定積分クイズ

1 (1) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\,d\theta = \left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(-1-1)$

$= 1$

解説

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dy}{y^3}$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$　(4) $\displaystyle\int_{-3}^0 2^x dx$

解答　(1) 1　(2) $\frac{3}{8}$　(3) 1　(4) $\frac{7}{8\log 2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_1^e = \log e - \log 1 = 1$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dy}{y^3} = \left[-\frac{1}{2y^2}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3}{8}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 = 1$

(4) $\displaystyle\int_{-3}^0 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_{-3}^0 = \frac{1}{\log 2}(2^0 - 2^{-3}) = \frac{1}{\log 2}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8\log 2}$

3 $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x-2}{x^2}dx = \int_1^2\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = 3\int_1^2\frac{dx}{x} - 2\int_1^2\frac{dx}{x^2}$

$\displaystyle= 3\Big[\log|x|\Big]_1^2 - 2\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 3\log 2 - 1$

解説

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x \sin 2x\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$

解答　(1) $\frac{2}{5}$　(2) $\frac{\pi}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\sin 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{-\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos x)\right\}dx$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 5x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{5}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2x)dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\Big[x\Big]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}$

5 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (e^x - e^{-x})dx$　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x-3)}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \sin 4x\,dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$

解答　(1) $e + \frac{1}{e} - 2$　(2) $-\frac{2}{3}\log 2$　(3) $\frac{8}{15}$　(4) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = \Big[e^x + e^{-x}\Big]_0^1 = (e + e^{-1}) - (e^0 + e^0) = e + \frac{1}{e} - 2$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x-3)} = \frac{1}{3}\int_1^2\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}\Big[\log|x-3| - \log|x|\Big]_1^2$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\left[\log\left|\frac{x-3}{x}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(\log\left|-\frac{1}{2}\right| - \log|-2|\right)$

$\displaystyle= -\frac{2}{3}\log 2$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos x\sin 4x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin 5x + \sin 3x)dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{5}\cos 5x\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi}\right) = \frac{8}{15}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

6 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}|\cos x|dx$ を求めよ。

解答　$2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

解説

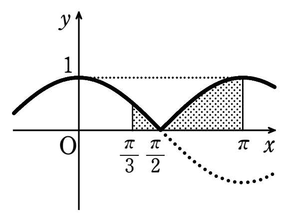
$\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

$|\cos x| = \cos x$

$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$|\cos x| = -\cos x$

であるから



$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}|\cos x|dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$

$\displaystyle= \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0-1)$

$\displaystyle= 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

7 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$　(2) $\displaystyle\int_0^4|\sqrt{x}-1|dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1|e^x - 2|dx$

解答　(1) 4　(2) 2　(3) $4\log 2 + e - 5$

解説

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$

であるから

$\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|dx = \int_0^{\pi}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx$

$\displaystyle= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$

$= \{1-(-1)\} + \{1-(-1)\} = 4$

別解　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|dx = 2\int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$= 2\{1-(-1)\} = 4$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$|\sqrt{x}-1| = -(\sqrt{x}-1)$

$1 \leqq x \leqq 4$ のとき　$|\sqrt{x}-1| = \sqrt{x}-1$

であるから

$\displaystyle\int_0^4|\sqrt{x}-1|dx = \int_0^1\{-(\sqrt{x}-1)\}dx + \int_1^4(\sqrt{x}-1)dx$

$\displaystyle= -\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right]_1^4$

$\displaystyle= -\left(\frac{2}{3}-1\right) + \left(\frac{16}{3}-4\right) - \left(\frac{2}{3}-1\right) = 2$

(3) $0 \leqq x \leqq \log 2$ のとき　$|e^x - 2| = -(e^x - 2)$

$\log 2 \leqq x \leqq 1$ のとき　$|e^x - 2| = e^x - 2$

であるから

$\displaystyle\int_0^1|e^x-2|dx = \int_0^{\log 2}\{-(e^x-2)\}dx + \int_{\log 2}^1(e^x-2)dx$

$\displaystyle= -\Big[e^x - 2x\Big]_0^{\log 2} + \Big[e^x - 2x\Big]_{\log 2}^1$

$= -(e^{\log 2} - 2\log 2) + (e^0 - 2\cdot 0) + (e^1 - 2\cdot 1) - (e^{\log 2} - 2\log 2)$

$= 4\log 2 + e - 5$

8 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1(2x+1)^3dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx$

解答　(1) 10　(2) $\frac{4}{3}$

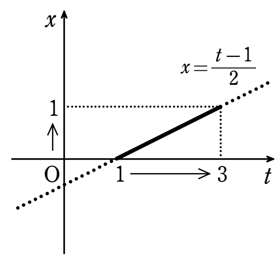
解説

(1) $2x+1 = t$ とおくと

$x = \frac{t-1}{2}$，$dx = \frac{1}{2}dt$

また，x と t の対応は次のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 3$



よって　$\displaystyle\int_0^1(2x+1)^3dx = \int_1^3 t^3\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int_1^3 t^3 dt$

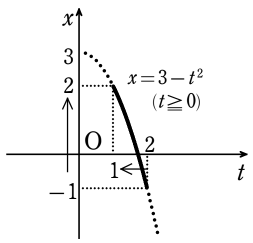
$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^3=10$

(2) $\sqrt{3-x}=t$ とおくと

$x=3-t^2,\ dx=-2t\,dt$

また，x と t の対応は次のようになる。

x	$-1 \longrightarrow 2$
t	$2 \longrightarrow 1$



よって $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{3-x}}dx=\int_2^1\frac{3-t^2}{t}\cdot(-2t)dt$

$=2\int_1^2(3-t^2)dt=2\left[3t-\frac{t^3}{3}\right]_1^2=\frac{4}{3}$

9 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1\frac{x-1}{(2-x)^2}dx$　(2) $\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 x)\sin x\,dx$

解答 (1) $\frac{1}{2}-\log 2$　(2) $\frac{14}{15}$　(3) $\frac{4}{3}$

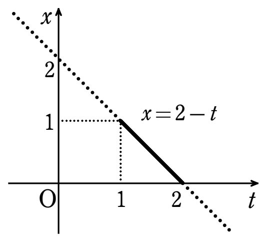
解説

(1) $2-x=t$ とおくと

$x=2-t,\ dx=(-1)dt$

また，x と t の対応は次のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$2 \longrightarrow 1$



よって

$\int_0^1\frac{x-1}{(2-x)^2}dx=\int_2^1\frac{1-t}{t^2}\cdot(-1)dt=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt$

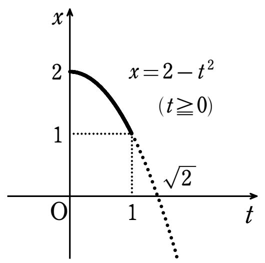
$=\left[-\frac{1}{t}-\log|t|\right]_1^2=\frac{1}{2}-\log 2$

(2) $\sqrt{2-x}=t$ とおくと

$x=2-t^2,\ dx=-2t\,dt$

また，x と t の対応は次のようになる。

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$1 \longrightarrow 0$



よって

$\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx=\int_1^0(2-t^2)t\cdot(-2t)dt$

$=2\int_0^1(2t^2-t^4)dt=2\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{14}{15}$

(3) $\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

また，x と t の対応は次のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \longrightarrow 0$

よって

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 x)\sin x\,dx=-\int_1^0(1+t^2)dt=\int_0^1(t^2+1)dt$

$=\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1=\frac{4}{3}$

10 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$　(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$　(3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解答 (1) $\frac{\pi}{2}$　(2) $\pi+\sqrt{3}$　(3) $\frac{\pi}{6}$

解説

(1) $x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$

よって

$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$-1 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

また $-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\cos\theta$

よって

$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\cos^2\theta\,d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$=2\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\pi+\sqrt{3}$

(3) $x=\sin\theta$ とおくと　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$

よって　$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$

11 定積分 $\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}$ を求めよ。

解答 $\frac{\pi}{4}$

解説

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

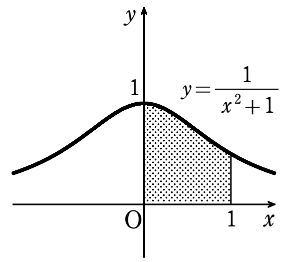
x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$



12 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$　(2) $\int_{-2}^2\frac{dx}{x^2+4}$　(3) $\int_{-3}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+9}$

解答 (1) $\frac{\pi}{3}$　(2) $\frac{\pi}{4}$　(3) $\frac{5}{36}\pi$

解説

(1) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって

$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$

(2) $x=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$-2 \longrightarrow 2$
θ	$-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$\int_{-2}^2\frac{dx}{x^2+4}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

(3) $x=3\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$-3 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

よって

$\int_{-3}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+9}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{1}{3}\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{5}{36}\pi$

13 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$

解答　(1) 2　(2) 0

解説

(1) $\cos x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$$

(2) $\sin x$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx=0$

14 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)(x-3)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx$

解答　(1) -8　(2) 0

解説

(1) $(1+x^2)(x-3)=x^3-3x^2+x-3$

x^3，x は奇関数，$-3x^2$，-3 は偶関数であるから

$$\int_{-1}^{1}(1+x^2)(x-3)dx=2\int_0^1(-3x^2-3)dx=-2\Big[x^3+3x\Big]_0^1=-8$$

(2) $x\sqrt{4-x^2}$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-2}^{2}x\sqrt{4-x^2}\,dx=0$

15 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$ を求めよ。

解答　$\dfrac{\pi}{2}-1$

解説

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'dx$$
$$=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x)'\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

16 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_e^{2e}\log x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$

解答　(1) π　(2) 1　(3) $2\log 2-\dfrac{3}{4}$　(4) $2e\log 2$　(5) $\pi-2$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=\int_0^{\pi}x(-\cos x)'dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(x)'(-\cos x)dx$

$$=\pi+\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x(e^x)'dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1(x)'e^x dx$

$$=e-\int_0^1 e^x dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1=1$$

(3) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx=\frac{1}{2}\Big[x^2\log x\Big]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\cdot(\log x)'dx$

$$=2\log 2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{x}dx=2\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$
$$=2\log 2-\frac{3}{4}$$

(4) $\displaystyle\int_e^{2e}\log x\,dx=\int_e^{2e}(x)'\log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_e^{2e}-\int_e^{2e}x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=2e\log 2e-e-\int_e^{2e}dx=2e(\log 2+1)-2e$$
$$=2e\log 2$$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(-\cos x)'dx=\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cos x\,dx$

$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'dx=2\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\pi+2\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$

17 部分積分法によって，次の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)dx$$

解答　$-\dfrac{8}{5}$

解説

$$\int_{-1}^{1}(x+1)^3(x-1)dx=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{(x+1)^4}{4}\right\}'(x-1)dx$$
$$=\frac{1}{4}\Big[(x+1)^4(x-1)\Big]_{-1}^{1}-\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(x+1)^4dx$$
$$=0-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\Big[(x+1)^5\Big]_{-1}^{1}=-\frac{8}{5}$$

18 部分積分法によって，次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^2dx$　　(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$　(α，β は定数)

解答　(1) $\dfrac{1}{12}$　(2) $-\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^2dx=\int_0^1 x\left\{\frac{(x-1)^3}{3}\right\}'dx$

$$=\frac{1}{3}\Big[x(x-1)^3\Big]_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3dx$$
$$=0-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\Big[(x-1)^4\Big]_0^1=\frac{1}{12}$$

(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta\left\{\frac{1}{2}(x-\alpha)^2\right\}'(x-\beta)dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[(x-\alpha)^2(x-\beta)\Big]_\alpha^\beta-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2dx$$
$$=0-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_\alpha^\beta=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

19 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^6\left(\frac{1}{3}x-1\right)^4dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2+\cos x}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x\log(x+1)dx$　　(5) $\displaystyle\int_0^1(x^2+1)e^x dx$　　(6) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

解答　(1) $\dfrac{6}{5}$　(2) $\log\dfrac{e+1}{2}$　(3) $\log\dfrac{3}{2}$　(4) $\dfrac{3}{2}\log 3-\dfrac{1}{4}$　(5) $2e-3$

(6) $\log\dfrac{e+1}{\sqrt{e^2+1}}$

解説

(1) $\dfrac{1}{3}x-1=t$ とおくと　$x=3t+3$，$dx=3dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 6$
t	$-1\longrightarrow 1$

よって

$$\int_0^6\left(\frac{1}{3}x-1\right)^4dx=\int_{-1}^{1}t^4\cdot 3dt=3\cdot 2\int_0^1 t^4dt$$
$$=6\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{6}{5}$$

別解　$\displaystyle\int_0^6\left(\frac{1}{3}x-1\right)^4dx=\frac{3}{5}\left[\left(\frac{1}{3}x-1\right)^5\right]_0^6$

$$=\frac{3}{5}\{1-(-1)\}=\frac{6}{5}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\Big[\log|e^x+1|\Big]_0^1$

$$=\log(e+1)-\log 2=\log\frac{e+1}{2}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2+\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2+\cos x)'}{2+\cos x}dx=-\Big[\log|2+\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=-(\log 2-\log 3)=\log\frac{3}{2}$$

(4) $\displaystyle\int_1^2 x\log(x+1)dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log(x+1)dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\log(x+1)\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}dx$$
$$=2\log 3-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\int_1^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=2\log 3-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-x+\log|x+1|\right]_1^2$$
$$=2\log 3-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\left\{\log 3-\left(-\frac{1}{2}+\log 2\right)\right\}$$
$$=\frac{3}{2}\log 3-\frac{1}{4}$$

別解　$\displaystyle\int_1^2 x\log(x+1)dx=\int_1^2\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\log(x+1)dx$

$$=\left[\frac{x^2-1}{2}\log(x+1)\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\frac{3}{2}\log 3-\frac{1}{2}\int_1^2(x-1)dx$$
$$=\frac{3}{2}\log 3-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{2}\log 3-\frac{1}{4}$$

