3}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$

ここで，$f(x)=x^3$ とおくと

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

19 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots\cdots+(2n)^2\}$ ……(A) とおく。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いて，(A) の値を求めよ。

(2) (A) を定積分で表し，その値を計算せよ。

解答 (1) $\frac{7}{3}$ (2) $\displaystyle\int_0^1(1+x)^2dx$，$\frac{7}{3}$

解説

(1) $\displaystyle(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$$

よって $\displaystyle与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(7+\frac{1}{n}\right)$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 7=\frac{7}{3}$$

(2) $\displaystyle与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1(1+x)^2dx=\left[\frac{(1+x)^3}{3}\right]_0^1=\frac{7}{3}$

20 定積分を用いて，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{n}{n}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^2\right\}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\{(\sqrt{1}+\sqrt{n})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{n})^2+\cdots\cdots+(\sqrt{n}+\sqrt{n})^2\}$

解答 (1) $\frac{2}{\pi}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{2}\log 2$ (4) $\frac{17}{6}$

解説

(1) $\displaystyle与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$

(2) $\displaystyle与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

(3) $\displaystyle与式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

(4) $\displaystyle与式=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}(\sqrt{k}+\sqrt{n})^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+1\right)^2$

$$=\int_0^1(\sqrt{x}+1)^2dx=\int_0^1(x+2\sqrt{x}+1)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1=\frac{17}{6}$$

21 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{2n}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log\sqrt[n]{n+1}+\log\sqrt[n]{n+2}+\cdots\cdots+\log\sqrt[n]{2n}-\log n)$

解答 (1) $2\sqrt{2}-1$ (2) $2\log 2-1$

解説

(1) $$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots\cdots+\sqrt{2n}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots\cdots+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}\right]_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

したがって $\displaystyle与式=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\div\frac{2}{3}=2\sqrt{2}-1$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\sqrt[n]{n+k}-\log n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n+k)-\frac{1}{n}\cdot n\log n$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(n+k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log n$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(n+k)-\log n\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

よって $\displaystyle与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(1+x)\,dx$

$$=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1dx=2\log 2-1$$

22 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}\log\frac{n+k}{n}$ を求めよ。

解答 $\frac{1-\log 2}{2}$

解説

$$与式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\log(1+x)\,dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{1+x}\right)'\log(1+x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{1+x}\log(1+x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$=-\frac{\log 2}{2}+\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\frac{1-\log 2}{2}$$

23 次の極限値を，積分を用いて求めよ。

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n^3}}+\sqrt{\frac{n+2}{n^3}}+\cdots\cdots+\sqrt{\frac{n+n}{n^3}}\right)$$

解答 $\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$

解説

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+k}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n+k}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

ここで，$f(x)=\sqrt{1+x}$ とすると

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\left[(1+x)\sqrt{1+x}\right]_0^1$$

$$=\frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$$