(5) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^x dx=\int_0^1 (x^2+1)(e^x)' dx$

$$=\Big[(x^2+1)e^x\Big]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx$$

$$=2e-1-2\int_0^1 x(e^x)'dx$$

$$=2e-1-2\Big[xe^x\Big]_0^1+2\int_0^1 e^x dx$$

$$=2e-1-2e+2\Big[e^x\Big]_0^1$$

$$=2e-3$$

(6) $e^x=t$ とおくと　$e^x dx=dt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$1\longrightarrow 2$
t	$e\longrightarrow e^2$

よって

$$\int_1^2 \frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int_e^{e^2}\frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\int_e^{e^2}\frac{dt}{(t+1)(t-1)}=\frac{1}{2}\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|t-1|-\log|t+1|\Big]_e^{e^2}=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_e^{e^2}$$

$$=\log\frac{e+1}{\sqrt{e^2+1}}$$

20 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$　(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{|x-1|}{x}dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+2\cos x-\sin x)^2 dx$　(5) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos x+\cos 2x)dx$　(7) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(e^x+e^{-x})^3 dx$

解答 (1) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{3}{2}$　(2) $e+\dfrac{1}{e}-2$　(3) $\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$　(4) 7π　(5) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$

(6) 0　(7) $\dfrac{2}{3}e^6+6e^2-\dfrac{6}{e^2}-\dfrac{2}{3e^6}$

解説

(1) $\displaystyle\int_2^3\frac{dx}{x^2-1}=\int_2^3\frac{dx}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log|x-1|-\log|x+1|\Big]_2^3$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^3=\frac{1}{2}\left(\log\frac{2}{4}-\log\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\cdot 3\right)=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$$

(2) $\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq 1$ のとき　$|x-1|=-x+1$

$1\leqq x\leqq e$　のとき　$|x-1|=x-1$

であるから

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{|x-1|}{x}dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{-x+1}{x}dx+\int_1^e\frac{x-1}{x}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(-1+\frac{1}{x}\right)dx+\int_1^e\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\Big[-x+\log|x|\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}+\Big[x-\log|x|\Big]_1^e$$

$$=(-1+0)-\left(-\frac{1}{e}+\log\frac{1}{e}\right)+(e-\log e)-(1-0)$$

$$=e+\frac{1}{e}-2$$

(3) $\sqrt{9-x^2}$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$x=3\sin\theta$ とおくと　$dx=3\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\longrightarrow \frac{3}{2}$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}=3\cos\theta$$

よって

$$2\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}3\cos\theta\cdot 3\cos\theta\,d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2\theta)d\theta=9\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{3}{2}\pi+\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

(4) $(1+2\cos x-\sin x)^2=1+4\cos^2 x+\sin^2 x+4\cos x-2\sin x-4\cos x\sin x$

$$=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\cos 2x+4\cos x-2\sin x-2\sin 2x$$

よって

$$\int_0^{2\pi}(1+2\cos x-\sin x)^2 dx=\left[\frac{7}{2}x+\frac{3}{4}\sin 2x+4\sin x+2\cos x+\cos 2x\right]_0^{2\pi}$$

$$=(7\pi+2+1)-(2+1)=7\pi$$

参考　積分区間が 0 から 2π までであるから，面積を考えて

$$\int_0^{2\pi}\cos 2x\,dx=0,\ \int_0^{2\pi}\cos x\,dx=0,\ \int_0^{2\pi}\sin 2x\,dx=0,\ \int_0^{2\pi}\sin x\,dx=0$$

を用いると

$$与式=\int_0^{2\pi}\frac{7}{2}dx=\frac{7}{2}\Big[x\Big]_0^{2\pi}=7\pi$$

となり，計算が簡単になる。

(5) $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$ は偶関数，$\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ は奇関数であるから

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=2\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx+0=2\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$$2\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(6) $x\cos x$ は奇関数，$\cos 2x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos x+\cos 2x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\,dx$$

$$=0+2\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=2\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=0$$

(7) $(e^x+e^{-x})^3$ は偶関数であるから

$$\int_{-2}^{2}(e^x+e^{-x})^3 dx=2\int_0^2(e^x+e^{-x})^3 dx$$

$$=2\int_0^2(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x})dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}e^{3x}+3e^x-3e^{-x}-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^2$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{3}e^6+3e^2-3e^{-2}-\frac{1}{3}e^{-6}\right)-\left(\frac{1}{3}+3-3-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$=2\left(\frac{1}{3}e^6+3e^2-\frac{3}{e^2}-\frac{1}{3e^6}\right)$$

$$=\frac{2}{3}e^6+6e^2-\frac{6}{e^2}-\frac{2}{3e^6}$$

21 次の定積分を求めよ。[(1)(2)(3) 各 12 点　(4) 14 点]

(1) $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{x^2+1}{x^3}dx$　(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\cos 2x\,dx$　(4) $\displaystyle\int_0^2|e^x-3|dx$

解答 (1) $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{x^2+1}{x^3}dx=\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{x}+x^{-3}\right)dx$

$$=\left[\log|x|-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{e^2}$$

$$=\log e^2-\frac{1}{2e^4}+\frac{1}{2}$$

$$=2-\frac{1}{2e^4}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{2e^4}$$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}=\left[-\frac{1}{\tan\theta}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-1+\sqrt{3}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 5x+\cos x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+1\right)=\frac{3}{5}$$

(4) $0\leqq x\leqq\log 3$ のとき　$|e^x-3|=3-e^x$

$\log 3\leqq x\leqq 2$ のとき　$|e^x-3|=e^x-3$

であるから

$$\int_0^2 |e^x-3|\,dx=\int_0^{\log 3}(3-e^x)dx+\int_{\log 3}^2(e^x-3)dx$$
$$=\Big[3x-e^x\Big]_0^{\log 3}+\Big[e^x-3x\Big]_{\log 3}^2$$
$$=3\log 3-3+1+e^2-6-3+3\log 3$$
$$=6\log 3+e^2-11$$

解説

(1) $\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{x^2+1}{x^3}dx=\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{x}+x^{-3}\right)dx$

$$=\left[\log|x|-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{e^2}$$
$$=\log e^2-\frac{1}{2e^4}+\frac{1}{2}$$
$$=2-\frac{1}{2e^4}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{2e^4}$$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sin^2\theta}=\left[-\frac{1}{\tan\theta}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-1+\sqrt{3}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 5x+\cos x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin 5x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+1\right)=\frac{3}{5}$$

(4) $0\leqq x\leqq \log 3$ のとき　$|e^x-3|=3-e^x$

$\log 3\leqq x\leqq 2$ のとき　$|e^x-3|=e^x-3$

であるから

$$\int_0^2 |e^x-3|\,dx=\int_0^{\log 3}(3-e^x)dx+\int_{\log 3}^2(e^x-3)dx$$
$$=\Big[3x-e^x\Big]_0^{\log 3}+\Big[e^x-3x\Big]_{\log 3}^2$$
$$=3\log 3-3+1+e^2-6-3+3\log 3$$
$$=6\log 3+e^2-11$$

22 次の定積分を求めよ。[(1)(2)(3) 各 12 点　(4) 14 点]

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{x^2+2}$

解答 (1) $\sqrt{1-2x}=t$ とおくと　$x=\dfrac{1-t^2}{2}$，$dx=-tdt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
t	$1\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x}\,dx=\int_1^0 t(-t)dt=\int_0^1 t^2dt$

$$=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^2\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx=\Big[\log|e^x+e^{-x}|\Big]_0^2$

$$=\log(e^2+e^{-2})-\log(1+1)=\log\frac{e^4+1}{2e^2}$$

(3) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1\longrightarrow\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

よって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(4) $x=\sqrt{2}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$-\sqrt{2}\longrightarrow\sqrt{6}$
θ	$-\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{x^2+2}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{7\sqrt{2}\pi}{24}$$

解説

(1) $\sqrt{1-2x}=t$ とおくと　$x=\dfrac{1-t^2}{2}$，$dx=-tdt$

また，x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
t	$1\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x}\,dx=\int_1^0 t(-t)dt=\int_0^1 t^2dt$

$$=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^2\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx=\Big[\log|e^x+e^{-x}|\Big]_0^2$

$$=\log(e^2+e^{-2})-\log(1+1)=\log\frac{e^4+1}{2e^2}$$

(3) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1\longrightarrow\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

よって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

(4) $x=\sqrt{2}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$-\sqrt{2}\longrightarrow\sqrt{6}$
θ	$-\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{x^2+2}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{7\sqrt{2}\pi}{24}$$

23 次の定積分を求めよ。[各 6 点]

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin^2x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos 3x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^9|\sqrt{x}-1|dx$

解答 (1) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}x\,dx-\int_0^{\pi}x\cos 2x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx\right\}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\Big[x\sin 2x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx\right)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)dx=\int_0^1\frac{1}{2}(x^2+1)'\log(x^2+1)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2+1)\log(x^2+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$=\log 2-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\log 2-\frac{1}{2}$$

(3) $\sin(-x)\cos(-3x)=-\sin x\cos 3x$ より，$\sin x\cos 3x$ は奇関数である。

よって　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos 3x\,dx=0$

(4) $\displaystyle\int_0^9|\sqrt{x}-1|dx=\int_0^1(1-\sqrt{x})dx+\int_1^9(\sqrt{x}-1)dx$

$$=\left[x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^9=\frac{29}{3}$$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}x\,dx-\int_0^{\pi}x\cos 2x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx\right\}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{4}\left(\Big[x\sin 2x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx\right)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)dx=\int_0^1\frac{1}{2}(x^2+1)'\log(x^2+1)dx$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2+1)\log(x^2+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$=\log 2-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\log 2-\frac{1}{2}$$

(3) $\sin(-x)\cos(-3x)=-\sin x\cos 3x$ より，$\sin x\cos 3x$ は奇関数である。

よって　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos 3x\,dx=0$

(4) $\displaystyle\int_0^9|\sqrt{x}-1|dx=\int_0^1(1-\sqrt{x})dx+\int_1^9(\sqrt{x}-1)dx$

$$=\left[x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^9=\frac{29}{3}$$

24 次の定積分を求めよ。[各 10 点]

(1) $\displaystyle\int_e^{e^3}\frac{dx}{x\log x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2x}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{e^{x^2}}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^2|e^x-e|dx$

解答 (1) $\displaystyle\int_e^{e^3}\frac{dx}{x\log x}=\int_e^{e^3}\frac{(\log x)'}{\log x}dx=\Big[\log|\log x|\Big]_e^{e^3}$

$=\log(\log e^3)-\log(\log e)=\log 3$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

(3) $x^2=t$ とおくと　$2xdx=dt$

また，x と t の対応は右のようになる。よって

x	$0\to 1$
t	$0\to 1$

$\displaystyle\int_0^1\frac{x}{e^{x^2}}dx=\int_0^1\frac{1}{e^t}\cdot\frac{1}{2}dt=\Big[-\frac{1}{2}e^{-t}\Big]_0^1=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{e}\Big)$

(4) $\displaystyle\int_0^2|e^x-e|dx=\int_0^1(e-e^x)dx+\int_1^2(e^x-e)dx$

$\displaystyle=\Big[ex-e^x\Big]_0^1+\Big[e^x-ex\Big]_1^2=e^2-2e+1$

解説

(1) $\displaystyle\int_e^{e^3}\frac{dx}{x\log x}=\int_e^{e^3}\frac{(\log x)'}{\log x}dx=\Big[\log|\log x|\Big]_e^{e^3}$

$=\log(\log e^3)-\log(\log e)=\log 3$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$

(3) $x^2=t$ とおくと　$2xdx=dt$

また，x と t の対応は右のようになる。よって

x	$0\to 1$
t	$0\to 1$

$\displaystyle\int_0^1\frac{x}{e^{x^2}}dx=\int_0^1\frac{1}{e^t}\cdot\frac{1}{2}dt=\Big[-\frac{1}{2}e^{-t}\Big]_0^1=\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{e}\Big)$

(4) $\displaystyle\int_0^2|e^x-e|dx=\int_0^1(e-e^x)dx+\int_1^2(e^x-e)dx$

$\displaystyle=\Big[ex-e^x\Big]_0^1+\Big[e^x-ex\Big]_1^2=e^2-2e+1$

25 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ。[15 点]

解答　$x=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\to\frac{1}{2}$
θ	$0\to\frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin\theta\cos\theta)^2d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{8}\Big[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{8}\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\Big)=\frac{\pi}{48}-\frac{\sqrt{3}}{64}$

解説

$x=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0\to\frac{1}{2}$
θ	$0\to\frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin\theta\cos\theta)^2d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{8}\Big[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{8}\Big(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\Big)=\frac{\pi}{48}-\frac{\sqrt{3}}{64}$

26 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$ を求めよ。[15 点]

解答　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=-\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

$\displaystyle=e^{\pi}+1-\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

よって　$\displaystyle 2\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=e^{\pi}+1$　　　ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$

解説

$\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\Big[e^x\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=-\Big[e^x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

$\displaystyle=e^{\pi}+1-\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$

よって　$\displaystyle 2\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=e^{\pi}+1$　　　ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$

27 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos 2\theta\,d\theta$　　(4) $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}dx$

解答　(1) $\frac{14}{3}$　(2) 0　(3) 0　(4) $\log 2$

解説

(1) $\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_1^4=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi}=(-1)-(-1)=0$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos 2\theta\,d\theta=\Big[\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi}=0-0=0$

(4) $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^2=\log 2-\log 1=\log 2$

28 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^4(e^x+\cos x)dx-\int_1^4\cos x\,dx-\int_1^4\Big(e^x-\frac{1}{x}\Big)dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 e^x dx-\int_{-1}^1 e^x dx$

解答　(1) $2\log 2$　(2) e^2-e

解説

(1) $\displaystyle\int_1^4(e^x+\cos x)dx-\int_1^4\cos x\,dx-\int_1^4\Big(e^x-\frac{1}{x}\Big)dx$

$\displaystyle=\int_1^4\Big(e^x+\cos x-\cos x-e^x+\frac{1}{x}\Big)dx$

$\displaystyle=\int_1^4\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^4=\log 4-\log 1=2\log 2$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 e^x dx-\int_{-1}^1 e^x dx=\Big(\int_{-1}^1 e^x dx+\int_1^2 e^x dx\Big)-\int_{-1}^1 e^x dx$

$\displaystyle=\int_1^2 e^x dx=\Big[e^x\Big]_1^2=e^2-e$

29 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{4x-1}{2x^2+5x+2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^e\frac{\log x}{x}dx$

解答　(1) $2\log 3-3\log 2$　(2) $\frac{3}{8}\pi$　(3) $\frac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\frac{4x-1}{2x^2+5x+2}=\frac{4x-1}{(x+2)(2x+1)}=\frac{3}{x+2}-\frac{2}{2x+1}$

$\displaystyle\int_0^1\frac{4x-1}{2x^2+5x+2}dx=\int_0^1\Big(\frac{3}{x+2}-\frac{2}{2x+1}\Big)dx$

$\displaystyle=\Big[3\log(x+2)-2\cdot\frac{1}{2}\log(2x+1)\Big]_0^1$

$=(3\log 3-\log 3)-(3\log 2-0)$

$=2\log 3-3\log 2$

(2) $\displaystyle\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=\Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^2=\frac{1}{4}\Big(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\Big)$

$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\Big(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\Big)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\Big[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\Big]_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi$

(3) $\displaystyle\frac{\log x}{x}=(\log x)(\log x)'$ であるから

$\displaystyle\int_1^e\frac{\log x}{x}dx=\Big[\frac{1}{2}(\log x)^2\Big]_1^e=\frac{1}{2}(1^2-0^2)=\frac{1}{2}$

30 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+2}{x+2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^2+2x}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^9\frac{1}{\sqrt{x+16}+\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^2dx$　　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$

(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}dx$　　(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^{2x}}dx$

解答　(1) $-\frac{3}{2}+6\log\frac{3}{2}$　(2) $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$　(3) $\frac{17}{12}$　(4) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

(5) $\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{3}}{32}$　(6) $\frac{\pi}{4}-1$　(7) $\frac{1-e^{-2}}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+2}{x+2}dx=\int_0^1\frac{(x+2)(x-2)+6}{x+2}dx=\int_0^1\Big(x-2+\frac{6}{x+2}\Big)dx$

$\displaystyle=\Big[\frac{x^2}{2}-2x+6\log(x+2)\Big]_0^1$

$=\frac{1}{2}-2+6\log 3-6\log 2=-\frac{3}{2}+6\log\frac{3}{2}$

(2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x}dx=\int_1^2\frac{1}{x(x+2)}dx=\int_1^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\Big[\log x-\log(x+2)\Big]_1^2$

$=\frac{1}{2}(\log 2-\log 4+\log 3)=\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$

(3) $\int_0^9\frac{1}{\sqrt{x+16}+\sqrt{x}}dx=\int_0^9\frac{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+16}+\sqrt{x})(\sqrt{x+16}-\sqrt{x})}dx$

$=\int_0^9\frac{\sqrt{x+16}-\sqrt{x}}{16}dx$

$=\frac{1}{16}\int_0^9\left\{(x+16)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right\}dx$

$=\frac{1}{16}\Big[\frac{2}{3}(x+16)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^9$

$=\frac{17}{12}$

(4) $(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$

$=1+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin 2x)dx=\Big[x-\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

(5) $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin^4 x+\cos^4 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)dx=\Big[\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{3}}{32}$

(6) $\frac{\sin 3x}{\sin x}=\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{\sin x}=3-4\sin^2 x=3-4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=1+2\cos 2x$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x)dx=\Big[x+\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-1$

(7) $\int_0^1\frac{1}{e^{2x}}dx=\int_0^1 e^{-2x}dx=\Big[\frac{e^{-2x}}{-2}\Big]_0^1=\frac{1-e^{-2}}{2}$

31 定積分 $I=\int_0^{\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|dx$ を求めよ。

解答 4

解説

$|\sin x-\sqrt{3}\cos x|=\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\begin{cases}-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) & \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}\right)\\ 2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) & \left(\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi\right)\end{cases}$

よって　$I=\int_0^{\pi}\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$

$=2\left\{\Big[\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\Big[\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\right\}$

$=2\left\{2\cos 0-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\frac{2}{3}\pi\right\}=2\left(2\cdot 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=4$

32 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{4-|x|x}{2+x}dx$　(2) $\int_0^2|2^x-2|dx$　(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$

(4) $\int_0^{\pi}\left|\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$　(5) $\int_0^{\pi}|\sqrt{3}\sin x-\cos x-1|dx$

解答 (1) $8\log 2-1$　(2) $\frac{1}{\log 2}$　(3) $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$　(4) $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$

(5) $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

解説

(1) $x\leqq 0$ のとき　$|x|=-x$　　$x\geqq 0$ のとき　$|x|=x$

よって　$\int_{-1}^{1}\frac{4-|x|x}{2+x}dx=\int_{-1}^{0}\frac{4+x^2}{2+x}dx+\int_0^1(2-x)dx$

$=\int_{-1}^{0}\left(x-2+\frac{8}{x+2}\right)dx+\int_0^1(-x+2)dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^2-2x+8\log(x+2)\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_0^1$

$=8\log 2-\left(\frac{1}{2}+2\right)+\left(-\frac{1}{2}+2\right)=8\log 2-1$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|2^x-2|=-(2^x-2)$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき　$|2^x-2|=2^x-2$

よって　$\int_0^2|2^x-2|dx=-\int_0^1(2^x-2)dx+\int_1^2(2^x-2)dx$

$=-\Big[\frac{2^x}{\log 2}-2x\Big]_0^1+\Big[\frac{2^x}{\log 2}-2x\Big]_1^2$

$=-\left(\frac{1}{\log 2}-2\right)+\left(\frac{2}{\log 2}-2\right)=\frac{1}{\log 2}$

(3) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき　$\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|=\cos x-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx$

$=\Big[\sin x-\frac{x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\Big[\sin x-\frac{x}{2}\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-0-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

(4) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$\cos\frac{\theta}{2}\geqq 0$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$,　$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $\cos\theta\leqq 0$

また　$\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}\theta+\cos\frac{\theta}{2}\right)$

$\int_0^{\pi}\left|\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}d\theta$

$=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=\Big[\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\theta+\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\theta+\sin\frac{\theta}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-0-\left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)+1\right\}=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$

(5) $|\sqrt{3}\sin x-\cos x-1|=\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right|$

$=\begin{cases}-\left\{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right\} & \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}\right)\\ 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1 & \left(\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi\right)\end{cases}$

$\int_0^{\pi}|\sqrt{3}\sin x-\cos x-1|dx=\int_0^{\pi}\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right|dx$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right\}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left\{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right\}dx$

$=-\Big[-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=\Big[2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\Big[2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=2\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left\{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi\right\}$

$=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

33 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 2x(x^2+2)^2dx$　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$　(3) $\int_1^{\sqrt{2}}2x\,10^{x^2}dx$

解答 (1) $\frac{19}{3}$　(2) $\sqrt{2}-1$　(3) $\frac{90}{\log 10}$

解説

(1) $\int_0^1 2x(x^2+2)^2dx=\int_0^1(x^2+2)^2(x^2+2)'dx$

$=\Big[\frac{1}{3}(x^2+2)^3\Big]_0^1=\frac{1}{3}(3^3-2^3)=\frac{19}{3}$

(2) $\cos\theta=x$ とおくと　$-\sin\theta\,d\theta=dx$

θ と x の対応は右のようになる。

θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$
x	$1\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\Big[\frac{1}{x}\Big]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1$

(3) $x^2=t$ とおくと　$2x\,dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$1\longrightarrow\sqrt{2}$
t	$1\longrightarrow 2$

よって　$\int_1^{\sqrt{2}}2x10^{x^2}dx=\int_1^2 10^t dt=\Big[\frac{10^t}{\log 10}\Big]_1^2$

$=\frac{90}{\log 10}$

34 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-2}^{2}x^5dx$　(2) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx$　(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$

解答 (1) 0　(2) 1　(3) 0

解説

(1) $(-x)^5=-x^5$ であるから，x^5 は奇関数である。

よって　$\int_{-2}^{2} x^5 dx=0$

(2)　$\cos(-x)=\cos x$ であるから，$\cos x$ は偶関数である。

よって　$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$$=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

(3)　$\sin(-x)=-\sin x$ であるから，$\sin x$ は奇関数である。

よって　$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx=0$

35 次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_0^1 xe^x dx$　　(2)　$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$　　(3)　$\int_1^e x\log\sqrt{x}\,dx$

解答　(1)　1　　(2)　π　　(3)　$\frac{1}{8}(e^2+1)$

解説

(1)　$\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x(e^x)'dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx$

$$=e-\Big[e^x\Big]_0^1=e-(e-1)=1$$

(2)　$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx=\int_0^{\pi} x(-\cos x)'dx$

$$=\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)dx$$

$$=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi$$

(3)　$\int_1^e x\log\sqrt{x}\,dx=\int_1^e \frac{1}{2}x\log x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$

$$=\frac{1}{4}\Big[x^2\log x\Big]_1^e-\frac{1}{4}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\int_1^e x\,dx$$

$$=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{8}(e^2+1)$$

36 次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx$　　(2)　$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx$　　(3)　$\int_{\log\pi}^{\log 2\pi} e^x\sin e^x dx$

解答　(1)　$\frac{22}{3}$　　(2)　$-\frac{1}{2}\log 2$　　(3)　-2

解説

(1)　$\sqrt{6-x}=t$ とおくと　　$x=6-t^2$，$dx=-2t\,dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$2 \longrightarrow 5$
t	$2 \longrightarrow 1$

よって　$\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{6-x}}dx=\int_2^1 \frac{6-t^2}{t}\cdot(-2t)dt=2\int_1^2(6-t^2)dt$

$$=2\left[6t-\frac{t^3}{3}\right]_1^2=\frac{22}{3}$$

(2)　$\cos x=t$ とおくと

$-\sin x\,dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi$
t	$0 \longrightarrow -1$

よって

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{-1}\frac{t}{1+t^2}\cdot(-1)dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^0\frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+t^2)\Big]_{-1}^0=\frac{1}{2}(\log 1-\log 2)$$

$$=-\frac{1}{2}\log 2$$

別解　$(1+\cos^2 x)'=-2\sin x\cos x$ であるから

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{(1+\cos^2 x)'}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2}\Big[\log(1+\cos^2 x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}(\log 2-\log 1)=-\frac{1}{2}\log 2$$

(3)　$e^x=t$ とおくと　　$e^x dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$\log\pi \longrightarrow \log 2\pi$
t	$\pi \longrightarrow 2\pi$

よって　$\int_{\log\pi}^{\log 2\pi} e^x\sin e^x dx=\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_{\pi}^{2\pi}$

$$=-\{1-(-1)\}=-2$$

37 次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_{-1}^0 \frac{x^3}{(1-x)^2}dx$　　(2)　$\int_0^3 (5x+2)\sqrt{x+1}\,dx$

(3)　$\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^a dx$　$(a>0)$　　(4)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$

(5)　$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x+4\cos x+3}dx$　　(6)　$\int_0^1\frac{1}{e^x+2e^{-x}+3}dx$

解答　(1)　$2-3\log 2$　　(2)　48　　(3)　$\frac{2a^3}{(a+1)(a+2)(a+3)}$　　(4)　$\frac{1}{2}$

(5)　$\frac{1}{2}\log\frac{7}{6}$　　(6)　$\log\frac{3(e+1)}{2(e+2)}$

解説

(1)　$1-x=t$ とおくと　　$x=1-t$，$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-1 \longrightarrow 0$
t	$2 \longrightarrow 1$

$$\int_{-1}^0\frac{x^3}{(1-x)^2}dx=\int_2^1\frac{(1-t)^3}{t^2}\cdot(-1)dt$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+3-t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{t}-3\log t+3t-\frac{t^2}{2}\right]_1^2=2-3\log 2$$

(2)　$\sqrt{x+1}=t$ とおくと　　$x=t^2-1$，$dx=2t\,dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 3$
t	$1 \longrightarrow 2$

$$\int_0^3(5x+2)\sqrt{x+1}\,dx=\int_1^2(5t^2-3)t\cdot 2t\,dt$$

$$=2\int_1^2(5t^4-3t^2)dt=2\Big[t^5-t^3\Big]_1^2=48$$

(3)　$1-\frac{x}{a}=t$ とおくと　　$x=a(1-t)$，$dx=-a\,dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow a$
t	$1 \longrightarrow 0$

$a>0$ であるから

$$\int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^a dx=\int_1^0\{a(1-t)\}^2t^a\cdot(-a)dt$$

$$=a^3\int_0^1(t^a-2t^{a+1}+t^{a+2})dt$$

$$=a^3\left[\frac{t^{a+1}}{a+1}-2\cdot\frac{t^{a+2}}{a+2}+\frac{t^{a+3}}{a+3}\right]_0^1$$

$$=\frac{2a^3}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

(4)　$\cos x=t$ とおくと　　$-\sin x\,dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \longrightarrow 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\cdot\sin x\,dx$$

$$=\int_1^0\frac{1-t^2}{1+t}\cdot(-1)dt=\int_0^1(1-t)dt$$

$$=\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

(5)　$\cos x=t$ とおくと　　$-\sin x\,dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$
t	$1 \longrightarrow \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos^2 x+4\cos x+3}dx=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{-1}{t^2+4t+3}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(t+1)-\log(t+3)\Big]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}\left[\log\frac{t+1}{t+3}\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{7}{6}$$

(6)　$e^x=t$ とおくと　　$e^x dx=dt$，$dx=\frac{1}{t}dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow e$

$$\int_0^1\frac{1}{e^x+2e^{-x}+3}dx=\int_1^e\frac{1}{t+\frac{2}{t}+3}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\int_1^e\frac{1}{t^2+3t+2}dt=\int_1^e\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\Big[\log(t+1)-\log(t+2)\Big]_1^e=\left[\log\frac{t+1}{t+2}\right]_1^e$$

$$=\log\frac{e+1}{e+2}-\log\frac{2}{3}=\log\frac{3(e+1)}{2(e+2)}$$

38 次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　$(a>0)$　　(2)　$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

解答　(1)　$\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(2)　$\frac{\pi}{6}$

解説

(1)　$x=a\sin\theta$ とおくと　　$dx=a\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{a}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$a>0$ であり，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ において $\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=a\sqrt{\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

よって　$\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ において $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\sqrt{\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

39 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

解答 (1) $\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}\right)$　(2) $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx$ であるから,

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき, $\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sin^2\theta)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\,d\theta$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}\right)$$

(2) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき, $\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\sin^2\theta}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

40 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2+2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx$

解答 (1) $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

(1) $x=\sqrt{2}\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$$

(2) $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ であるから,

$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2+x+1}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\sqrt{3}}{3}d\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

41 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+3}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^4\frac{1}{x^2-2x+4}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$

解答 (1) $\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$　(3) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$

解説

(1) $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+3}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$$

(2) $x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ であるから, $x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ と

おくと　$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$1 \longrightarrow 4$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_1^4\frac{1}{x^2-2x+4}dx=\int_1^4\frac{1}{(x-1)^2+3}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

(3) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\theta+1}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta+1)\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2\theta+\cos 2\theta+1)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$$

42 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{3}{x^3+1}dx$ を求めよ。

解答 $\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

解説

$\displaystyle\frac{3}{x^3+1}=\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$　(a, b, c は定数)

とおいて分母を払うと

$$3=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$$

これが x の恒等式であるから, $x=0$, 1, -1 を代入すると

$$3=a+c,\ 3=a+2b+2c,\ 3=3a$$

これを解いて

$$a=1,\ b=-1,\ c=2$$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{3}{x^3+1}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\Big[\log(x+1)\Big]_0^1=\log 2-\log 1=\log 2$

次に, $\displaystyle I=\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$ とすると

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{3}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$$

I の第1項の積分について

$$\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx=\Big[\log(x^2-x+1)\Big]_0^1=0$$

I の第2項について, $\displaystyle J=\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$ とする。

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ であるから, $x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

ゆえに　$\displaystyle J=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{3}{x^3+1}dx=\log 2-\left(\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi\right)=\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

43 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x+x^2\sin x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-2}^{2}xe^{x^2}dx$

解答　(1) $\sqrt{3}$　(2) 0

解説

(1) $\cos(-x)=\cos x$,　$(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x$

であるから，$\cos x$ は偶関数，$x^2\sin x$ は奇関数である。

よって　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x+x^2\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$

(2) $(-x)e^{(-x)^2}=-xe^{x^2}$ であるから，xe^{x^2} は奇関数である。

よって　$\displaystyle\int_{-2}^{2}xe^{x^2}dx=0$

44 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin x+3\cos x)^2dx$　(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos x\,dx$

解答　(1) 13π　(2) 0　(3) $\dfrac{2}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin x+3\cos x)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}(4\sin^2x+12\sin x\cos x+9\cos^2x)dx$

$\sin^2x$，$\cos^2x$ は偶関数，$\sin x\cos x$ は奇関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin x+3\cos x)^2dx=2\int_0^{\pi}(4\sin^2x+9\cos^2x)dx$$
$$=2\int_0^{\pi}\left\{4+\frac{5}{2}(1+\cos 2x)\right\}dx=\int_0^{\pi}(13+5\cos 2x)dx$$
$$=\left[13x+\frac{5}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=13\pi$$

(2) $x\sqrt{a^2-x^2}$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=0$

(3) $\sin^2x\cos x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x(\sin x)'dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}\sin^3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

45 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおいて，定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ を求めよ。

解答　$I=\dfrac{\pi}{4}$

解説

$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと　　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

最後の式を J とすると　$I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$

$I=J$ であるから　　$I=\dfrac{\pi}{4}$

46 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3x}{\cos x+\sin x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{a}\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx$

解答　(1) $\dfrac{\pi-1}{4}$　(2) $\dfrac{a}{2}$

解説

(1) 与えられた定積分を I とする。

$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと　　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\cdot(-1)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3x}{\cos x+\sin x}dx$$

最後の式を J とすると

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3x+\sin^3x}{\cos x+\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2x-\cos x\sin x+\sin^2x)}{\cos x+\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx=\left[x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{2}$$

$I=J$ であるから　　$I=\dfrac{\pi-1}{4}$

(2) 与えられた定積分を I とする。

$a-x=t$ とおくと　　$-dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow a$
t	$a\longrightarrow 0$

$$I=\int_a^0\frac{e^{a-t}}{e^{a-t}+e^t}\cdot(-1)dt=\int_0^a\frac{e^{a-t}}{e^{a-t}+e^t}dt=\int_0^a\frac{e^{a-x}}{e^{a-x}+e^x}dx$$

最後の式を J とすると

$$I+J=\int_0^a\left(\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}+\frac{e^{a-x}}{e^{a-x}+e^x}\right)dx=\int_0^a dx=a$$

$I=J$ であるから　　$I=\dfrac{a}{2}$

47 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos\frac{x}{3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^{e}x(\log x)^2dx$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}(3\sqrt{3}\pi-9)$　(2) $\dfrac{1}{4}(e^2-1)$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos\frac{x}{3}\,dx=\int_0^{\pi}x\left(3\sin\frac{x}{3}\right)'dx$

$$=\left[3x\sin\frac{x}{3}\right]_0^{\pi}-3\int_0^{\pi}1\cdot\sin\frac{x}{3}\,dx$$
$$=3\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-3\left[-3\cos\frac{x}{3}\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi+9\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}(3\sqrt{3}\pi-9)$$

(2) $\displaystyle\int_1^{e}x(\log x)^2dx=\int_1^{e}\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\log x)^2dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}(\log x)^2\right]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{x^2}{2}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^{e}x\log x\,dx$$
$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^{e}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$$
$$=\frac{e^2}{2}-\left(\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e}=\frac{1}{4}(e^2-1)$$

48 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{1}x\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx$　　(2) $\displaystyle\int_a^{b}(x-a)^2(x-b)^2dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{1}x^2(x-1)^2e^{2x}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|(x-\sin x)\cos x|dx$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\pi^2}$　(2) $\dfrac{1}{30}(b-a)^5$　(3) $\dfrac{1}{4}(e^2-7)$　(4) 4π

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{1}x\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)dx=\int_0^{1}x\left(x-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)'dx$

$$=\left[x\left(x-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^{1}-\int_0^{1}\left(x-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
$$=1-\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^{1}$$
$$=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}$$

(2) $\displaystyle\int_a^{b}(x-a)^2(x-b)^2dx=\int_a^{b}\left\{\frac{(x-a)^3}{3}\right\}'(x-b)^2dx$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-a)^3(x-b)^2\Big]_a^{b}-\int_a^{b}\frac{(x-a)^3}{3}\cdot 2(x-b)dx$$
$$=-\frac{2}{3}\int_a^{b}\left\{\frac{(x-a)^4}{4}\right\}'(x-b)dx$$
$$=-\frac{2}{3}\left\{\frac{1}{4}\Big[(x-a)^4(x-b)\Big]_a^{b}-\int_a^{b}\frac{(x-a)^4}{4}dx\right\}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\Big[(x-a)^5\Big]_a^{b}=\frac{1}{30}(b-a)^5$$

別解　$(x-a)^2(x-b)^2=(x-a)^2(x-a+a-b)^2$

$=(x-a)^2\{(x-a)^2+2(x-a)(a-b)+(a-b)^2\}$

$=(x-a)^4+2(a-b)(x-a)^3+(a-b)^2(x-a)^2$

よって　$\displaystyle\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2dx=\left[\frac{(x-a)^5}{5}+2(a-b)\cdot\frac{(x-a)^4}{4}+(a-b)^2\cdot\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^b$

$\displaystyle=\frac{(b-a)^5}{5}+\frac{(a-b)(b-a)^4}{2}+\frac{(a-b)^2(b-a)^3}{3}$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)(b-a)^5=\frac{1}{30}(b-a)^5$

(3)　$\displaystyle\int_0^1 x^2(x-1)^2e^{2x}dx=\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)e^{2x}dx=\int_0^1 x^4e^{2x}dx-2\int_0^1 x^3e^{2x}dx+\int_0^1 x^2e^{2x}dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx=\left[x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^2-\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^2-\left(\left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1=\frac{1}{4}(e^2-1)$

$\displaystyle 2\int_0^1 x^3e^{2x}dx=2\left[x^3\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-2\int_0^1 3x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx=e^2-3\int_0^1 x^2e^{2x}dx$

$\displaystyle=e^2-3\cdot\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{1}{4}(e^2+3)$

$\displaystyle\int_0^1 x^4e^{2x}dx=\left[x^4\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 4x^3\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-2\int_0^1 x^3e^{2x}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2+3)=\frac{1}{4}(e^2-3)$

よって　$\displaystyle\int_0^1 x^2(x-1)^2e^{2x}dx=\frac{1}{4}(e^2-3)-\frac{1}{4}(e^2+3)+\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{1}{4}(e^2-7)$

(4)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $x\geqq\sin x$ であるから，$(x-\sin x)\cos x$ の正・負は $\cos x$ の正・負と一致する。

$\displaystyle(x-\sin x)\cos x=x\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x$ であるから

$\displaystyle\int\left(x\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx=\int x(\sin x)'dx-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx$

$\displaystyle=x\sin x-\int\sin x\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x)=x\sin x+\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

よって　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|(x-\sin x)\cos x|dx$

$\displaystyle=\left[x\sin x+\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[x\sin x+\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$

$\displaystyle+\left[x\sin x+\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$

$\displaystyle=2\left\{\frac{\pi}{2}\cdot 1+0+\frac{1}{4}\cdot(-1)\right\}-2\left\{\frac{3}{2}\pi\cdot(-1)+0+\frac{1}{4}\cdot(-1)\right\}$

$=4\pi$

49　$a\fallingdotseq 0$ とする。定積分 $\displaystyle A=\int_0^\pi e^{-ax}\cos 2x\,dx$ を求めよ。

解答　$\displaystyle A=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

解説

$\displaystyle A=\int_0^\pi\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)'\cos 2x\,dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{a}\Big[e^{-ax}\cos 2x\Big]_0^\pi+\frac{1}{a}\int_0^\pi e^{-ax}(-2\sin 2x)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{a}(1-e^{-a\pi})-\frac{2}{a}\int_0^\pi\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)'\sin 2x\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{a}(1-e^{-a\pi})-\frac{2}{a}\left(-\frac{1}{a}\Big[e^{-ax}\sin 2x\Big]_0^\pi+\frac{1}{a}\int_0^\pi e^{-ax}\cdot 2\cos 2x\,dx\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{a}(1-e^{-a\pi})-\frac{4}{a^2}\int_0^\pi e^{-ax}\cos 2x\,dx$

$\displaystyle=\frac{1}{a}(1-e^{-a\pi})-\frac{4}{a^2}A$

よって　$\displaystyle\frac{a^2+4}{a^2}A=\frac{1}{a}(1-e^{-a\pi})$　　$a^2+4\fallingdotseq 0$ であるから　$\displaystyle A=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

別解　$\displaystyle B=\int_0^\pi e^{-ax}\sin 2x\,dx$ とする。

$(e^{-ax}\cos 2x)'=-ae^{-ax}\cos 2x-2e^{-ax}\sin 2x$

$(e^{-ax}\sin 2x)'=-ae^{-ax}\sin 2x+2e^{-ax}\cos 2x$

であるから，これらの両辺を 0 から π まで積分すると

$\displaystyle\int_0^\pi(e^{-ax}\cos 2x)'dx=-a\int_0^\pi e^{-ax}\cos 2x\,dx-2\int_0^\pi e^{-ax}\sin 2x\,dx$

$\displaystyle\int_0^\pi(e^{-ax}\sin 2x)'dx=-a\int_0^\pi e^{-ax}\sin 2x\,dx+2\int_0^\pi e^{-ax}\cos 2x\,dx$

よって　$\Big[e^{-ax}\cos 2x\Big]_0^\pi=-aA-2B$，$\Big[e^{-ax}\sin 2x\Big]_0^\pi=-aB+2A$

すなわち　$-aA-2B=e^{-a\pi}-1$，$-aB+2A=0$

これを解いて　$\displaystyle A=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$，$\displaystyle B=\frac{2}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

50　(1)　$\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}x^2\cos(\log x)dx$ を求めよ。

(2)　(ア)　$\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

(イ)　(ア) の結果を用いて，$\displaystyle\int_0^\pi xe^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

解答　(1)　$\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{5}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{3}{10}$　　(2)　(ア)　$\displaystyle\frac{e^{-\pi}+1}{2}$　　(イ)　$\displaystyle\frac{1}{2}\{(\pi+1)e^{-\pi}+1\}$

解説

(1)　$\displaystyle I=\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}x^2\cos(\log x)dx$ とする。

$\displaystyle I=\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{x^3}{3}\right)'\cos(\log x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\cos(\log x)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}+\frac{1}{3}\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}x^3\cdot\frac{1}{x}\sin(\log x)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{3}e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}x^2\sin(\log x)dx$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}}{6}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{x^3}{3}\right)'\sin(\log x)dx$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}}{6}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\sin(\log x)\right]_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}-\frac{1}{9}\int_1^{e^{\frac{\pi}{4}}}x^3\cdot\frac{1}{x}\cos(\log x)dx$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}}{6}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{18}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{1}{9}I=\frac{2\sqrt{2}}{9}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}I$

よって　$\displaystyle I=\frac{\sqrt{2}}{5}e^{\frac{3}{4}\pi}-\frac{3}{10}$

(2)　C は積分定数とする。

$\displaystyle I=\int e^{-x}\sin x\,dx$，$\displaystyle J=\int e^{-x}\cos x\,dx$ とする。

$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

であるから，それぞれの両辺を積分して

$e^{-x}\sin x=-I+J$ ……①，$e^{-x}\cos x=-J-I$ ……②

(①+②)÷(−2) から　$\displaystyle I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$

(①−②)÷2 から　$\displaystyle J=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$

(ア)　$\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_0^\pi=\frac{e^{-\pi}+1}{2}$

(イ)　$\displaystyle\int_0^\pi xe^{-x}\sin x\,dx=\int_0^\pi x\cdot\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right\}'dx$

$\displaystyle=\left[x\cdot\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right\}\right]_0^\pi$

$\displaystyle-\int_0^\pi 1\cdot\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\right\}dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2}e^{-\pi}+\frac{1}{2}\left(\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx+\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx\right)$

ここで　$\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\cos x\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]_0^\pi=\frac{e^{-\pi}+1}{2}$

これと (ア) の結果を用いると

$\displaystyle\int_0^\pi xe^{-x}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-\pi}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-\pi}+1}{2}+\frac{e^{-\pi}+1}{2}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\{(\pi+1)e^{-\pi}+1\}$

51　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_1^3 4x^3dx$　　(2)　$\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}\,dx$　　(3)　$\displaystyle\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx$

(4)　$\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x}$　　(5)　$\displaystyle\int_2^{e+1}\frac{dy}{1-y}$　　(6)　$\displaystyle\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta$

(7)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$　　(8)　$\displaystyle\int_0^{\log 2}e^{3x}dx$　　(9)　$\displaystyle\int_1^2 2^xdx$

解答　(1)　80　　(2)　$\displaystyle\frac{14}{3}$　　(3)　1　　(4)　1　　(5)　−1　　(6)　2　　(7)　2

(8)　$\displaystyle\frac{7}{3}$　　(9)　$\displaystyle\frac{2}{\log 2}$

解説

(1)　$\displaystyle\int_1^3 4x^3dx=\Big[x^4\Big]_1^3=81-1=80$

(2)　$\displaystyle\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$

(3)　$\displaystyle\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx=\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^4=-2\left(\frac{1}{2}-1\right)=1$

(4)　$\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_e^{e^2}=2-1=1$

(5)　$\displaystyle\int_2^{e+1}\frac{dy}{1-y}=\Big[-\log|1-y|\Big]_2^{e+1}=-\log e=-1$

(6) $\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}=-(-1-1)=2$

(7) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=1-(-1)=2$

(8) $\int_0^{\log 2}e^{3x}dx=\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\log 2}=\frac{1}{3}(e^{3\log 2}-1)=\frac{1}{3}(8-1)=\frac{7}{3}$

(9) $\int_1^2 2^x dx=\left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_1^2=\frac{4-2}{\log 2}=\frac{2}{\log 2}$

52 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(x^4-x^2+1)dx$　(2) $\int_{-2}^{2}(2x^7-x^3)dx$　(3) $\int_1^2\frac{(1-x^2)^2}{x^2}dx$

(4) $\int_1^e\left(\frac{x+1}{x}\right)^2dx$　(5) $\int_1^4\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$　(6) $\int_1^2\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

(7) $\int_0^1\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)dt$　(8) $\int_1^2\frac{dx}{x(x-4)}$

解答 (1) $\frac{33}{5}$　(2) 0　(3) $\frac{5}{6}$　(4) $e+2-\frac{1}{e}$　(5) $\frac{20}{3}$　(6) $\frac{3}{10}(3-\sqrt[3]{4})$

(7) $2\sqrt{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)$　(8) $-\frac{1}{4}\log 3$

解説

(1) $\int_{-1}^{2}(x^4-x^2+1)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{2}=\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}+2\right)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1\right)=\frac{33}{5}$

(2) $\int_{-2}^{2}(2x^7-x^3)dx=\left[\frac{1}{4}x^8-\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2}=(64-4)-(64-4)=0$

(3) $\int_1^2\frac{(1-x^2)^2}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-2+x^2\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-2x+\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$

$=\left(-\frac{1}{2}-4+\frac{8}{3}\right)-\left(-1-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{6}$

(4) $\int_1^e\left(\frac{x+1}{x}\right)^2dx=\int_1^e\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[x+2\log x-\frac{1}{x}\right]_1^e$

$=\left(e+2-\frac{1}{e}\right)-(1-1)=e+2-\frac{1}{e}$

(5) $\int_1^4\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}\right]_1^4$

$=\left(\frac{16}{3}+4\right)-\left(\frac{2}{3}+2\right)=\frac{20}{3}$

(6) $\int_1^2\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int_1^2\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\left[\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^2$

$=\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{10}(3-\sqrt[3]{4})$

(7) $\int_0^1\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)dt=\left[2e^{\frac{t}{2}}-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^1=2\sqrt{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

(8) $\int_1^2\frac{dx}{x(x-4)}=\int_1^2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{4}\Big[\log|x-4|-\log|x|\Big]_1^2$

$=\frac{1}{4}\{(\log 2-\log 2)-(\log 3-0)\}=-\frac{1}{4}\log 3$

53 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+\cos 3x)dx$　(2) $\int_{\pi}^{3\pi}\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)dx$　(3) $\int_1^2\sin\left(\frac{2}{3}\pi t+\frac{\pi}{4}\right)dt$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$　(5) $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 2x\,dx$　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$

解答 (1) $\frac{2}{3}$　(2) 4　(3) $-\frac{3\sqrt{6}}{4\pi}$　(4) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$　(5) $\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$

(6) $1-\frac{\pi}{4}$

解説

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+\cos 3x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}$

(2) $\int_{\pi}^{3\pi}\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)dx=\left[4\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\pi}^{3\pi}=4$

(3) $\int_1^2\sin\left(\frac{2}{3}\pi t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\left[-\frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{2}{3}\pi t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_1^2=-\frac{3}{2\pi}\left(\cos\frac{19}{12}\pi-\cos\frac{11}{12}\pi\right)$

$=-\frac{3}{2\pi}\left(-2\sin\frac{5}{4}\pi\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=-\frac{3\sqrt{6}}{4\pi}$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

54 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{2\pi}\sin 4x\sin 6x\,dx$　(2) $\int_0^{2\pi}\sin 4x\cos 2x\,dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}\,dx$　(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\cos t\cos 3t\,dt$

解答 (1) 0　(2) 0　(3) $\frac{2}{3}$　(4) $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

解説

(1) $\int_0^{2\pi}\sin 4x\sin 6x\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 10x-\cos 2x)dx$

$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{10}\sin 10x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}=0$

(2) $\int_0^{2\pi}\sin 4x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin 6x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi}=0$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 3x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{2}{3}$

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}\cos t\cos 3t\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\cos 4t+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}=-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

55 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^6\sqrt{|x-3|}\,dx$　(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}|\sin x|dx$　(3) $\int_0^2|e^x-3|dx$

解答 (1) $4\sqrt{3}$　(2) 3　(3) $e^2+6\log 3-11$

解説

(1) $\int_0^6\sqrt{|x-3|}\,dx=\int_0^3\sqrt{3-x}\,dx+\int_3^6\sqrt{x-3}\,dx=\left[-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3+\left[\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_3^6$

$=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}|\sin x|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}(-\sin x)dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}$

$=1+\{1-(-1)\}=3$

(3) $\int_0^2|e^x-3|dx=\int_0^{\log 3}\{-(e^x-3)\}dx+\int_{\log 3}^2(e^x-3)dx=-\Big[e^x-3x\Big]_0^{\log 3}+\Big[e^x-3x\Big]_{\log 3}^2$

$=-\{(3-3\log 3)-1\}+\{(e^2-6)-(3-3\log 3)\}$

$=e^2+6\log 3-11$

56 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1\sqrt{e^{1-t}}\,dt$　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$

(3) $\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx$　(4) $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x}dx$

解答 (1) $2(\sqrt{e}-1)$　(2) 0　(3) $\frac{3}{8}\pi$　(4) $2\log 2-1$

解説

(1) $\int_0^1\sqrt{e^{1-t}}\,dt=\int_0^1 e^{\frac{1-t}{2}}dt=\left[-2e^{\frac{1-t}{2}}\right]_0^1=2(\sqrt{e}-1)$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\sin\theta)d\theta$

$=\Big[\sin\theta+\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

(3) $\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

よって　$\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$

$=\left[\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi$

(4) $1\leqq x\leqq 2$ のとき　$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=2-x$

よって　$\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x}dx=\int_1^2\left(\frac{2}{x}-1\right)dx=\Big[2\log x-x\Big]_1^2=2\log 2-1$

57 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\pi}|\cos 2\theta|d\theta$　(2) $\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$

解答 (1) 2　(2) $2\sqrt{2}$

解説

(1) $\int_0^{\pi}|\cos 2\theta|\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\cos 2\theta\,d\theta+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\cos 2\theta\,d\theta$

$=\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}+\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$

$=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=2$

(2) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\frac{3}{4}\pi$ のとき　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$

$\frac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 0$

よって　$\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

$=\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx\right\}$

$=\sqrt{2}\left\{\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}-\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right\}$

$=\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right\}=2\sqrt{2}$

58 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{0}(3x+2)^5dx$　(2) $\int_0^2\sqrt{2-x}\,dx$　(3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

(4) $\int_2^4\frac{dx}{9-2x}$　(5) $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

解答　(1) $\frac{7}{2}$　(2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　(3) $2(\sqrt{3}-1)$　(4) $\frac{1}{2}\log 5$　(5) $\frac{116}{15}$

解説

(1) $3x+2=t$ とおくと　$x=\frac{t-2}{3}$，$dx=\frac{1}{3}dt$

x	$-1\to 0$
t	$-1\to 2$

$\int_{-1}^{0}(3x+2)^5dx=\int_{-1}^{2}t^5\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}t^5dt$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{t^6}{6}\right]_{-1}^{2}=\frac{7}{2}$

別解　$\int_{-1}^{0}(3x+2)^5dx=\left[\frac{1}{18}(3x+2)^6\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{18}\{2^6-(-1)^6\}=\frac{7}{2}$

(2) $\sqrt{2-x}=t$ とおくと　$x=2-t^2$，$dx=-2tdt$

x	$0\to 2$
t	$\sqrt{2}\to 0$

$\int_0^2\sqrt{2-x}\,dx=\int_{\sqrt{2}}^{0}t\cdot(-2t)dt=2\int_0^{\sqrt{2}}t^2dt$

$=2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

別解　$\int_0^2\sqrt{2-x}\,dx=\int_0^2(2-x)^{\frac{1}{2}}dx=\left[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

(3) $\sqrt{x+2}=t$ とおくと　$x=t^2-2$，$dx=2tdt$

x	$-1\to 1$
t	$1\to\sqrt{3}$

$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+2}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{t}\cdot 2tdt=2\int_1^{\sqrt{3}}dt$

$=2\Big[t\Big]_1^{\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}-1)$

別解　$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+2}}=\int_{-1}^{1}(x+2)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[2(x+2)^{\frac{1}{2}}\right]_{-1}^{1}=2(\sqrt{3}-1)$

(4) $9-2x=t$ とおくと　$x=\frac{9-t}{2}$，$dx=-\frac{1}{2}dt$

x	$2\to 4$
t	$5\to 1$

$\int_2^4\frac{dx}{9-2x}=\int_5^1\frac{1}{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_1^5\frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}\Big[\log t\Big]_1^5$

$=\frac{1}{2}\log 5$

別解　$\int_2^4\frac{dx}{9-2x}=\left[-\frac{1}{2}\log|9-2x|\right]_2^4=-\frac{1}{2}(\log 1-\log 5)=\frac{1}{2}\log 5$

(5) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

x	$0\to 3$
t	$1\to 2$

$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx=\int_1^2(t^2-1)t\cdot 2tdt=2\int_1^2(t^4-t^2)dt$

$=2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^2=\frac{116}{15}$

59 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$　(2) $\int_{-2}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$　(3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$

(4) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}$　(5) $\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{3x^2+12}$　(6) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^2+9}dx$

解答　(1) $\frac{9}{4}\pi$　(2) $\frac{\pi}{2}$　(3) $\frac{\pi}{2}$　(4) $\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$　(5) $\frac{\pi}{18}$　(6) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

解説

(1) $x=3\sin\theta$ とおくと　$dx=3\cos\theta\,d\theta$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}=3\cos\theta$

x	$0\to 3$
θ	$0\to\frac{\pi}{2}$

$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)3\cos\theta\,d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi$

(2) $x=4\sin\theta$ とおくと　$dx=4\cos\theta\,d\theta$

また，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき $\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-16\sin^2\theta}=4\cos\theta$

x	$-2\to 2\sqrt{3}$
θ	$-\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{3}$

$\int_{-2}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{2}$

(3) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-1\to 1$
θ	$-\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{4}$

$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}$

(4) $x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\to\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{4}$

$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$

(5) $x=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\to 2\sqrt{3}$
θ	$0\to\frac{\pi}{3}$

$\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{3x^2+12}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{12(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{6}d\theta=\left[\frac{1}{6}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{18}$

(6) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^2+9}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{9}{x^2+9}\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}dx-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{9}{x^2+9}dx$

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\frac{\pi}{6}$

$\int_0^{\sqrt{3}}dx=\Big[x\Big]_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$x=3\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{9}{x^2+9}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{9}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{2}$

したがって　$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^2+9}dx=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

別解　$x=3\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\to\sqrt{3}$
θ	$0\to\frac{\pi}{6}$

$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^2+9}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{9\tan^2\theta}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}3\tan^2\theta\,d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta$

$=3\Big[\tan\theta-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

60 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2 x(x^2+1)^3dx$　(2) $\int_1^2\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1}dx$　(3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(4) $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\log x}$　(5) $\int_0^1\frac{2e^x}{e^x+1}dx$　(6) $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx$　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2x)\sin x\,dx$

解答　(1) 78　(2) $\frac{1}{3}\log 3$　(3) $4-2\sqrt{3}$　(4) $\log 2$　(5) $2\log\frac{e+1}{2}$

(6) $\frac{1}{3}(e-1)$　(7) $\log 2$　(8) $\frac{2}{3}$

解説

(1) $x^2+1=t$ とおくと　$2xdx=dt$

x	$0\to 2$
t	$1\to 5$

$\int_0^2 x(x^2+1)^3dx=\int_1^5 t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{8}t^4\right]_1^5$

$=\frac{625-1}{8}=78$

(2) $x^3-3x^2+1=t$ とおくと　$3(x^2-2x)dx=dt$

x	$1\to 2$
t	$-1\to -3$

$\int_1^2\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1}dx=\int_{-1}^{-3}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{3}dt$

$$=\left[\frac{1}{3}\log|t|\right]_{-1}^{-3}=\frac{1}{3}\log 3$$

(3) $\sqrt{1-x^2}=t$ とおくと　$1-x^2=t^2$，$-xdx=tdt$

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{2}$
t	$1 \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{4}{t}\cdot(-t)dt=4\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}dt=4\Big[t\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}$$

$$=4-2\sqrt{3}$$

(4) $\log x=t$ とおくと　$\frac{1}{x}dx=dt$

x	$e \longrightarrow e^2$
t	$1 \longrightarrow 2$

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\log x}=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\Big[\log t\Big]_1^2=\log 2$$

(5) $e^x+1=t$ とおくと　$e^xdx=dt$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$2 \longrightarrow e+1$

$$\int_0^1\frac{2e^x}{e^x+1}dx=\int_2^{e+1}\frac{2}{t}dt=\Big[2\log t\Big]_2^{e+1}$$

$$=2\log\frac{e+1}{2}$$

(6) $x^3=t$ とおくと　$3x^2dx=dt$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\int_0^1 x^2e^{x^3}dx=\int_0^1 e^t\cdot\frac{1}{3}dt=\left[\frac{1}{3}e^t\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}(e-1)$$

(7) $2-\cos x=t$ とおくと　$\sin x\,dx=dt$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \longrightarrow 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\Big[\log t\Big]_1^2=\log 2$$

(8) $\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \longrightarrow 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2x)\sin x\,dx=-\int_1^0(1-t^2)dt=\int_0^1(1-t^2)dt$$

$$=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

61 偶関数，奇関数の性質を用いて，次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-e}^{e}x^3e^{x^2}dx$　(2) $\int_{-a}^{a}(e^x-e^{-x})^5dx$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\,dx$　(4) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\sin^4x\,dx$

解答　(1) 0　(2) 0　(3) π　(4) $\frac{1}{80}$

解説

(1) $x^3e^{x^2}$ は奇関数であるから　$\int_{-e}^{e}x^3e^{x^2}dx=0$

(2) $(e^x-e^{-x})^5$ は奇関数であるから　$\int_{-a}^{a}(e^x-e^{-x})^5dx=0$

(3) $\sin^2x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\,dx=2\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx=2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\pi$$

(4) $\cos x\sin^4x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\sin^4x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^4x(\sin x)'dx=2\left[\frac{\sin^5x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{80}$$

62 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{0}(x+2)\sqrt{3x+4}\,dx$　(2) $\int_0^4\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$　(3) $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(4) $\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$　(5) $\int_1^2\frac{dx}{e^x-1}$　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3x}{\cos^2x}dx$

解答　(1) $\frac{326}{135}$　(2) $\frac{16}{15}(5\sqrt{5}-1)$　(3) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$　(4) $\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

(5) $\log\frac{e+1}{e}$　(6) $\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$

解説

(1) $3x+4=t$ とおくと　$x=\frac{1}{3}t-\frac{4}{3}$，$dx=\frac{1}{3}dt$

x	$-1 \longrightarrow 0$
t	$1 \longrightarrow 4$

$$\int_{-1}^{0}(x+2)\sqrt{3x+4}\,dx=\int_1^4\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}\right)\sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}dt$$

$$=\frac{1}{9}\int_1^4(t\sqrt{t}+2\sqrt{t})dt=\frac{1}{9}\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{64}{5}+\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{3}\right)\right\}=\frac{326}{135}$$

(2) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

x	$0 \longrightarrow 4$
t	$1 \longrightarrow \sqrt{5}$

$$\int_0^4\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx=\int_1^{\sqrt{5}}\frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2tdt=2\int_1^{\sqrt{5}}(t^4-2t^2+1)dt$$

$$=2\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_1^{\sqrt{5}}=2\left\{\left(5\sqrt{5}-\frac{10\sqrt{5}}{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right)\right\}$$

$$=\frac{16}{15}(5\sqrt{5}-1)$$

(3) $\sqrt{1+x^2}=t$ とおくと　$x^2=t^2-1$，$xdx=tdt$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow \sqrt{2}$

$$\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t^2-1}{t}\cdot tdt=\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_1^{\sqrt{2}}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\sqrt{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

(4) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

x	$1 \longrightarrow 3$
t	$\sqrt{2} \longrightarrow 2$

$$\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{1}{(t^2-1)t}\cdot 2tdt=\int_{\sqrt{2}}^2\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left[\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^2=\log\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$=\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$$

(5) $e^x=t$ とおくと　$x=\log t$，$dx=\frac{1}{t}dt$

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$e \longrightarrow e^2$

$$\int_1^2\frac{dx}{e^x-1}=\int_e^{e^2}\frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{t}dt=\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\left[\log\frac{t-1}{t}\right]_e^{e^2}=\log\left(\frac{e^2-1}{e^2}\cdot\frac{e}{e-1}\right)$$

$$=\log\frac{e+1}{e}$$

(6) $\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$
t	$1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3x}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\cdot\sin x\,dx$$

$$=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1-t^2}{t^2}\cdot(-1)dt=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[t+\frac{1}{t}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)-2$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$$

63 次の定積分を求めよ。ただし，a は正の定数とする。

(1) $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$　(2) $\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$　(3) $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}$

(4) $\int_1^2\frac{dx}{x^2-2x+2}$　(5) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}dx$　(6) $\int_0^a\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

(7) $\int_0^1\frac{x}{(2-x^2)^2}dx$　(8) $\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

解答　(1) $\frac{\pi}{4}$　(2) $-\frac{\pi}{6}$　(3) $\frac{\pi}{4}$　(4) $\frac{\pi}{4}$　(5) $\log 2+\frac{\pi}{12}$　(6) $\frac{\pi+2}{8a^3}$

(7) $\frac{1}{4}$　(8) $\frac{\sqrt{3}}{3a^2}$

解説

(1) $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(1-x)^2}$

$1-x=\sin\theta$ とおくと　$dx=-\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot(-\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(1-x)^2}$

$1-x=\sin\theta$ とおくと　$dx=-\cos\theta\,d\theta$

x	$1 \longrightarrow \frac{1}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{-\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(-1)d\theta=\Big[-\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{\pi}{6}$$

(3) $x+1=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-1 \longrightarrow 0$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(4) $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

$x-1=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1 \longrightarrow 2$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(5) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+1}dx+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx=\Big[\log(x^2+1)\Big]_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\log 2$$

また，$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$$

したがって　$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x+1}{x^2+1}dx=\log 2+\frac{\pi}{12}$

(6) $x=a\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \longrightarrow a$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^a\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{a^4(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}d\theta=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2a^3}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi+2}{8a^3}$$

(7) $2-x^2=t$ とおくと　$-2xdx=dt$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$2 \longrightarrow 1$

$$\int_0^1\frac{x}{(2-x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int_2^1\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2=\frac{1}{4}$$

(8) $x=a\sin\theta$ とおくと　$dx=a\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \longrightarrow \frac{a}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{a\cos\theta}{(a^2-a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{a\cos\theta}{a^3\cos^3\theta}d\theta=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{a^2}\Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3a^2}$$

64 定積分 $\int_0^1\frac{1}{x^3+8}dx$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{24}\log 3+\frac{\sqrt{3}}{72}\pi$

解説

$\frac{1}{x^3+8}=\frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2-2x+4}$ とおく。

両辺に x^3+8 を掛けると　$1=a(x^2-2x+4)+(bx+c)(x+2)$

右辺を整理すると　$1=(a+b)x^2+(-2a+2b+c)x+4a+2c$

これが x についての恒等式であるから

$$a+b=0,\ -2a+2b+c=0,\ 4a+2c=1$$

これを解いて　$a=\frac{1}{12},\ b=-\frac{1}{12},\ c=\frac{1}{3}$

よって　$\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{x-4}{x^2-2x+4}\right)$

$$\int_0^1\frac{1}{x+2}dx=\Big[\log|x+2|\Big]_0^1=\log\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1\frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=\int_0^1\frac{x-4}{(x-1)^2+3}dx$$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow 0$

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

よって　$\int_0^1\frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=\int_0^1\frac{x-4}{(x-1)^2+3}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0\frac{\sqrt{3}\tan\theta-3}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^0(\tan\theta-\sqrt{3})d\theta=\Big[-\log|\cos\theta|-\sqrt{3}\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^0$$

$$=\log\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

以上から　$\int_0^1\frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{12}\left(\log\frac{3}{2}-\log\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)=\frac{1}{12}\left(\log\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

$$=\frac{1}{24}\log 3+\frac{\sqrt{3}}{72}\pi$$

65 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(x-1)^4dx$　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2)\cos x\,dx$　(3) $\int_1^2 x^4\log x\,dx$

解答　(1) $\frac{1}{30}$　(2) $\frac{\pi}{2}+1$　(3) $\frac{32}{5}\log 2-\frac{31}{25}$

解説

(1) $\int_0^1 x(x-1)^4dx=\int_0^1 x\left\{\frac{(x-1)^5}{5}\right\}'dx=\left[x\cdot\frac{(x-1)^5}{5}\right]_0^1-\int_0^1\frac{(x-1)^5}{5}dx$

$$=0-\frac{1}{5\cdot 6}\Big[(x-1)^6\Big]_0^1=\frac{1}{30}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2)\cos x\,dx=\Big[(x+2)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+1$

(3) $\int_1^2 x^4\log x\,dx=\left[\frac{x^5}{5}\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^4}{5}dx=\frac{32}{5}\log 2-\left[\frac{x^5}{25}\right]_1^2=\frac{32}{5}\log 2-\frac{31}{25}$

66 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^e\frac{\log x}{x^2}dx$　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　(3) $\int_0^1 x^2e^{2x}dx$

解答　(1) $1-\frac{2}{e}$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\log 2$　(3) $\frac{e^2-1}{4}$

解説

(1) $\int_1^e\frac{\log x}{x^2}dx=\int_1^e(\log x)\left(-\frac{1}{x}\right)'dx=\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$

$$=1-\frac{2}{e}$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x(\tan x)'dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\Big[\log(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\log 2$$

(3) $\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\left[x^2\cdot\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1 xe^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\left(\left[x\cdot\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx\right)$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{4}\Big[e^{2x}\Big]_0^1=\frac{e^2-1}{4}$$

67 定積分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-3x}\sin x\,dx$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{10}\left(1-3e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$

解説

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-3x}\sin x\,dx=\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-3x}\cos x\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\pi}-\left[\frac{1}{9}e^{-3x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-3x}\sin x\,dx=\frac{1}{9}\left(1-3e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)-\frac{1}{9}I$$

よって　$\frac{10}{9}I=\frac{1}{9}\left(1-3e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$　　ゆえに　$I=\frac{1}{10}\left(1-3e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)$

68 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(ax-\sin x)^2dx$ を最小にする実数 a の値を求めよ。

解答　$a=\frac{24}{\pi^3}$

解説

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(ax-\sin x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2x^2-2ax\sin x+\sin^2 x)dx$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx-2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$$

ここで　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx=0+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(ax-\sin x)^2dx=\frac{\pi^3}{24}a^2-2a+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^3}{24}\left(a-\frac{24}{\pi^3}\right)^2-\frac{24}{\pi^3}+\frac{\pi}{4}$

よって，$a=\frac{24}{\pi^3}$ のとき，与式は最小値をとる。

69 定積分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k-\cos x)^2dx$ を最小にする定数 k の値を求めよ。

解答 $k=\dfrac{2}{\pi}$

解説

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(k^2-2k\cos x+\cos^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(k^2-2k\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\left[k^2x-2k\sin x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}k^2-2k+\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(k-\frac{2}{\pi}\right)^2-\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{4}$$

よって，I を最小にする定数 k の値は　$k=\dfrac{2}{\pi}$

70 定積分 $\int_1^4\dfrac{dx}{x^2-2x+4}$ を求めよ。

解答 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

分母を変形すると　$x^2-2x+4=(x-1)^2+3$

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1\longrightarrow 4$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

よって　$$\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

71 (1) 等式 $\dfrac{2}{t(t+1)(t+2)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{C}{t+2}$ が成り立つように，定数 A，B，Cの値を定めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1\dfrac{2}{2+3e^x+e^{2x}}dx$ を求めよ。

解答 (1) $A=1$，$B=-2$，$C=1$　(2) $\log\dfrac{4e(e+2)}{3(e+1)^2}$

解説

(1) 等式の両辺に $t(t+1)(t+2)$ を掛けて　$2=A(t+1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t+1)$

右辺を整理すると　$2=(A+B+C)t^2+(3A+2B+C)t+2A$

この等式が t についての恒等式であるから

$A+B+C=0$，$3A+2B+C=0$，$2A=2$

よって　$A=1$，$B=-2$，$C=1$

(2) $e^x=t$ とおくと　$x=\log t$　ゆえに　$dx=\dfrac{1}{t}dt$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow e$

よって　$$\int_0^1\frac{2}{2+3e^x+e^{2x}}dx=\int_1^e\frac{2}{2+3t+t^2}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\int_1^e\frac{2}{t(t+1)(t+2)}dt=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}+\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\Big[\log t-2\log(t+1)+\log(t+2)\Big]_1^e$$

$$=1-2\log(e+1)+\log(e+2)+2\log 2-\log 3$$

$$=\log\frac{4e(e+2)}{3(e+1)^2}$$

72 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_4^9\sqrt{x}\,dx$　(2) $\int_2^3\dfrac{dx}{x^3}$　(3) $\int_0^1\sqrt[3]{t^2}\,dt$

(4) $\int_1^{e^2}\dfrac{dx}{x}$　(5) $\int_3^7\dfrac{dy}{y-2}$　(6) $\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$　(8) $\int_{-2}^0 e^{-x}dx$　(9) $\int_0^2 3^{x-2}dx$

解答 (1) $\dfrac{38}{3}$　(2) $\dfrac{5}{72}$　(3) $\dfrac{3}{5}$　(4) 2　(5) $\log 5$　(6) 2　(7) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(8) e^2-1　(9) $\dfrac{8}{9\log 3}$

解説

(1) $$\int_4^9\sqrt{x}\,dx=\int_4^9 x^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$

$$=\frac{2}{3}\Big[x\sqrt{x}\Big]_4^9=\frac{2}{3}(27-8)=\frac{38}{3}$$

(2) $$\int_2^3\frac{dx}{x^3}=\int_2^3 x^{-3}dx=\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_2^3$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_2^3=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{72}$$

(3) $$\int_0^1\sqrt[3]{t^2}\,dt=\int_0^1 t^{\frac{2}{3}}dt=\left[\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right]_0^1=\frac{3}{5}$$

(4) $$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^{e^2}=\log e^2=2$$

(5) $$\int_3^7\frac{dy}{y-2}=\Big[\log(y-2)\Big]_3^7=\log 5$$

(6) $$\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}=2$$

(7) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(8) $$\int_{-2}^0 e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_{-2}^0=e^2-1$$

(9) $$\int_0^2 3^{x-2}dx=\left[\frac{3^{x-2}}{\log 3}\right]_0^2=\frac{1}{\log 3}\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{9\log 3}$$

73 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_2^4\dfrac{x+1}{x^2}dx$　(2) $\int_1^2\dfrac{5x^2-3x}{\sqrt{x}}dx$　(3) $\int_1^2\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

解答 (1) $\log 2+\dfrac{1}{4}$　(2) $4\sqrt{2}$　(3) $\dfrac{3}{10}(3-\sqrt[3]{4})$

解説

(1) $$\int_2^4\frac{x+1}{x^2}dx=\int_2^4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\log x-\frac{1}{x}\right]_2^4$$

$$=\left(\log 4-\frac{1}{4}\right)-\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\log 2-\frac{1}{4}-\log 2+\frac{1}{2}$$

$$=\log 2+\frac{1}{4}$$

(2) $$\int_1^2\frac{5x^2-3x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\left(5x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\left[5\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$=\Big[2x^2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}\Big]_1^2$$

$$=2(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$$

(3) $$\int_1^2\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int_1^2\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{10}(3-\sqrt[3]{4})$$

74 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^0(x+2)^5dx$　(2) $\int_2^6\sqrt{2x-3}\,dx$　(3) $\int_0^{\frac{1}{3}}\dfrac{dx}{(3x+1)^2}$

(4) $\int_3^5\dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}}$　(5) $\int_1^3\dfrac{dx}{7-2x}$

解答 (1) $\dfrac{21}{2}$　(2) $\dfrac{26}{3}$　(3) $\dfrac{1}{6}$　(4) $3-\sqrt{5}$　(5) $\dfrac{\log 5}{2}$

解説

(1) $$\int_{-1}^0(x+2)^5dx=\left[\frac{(x+2)^6}{6}\right]_{-1}^0=\frac{1}{6}(2^6-1^6)=\frac{21}{2}$$

(2) $$\int_2^6\sqrt{2x-3}\,dx=\int_2^6(2x-3)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(2x-3)\sqrt{2x-3}\Big]_2^6=\frac{1}{3}(27-1)=\frac{26}{3}$$

(3) $$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{(3x+1)^2}=\int_0^{\frac{1}{3}}(3x+1)^{-2}dx=\left[\frac{1}{3}\cdot\{-(3x+1)^{-1}\}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x+1}\right]_0^{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{6}$$

(4) $$\int_3^5\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\int_3^5(2x-1)^{-\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{2}\cdot\left\{2(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right\}\right]_3^5$$

$$=\Big[\sqrt{2x-1}\Big]_3^5=3-\sqrt{5}$$

(5) $$\int_1^3\frac{dx}{7-2x}=\left[-\frac{1}{2}\log(7-2x)\right]_1^3=-\frac{1}{2}(\log 1-\log 5)=\frac{\log 5}{2}$$

75 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1\dfrac{x^2+x+1}{x+1}dx$　(2) $\int_1^3\dfrac{dx}{x(x+1)}$　(3) $\int_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2-5x+6}$

解答 (1) $\dfrac{1}{2}+\log 2$　(2) $\log\dfrac{3}{2}$　(3) $\log\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $$\int_0^1\frac{x^2+x+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\log(x+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}+\log 2$$

(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \Big[\log x - \log(x+1)\Big]_1^3$

$\displaystyle= \left[\log \frac{x}{x+1}\right]_1^3 = \log\frac{3}{4} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx$

$\displaystyle= \Big[\log|x-3| - \log|x-2|\Big]_{-1}^1 = \left[\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_{-1}^1$

$\displaystyle= \log 2 - \log\frac{4}{3} = \log\frac{3}{2}$

76 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos x + \cos 2x)dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{5}{2}x \sin\frac{x}{2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$ (4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 2x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,dx$

解答 (1) 0 (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$ (4) $\frac{3}{4}\pi$ (5) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\cos x + \cos 2x)dx = \left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{5}{2}x \sin\frac{x}{2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x - \cos 2x)dx$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{6}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 2x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left\{\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{3}{4}\pi$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$

$\displaystyle= \Big[\tan x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

77 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} |\cos x|dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} |\sin x|dx$ (3) $\displaystyle\int_0^5 |\sqrt{x}-2|dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^2 \sqrt{|x-1|}\,dx$ (5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\sin 2\theta|d\theta$ (6) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|dx$

解答 (1) 2 (2) 2 (3) $\frac{10\sqrt{5}-14}{3}$ (4) $\frac{2(2\sqrt{2}+1)}{3}$ (5) $\frac{5}{2}$

(6) $2\sqrt{2}$

解説

(1) $\pi \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi$ のとき $|\cos x| = -\cos x$

$\frac{3}{2}\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき $|\cos x| = \cos x$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} |\cos x|dx = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (-\cos x)dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$

$\displaystyle= \Big[-\sin x\Big]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + \Big[\sin x\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$

$= -\{(-1)-0\} + \{0-(-1)\} = 2$

(2) $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \pi$ のとき $|\sin x| = \sin x$

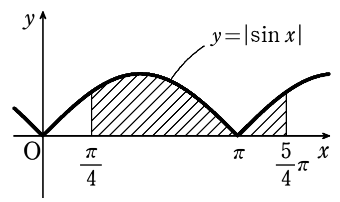
$\pi \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi$ のとき $|\sin x| = -\sin x$

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} |\sin x|dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (-\sin x)dx$

$\displaystyle= \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$

$\displaystyle= -\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} - (-1)\right\} = 2$

別解 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} |\sin x|dx$ は図の斜線部分の面積を表す。



$y=\sin x$ のグラフの対称性から，この面積は $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ に等しい。

よって

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 1+1 = 2$

(3) $0 \leqq x \leqq 4$ のとき

$|\sqrt{x}-2| = -(\sqrt{x}-2)$

$4 \leqq x \leqq 5$ のとき

$|\sqrt{x}-2| = \sqrt{x}-2$

$\displaystyle\int_0^5 |\sqrt{x}-2|dx = \int_0^4 \{-(\sqrt{x}-2)\}dx + \int_4^5 (\sqrt{x}-2)dx$

$\displaystyle= -\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x\right]_0^4 + \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x\right]_4^5$

$\displaystyle= -\left(\frac{16}{3} - 8\right) + \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - 10\right) - \left(\frac{16}{3} - 8\right)$

$\displaystyle= -2\left(\frac{16}{3} - 8\right) + \left(\frac{10\sqrt{5}}{3} - 10\right)$

$\displaystyle= \frac{10\sqrt{5}-14}{3}$

(4) $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $|x-1| = -(x-1)$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき $|x-1| = x-1$

$\displaystyle\int_{-1}^2 \sqrt{|x-1|}\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{-(x-1)}\,dx + \int_1^2 \sqrt{x-1}\,dx$

$\displaystyle= \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_{-1}^1 + \left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}\right]_1^2$

$\displaystyle= -\frac{2}{3}\cdot(-2\sqrt{2}) + \frac{2}{3}$

$\displaystyle= \frac{2(2\sqrt{2}+1)}{3}$

(5) $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $-\frac{\pi}{2} \leqq 2\theta \leqq 2\pi$

$-\frac{\pi}{2} \leqq 2\theta \leqq 0$，$\pi \leqq 2\theta \leqq 2\pi$ のとき，すなわち $-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq 0$，$\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき

$|\sin 2\theta| = -\sin 2\theta$

$0 \leqq 2\theta \leqq \pi$ のとき，すなわち $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

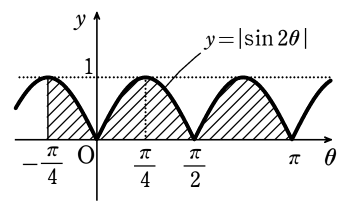
$|\sin 2\theta| = \sin 2\theta$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\sin 2\theta|d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (-\sin 2\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin 2\theta)d\theta$

$\displaystyle= \left[\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 - \left[\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\{1-(-1-1)+1-(-1)\} = \frac{5}{2}$

別解 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\sin 2\theta|d\theta$ は図の斜線部分の面積を表す。



$y=\sin 2\theta$ のグラフの対称性から，この面積は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta\,d\theta$ を 5 倍したものに等しい。

よって $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} |\sin 2\theta|d\theta = 5\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\theta\,d\theta$

$\displaystyle= 5\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{2}$

(6) $\displaystyle\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq \frac{3}{4}\pi$ のとき

$\displaystyle\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき

$\displaystyle\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| = -\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

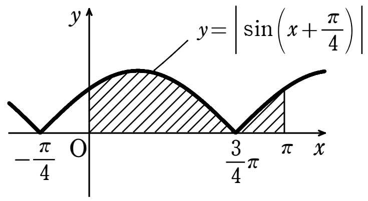
$\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

$$=\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\left\{-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}dx\right]$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}+\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\right\}=2\sqrt{2}$$

別解　$\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$ は図の斜線部分の面積を表す。



$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフの対称性から，この面積は $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ に等しい。

また，グラフの平行移動を考えると，$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ は $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ に等しい。

したがって　$\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$

$$=\sqrt{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2\sqrt{2}$$

78 定積分 $I=\int_0^{\pi}(k-\sin x)^2dx$ を最小にする定数 k の値を求めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

解答　$k=\frac{2}{\pi}$ で最小値 $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}$

解説

$I=\int_0^{\pi}(k-\sin x)^2dx=\int_0^{\pi}(k^2-2k\sin x+\sin^2 x)dx$

$=\int_0^{\pi}\left(k^2-2k\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\left[k^2x+2k\cos x+\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}$

$=\pi k^2-4k+\frac{\pi}{2}=\pi\left(k-\frac{2}{\pi}\right)^2+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}$

よって，$k=\frac{2}{\pi}$ で最小値 $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}$ をとる。

79 定積分 $\int_0^{\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|dx$ を求めよ。

解答　4

解説

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき

$$\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって

$$\int_0^{\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|dx=2\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|dx$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx\right]$$

$$=2\left\{\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\right\}$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+1\right)\right\}=4$$

80 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{0}x\sqrt{x+1}\,dx$　(2) $\int_1^2 x(x^2-1)^3dx$　(3) $\int_{-\sqrt{3}}^{0}\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\,dx$　(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx$

解答　(1) $-\frac{4}{15}$　(2) $\frac{81}{8}$　(3) -2　(4) $\frac{1}{4}$　(5) $\log 2$

解説

(1) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

x	$-1\longrightarrow 0$
t	$0\longrightarrow 1$

よって

$$\int_{-1}^{0}x\sqrt{x+1}\,dx=\int_0^1(t^2-1)t\cdot 2tdt$$

$$=2\int_0^1(t^4-t^2)dt=2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{15}$$

(2) $x^2-1=t$ とおくと　$2xdx=dt$

x	$1\longrightarrow 2$
t	$0\longrightarrow 3$

よって

$$\int_1^2 x(x^2-1)^3dx=\frac{1}{2}\int_1^2 2x(x^2-1)^3dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3 t^3dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^3=\frac{81}{8}$$

(3) $4-x^2=t$ とおくと　$-2xdx=dt$

x	$-\sqrt{3}\longrightarrow 0$
t	$1\longrightarrow 4$

よって

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0}\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\int_1^4\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$=-2\Big[\sqrt{t}\Big]_1^4=-2(2-1)=-2$$

(4) $\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$1\longrightarrow 0$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\,dx=-\int_1^0 t^3dt=\int_0^1 t^3dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2-\cos x)'}{2-\cos x}dx$

$$=\Big[\log(2-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\log 2$$

別解　$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$1\longrightarrow 0$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{2-\cos x}dx=\int_1^0\left(-\frac{dt}{2-t}\right)=\int_1^0\frac{dt}{t-2}$$

$$=\Big[\log|t-2|\Big]_1^0=\log 2$$

81 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$　(2) $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx$　(3) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

解答　(1) $\frac{9}{4}\pi$　(2) $\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$　(3) $\frac{\pi}{3}$

解説

(1) $x=3\sin\theta$ とおくと　$dx=3\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow 3$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}$$

$$=\sqrt{9\cos^2\theta}=3\cos\theta$$

よって

$$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)\cdot 3\cos\theta\,d\theta$$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi$$

参考　求める定積分の値は，半径 3 の円の面積の $\frac{1}{4}$ であるから

$$\frac{1}{4}\pi\cdot 3^2=\frac{9}{4}\pi$$

(2) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

x	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

また，$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2(1-\sin^2\theta)}$$

$$=\sqrt{2\cos^2\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$$

よって

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}\cos\theta)\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{5}{12}\pi+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(3) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

また，$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}$$
$$=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}$$

82 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+4}$　(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+9}$　(3) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{3x^2+6}$

解答　(1) $\frac{\pi}{6}$　(2) $\frac{\pi}{18}$　(3) $\frac{\sqrt{2}}{72}\pi$

解説

(1) $x=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって

$$\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+4}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2\theta}{4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{2}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$$

(2) $x=3\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$\sqrt{3} \longrightarrow 3\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって

$$\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+9}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2\theta}{9}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{18}$$

(3) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{3x^2+6}=\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{x^2+2}$

$x=\sqrt{2}\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{6}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{3x^2+6}=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{72}\pi$$

83 偶関数，奇関数の性質を用いて，次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-e}^{e}xe^{x^2}dx$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+x^2-x)dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^6x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,dx$

解答　(1) 0　(2) 0　(3) $\frac{2}{3}$　(4) π　(5) $\frac{2}{7}$　(6) 0

解説

(1) $x^3\sqrt{1-x^2}$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-1}^{1}x^3\sqrt{1-x^2}\,dx=0$

(2) xe^{x^2} は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-e}^{e}xe^{x^2}dx=0$

(3) x^3，x は奇関数，x^2 は偶関数であるから

$$\int_{-1}^{1}(x^3+x^2-x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_0^1x^2dx=2\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

(4) $\sin^2x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2x\,dx=2\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx=2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2x}{2}dx$$
$$=\Big[x-\frac{\sin2x}{2}\Big]_0^{\pi}=\pi$$

(5) $\cos x\sin^6x$ は偶関数であるから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^6x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x(\sin x)'dx=2\Big[\frac{\sin^7x}{7}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{7}$$

(6) $\sin^3x$ は奇関数であるから　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,dx=0$

84 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^e\frac{\log x}{x}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^2x^2e^{-x^3}dx$　(3) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$

解答　(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3e^8}$　(3) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

解説

(1) $\log x=t$ とおくと　$\frac{1}{x}dx=dt$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\int_1^e\frac{\log x}{x}dx=\int_0^1tdt=\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^1=\frac{1}{2}$

(2) $-x^3=t$ とおくと　$-3x^2dx=dt$

x	$0 \longrightarrow 2$
t	$0 \longrightarrow -8$

よって

$$\int_0^2x^2e^{-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int_0^2(-3x^2e^{-x^3})dx$$
$$=-\frac{1}{3}\int_0^{-8}e^tdt=\frac{1}{3}\int_{-8}^0e^tdt$$
$$=\frac{1}{3}\Big[e^t\Big]_{-8}^0=\frac{1}{3}-\frac{1}{3e^8}$$

(3) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$\sqrt{2} \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

また，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ のとき $\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}$$
$$=2\cos\theta$$

よって

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(2\cos\theta)\cdot2\cos\theta\,d\theta$$
$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$
$$=2\Big[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$

85 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{\pi}{3}}}\frac{\cos(\log x)}{x}dx$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{e^x+1}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2x}{1+\sin x}dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,dx$

解答　(1) $\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\log\frac{e+1}{2}$　(4) $2-2\log2$　(5) $\frac{2}{3}$

解説

(1) $\sqrt{x^2+2}=t$ とおくと　$x^2+2=t^2$，$xdx=tdt$

x	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$
t	$\sqrt{2} \longrightarrow 2$

よって

$$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\cdot xdx$$
$$=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2-2}{t}\cdot tdt$$
$$=\int_{\sqrt{2}}^{2}(t^2-2)dt=\Big[\frac{t^3}{3}-2t\Big]_{\sqrt{2}}^{2}$$
$$=\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$$

(2) $\log x=t$ とおくと　$\frac{1}{x}dx=dt$

x	$1 \longrightarrow e^{\frac{\pi}{3}}$
t	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって

$$\int_1^{e^{\frac{\pi}{3}}}\frac{\cos(\log x)}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,dt$$
$$=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) $e^x=t$ とおくと　$x=\log t$，$dx=\frac{1}{t}dt$

x	$-1 \longrightarrow 0$
t	$\frac{1}{e} \longrightarrow 1$

よって

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{e^x+1}=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{dt}{(t+1)t}=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\Big)dt$$
$$=\Big[\log t-\log(t+1)\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}=\Big[\log\frac{t}{t+1}\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$=\log\frac{1}{2}-\log\frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}+1}=\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{e+1}=\log\frac{e+1}{2}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}dx$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

$\sin x=t$ とおくと　　$\cos x\,dx=dt$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x}dx$$
$$=2\int_0^1\frac{t}{1+t}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=2\Big[t-\log(1+t)\Big]_0^1$$
$$=2(1-\log 2)=2-2\log 2$$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \longrightarrow 0$

$\cos x=t$ とおくと　　$-\sin x\,dx=dt$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_1^0(1-t^2)\cdot(-1)dt$$
$$=\int_1^0(t^2-1)dt=\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^0$$
$$=-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$$

86 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}$　　(2) $\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2-2x+2}$　　(3) $\displaystyle\int_1^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$

解答 (1) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$　(2) $\frac{\pi}{3}$　(3) $\frac{\pi}{4}$

解説

(1) $x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$$\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

(2) $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

x	$1 \longrightarrow 1+\sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$x-1=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

よって

$$\int_1^{1+\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int_1^{1+\sqrt{3}}\frac{dx}{(x-1)^2+1}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

(3) $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$

x	$1 \longrightarrow 2$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$x-1=\sin\theta$ とおくと　　$dx=\cos\theta\,d\theta$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{1-(x-1)^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{\cos^2\theta}=\cos\theta$$

よって

$$\int_1^2\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)\cdot\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

87 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}$

解答 (1) $\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$　(3) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos^2 x\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}-\sin x\right\}dx=\left[\frac{1}{\cos x}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(1+1)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$$

(2) $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと　　$dx=\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$

x	$0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$(2-x^2)^{\frac{3}{2}}=\{2(1-\sin^2\theta)\}^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(2\cos^2\theta)^3}$$
$$=\sqrt{8\cos^6\theta}=2\sqrt{2}\cos^3\theta$$

よって

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\sqrt{2}\cos^3\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\Big[\tan\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

(3) $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと　　$dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$

よって

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+x+1}=\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

88 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 3x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 xe^{\frac{x}{2}}dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^{e^2}\log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\sin x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int_{-4}^{-3}\log(x+5)dx$　　(6) $\displaystyle\int_1^e x^2\log x\,dx$

解答 (1) $-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{9}$　(2) $2\sqrt{e}$　(3) e^2+1　(4) 0　(5) $2\log 2-1$

(6) $\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 3x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)'dx=\left[\frac{x\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{3}dx$

$$=-\frac{\pi}{6}+\left[\frac{\cos 3x}{9}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{9}$$

(2) $\displaystyle\int_1^2 xe^{\frac{x}{2}}dx=\int_1^2 x\left(2e^{\frac{x}{2}}\right)'dx=\Big[2xe^{\frac{x}{2}}\Big]_1^2-2\int_1^2 e^{\frac{x}{2}}dx$

$$=(4e-2\sqrt{e})-4\Big[e^{\frac{x}{2}}\Big]_1^2=4e-2\sqrt{e}-4(e-\sqrt{e})=2\sqrt{e}$$

(3) $\displaystyle\int_1^{e^2}\log x\,dx=\int_1^{e^2}(x)'\log x\,dx=\Big[x\log x\Big]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=2e^2-\Big[x\Big]_1^{e^2}=2e^2-(e^2-1)=e^2+1$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)(-\cos x)'dx$

$$=\Big[-(x-1)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$
$$=-1+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-1+1=0$$

(5) $\displaystyle\int_{-4}^{-3}\log(x+5)dx=\int_{-4}^{-3}(x+5)'\log(x+5)dx$

$$=\Big[(x+5)\log(x+5)\Big]_{-4}^{-3}-\int_{-4}^{-3}(x+5)\cdot\frac{1}{x+5}dx$$
$$=2\log 2-\Big[x\Big]_{-4}^{-3}=2\log 2-1$$

(6) $\displaystyle\int_1^e x^2\log x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x\,dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^3}{3}-\int_1^e\frac{x^2}{3}dx$$

$$=\frac{e^3}{3}-\left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}(e^3-1)=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$$

89 (1) 部分積分法を用いて，次の等式を証明せよ。

$$\int_a^b(x-a)^2(x-b)dx=-\frac{1}{12}(b-a)^4$$

(2) (1) の等式を用いて，定積分 $\int_{-1}^2(x+1)^2(x-2)dx$ を求めよ。

解答 (1) 略 (2) $-\frac{27}{4}$

解説

(1) $\int_a^b(x-a)^2(x-b)dx=\int_a^b\left\{\frac{(x-a)^3}{3}\right\}'(x-b)dx$

$$=\left[\frac{(x-a)^3}{3}\cdot(x-b)\right]_a^b-\int_a^b\frac{(x-a)^3}{3}dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int_a^b(x-a)^3dx=-\frac{1}{3}\left[\frac{(x-a)^4}{4}\right]_a^b$$

$$=-\frac{1}{12}(b-a)^4$$

(2) (1) の結果から

$$\int_{-1}^2(x+1)^2(x-2)dx=-\frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4=-\frac{3^4}{12}=-\frac{27}{4}$$

90 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^e\frac{\log x}{x^2}dx$ (2) $\int_{-1}^1x^2e^{2x}dx$ (3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$

解答 (1) $1-\frac{2}{e}$ (2) $\frac{e^2}{4}-\frac{5}{4e^2}$ (3) $\frac{\pi^2}{2}-4$

解説

(1) $\int_1^e\frac{\log x}{x^2}dx=\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx$

$$=\left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{e}-\int_1^e\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=-\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

(2) $\int_{-1}^1x^2e^{2x}dx=\int_{-1}^1x^2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=\left[\frac{x^2e^{2x}}{2}\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1xe^{2x}dx$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}-\int_{-1}^1x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}-\left(\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1\frac{e^{2x}}{2}dx\right)$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2e^2}-\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2e^2}\right)+\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^1$$

$$=-\frac{1}{e^2}+\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4e^2}\right)=\frac{e^2}{4}-\frac{5}{4e^2}$$

(3) $x^2\cos x$ は偶関数である。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2(\sin x)'dx$$

$$=2\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(-\cos x)'dx$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-4\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-4\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{2}-4$$

91 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

解答 $\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

解説

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^{-x})'\sin x\,dx$

$$=\left[-e^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=-e^{-\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-e^{-x})'\cos x\,dx$$

$$=-e^{-\frac{\pi}{2}}+\left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=-e^{-\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx$$

よって $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx=1-e^{-\frac{\pi}{2}}$

ゆえに $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$

92 正の定数 a が $\int_0^a2x\log(x^2+1)dx=1$ を満たすとき，a の値を求めよ。

解答 $a=\sqrt{e-1}$

解説

$\int_0^a2x\log(x^2+1)dx=\int_0^a(x^2+1)'\log(x^2+1)dx$

$$=\left[(x^2+1)\log(x^2+1)\right]_0^a-\int_0^a(x^2+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=(a^2+1)\log(a^2+1)-\left[x^2\right]_0^a$$

$$=(a^2+1)\log(a^2+1)-a^2$$

よって，条件から $(a^2+1)\log(a^2+1)-a^2=1$

ゆえに $(a^2+1)\log(a^2+1)=a^2+1$

$a^2+1\neq0$ であるから $\log(a^2+1)=1$

よって $a^2+1=e$

$a>0$ であるから $a=\sqrt{e-1}$

93 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2x}dx$ (2) $\int_0^1x^2e^{-x}dx$ (3) $\int_3^4x\log(x-2)dx$

解答 (1) $\frac{\pi}{4}-\frac{\log2}{2}$ (2) $2-\frac{5}{e}$ (3) $6\log2-\frac{11}{4}$

解説

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\tan x)'dx=\left[x\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\log(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\log\sqrt{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\log2}{2}$$

(2) $\int_0^1x^2e^{-x}dx=\int_0^1x^2(-e^{-x})'dx=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^1+\int_0^12xe^{-x}dx$

$$=-\frac{1}{e}+2\int_0^1x(-e^{-x})'dx$$

$$=-\frac{1}{e}+2\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1e^{-x}dx\right)$$

$$=-\frac{1}{e}+2\left(-\frac{1}{e}+\left[-e^{-x}\right]_0^1\right)$$

$$=-\frac{1}{e}+2\left\{-\frac{1}{e}+\left(-\frac{1}{e}+1\right)\right\}=2-\frac{5}{e}$$

(3) $\int_3^4x\log(x-2)dx=\int_3^4\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log(x-2)dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\log(x-2)\right]_3^4-\frac{1}{2}\int_3^4\frac{x^2}{x-2}dx$$

$$=8\log2-\frac{1}{2}\int_3^4\left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)dx$$

$$=8\log2-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+2x+4\log(x-2)\right]_3^4$$

$$=8\log2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}+4\log2\right)=6\log2-\frac{11}{4}$$

94 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^e5^{\log x}dx$ (2) $\int_0^1\frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx$

(3) $\int_1^e\frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}dx$ (4) $\int_0^{\pi}|3\sin x+4\cos x|dx$

解答 (1) $\frac{5e-1}{\log5+1}$ (2) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$ (3) $10\sqrt{e}-16$ (4) 10

解説

(1) $\log x=t$ とおくと

$x=e^t$，$dx=e^tdt$

x	$1\longrightarrow e$
t	$0\longrightarrow 1$

よって

$$\int_1^e5^{\log x}dx=\int_0^15^te^tdt=\int_0^1(5e)^tdt$$

$$=\left[\frac{(5e)^t}{\log5e}\right]_0^1=\frac{5e-1}{\log5+1}$$

(2) $x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$$\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\theta+1}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta+1)\cdot(\cos^2\theta)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta+1)\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2\theta+\cos 2\theta+1)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$$

(3) $$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int_1^e\frac{1}{\sqrt{x}}(\log x)^2dx=\int_1^e(2\sqrt{x})'(\log x)^2dx$$

$$=\left[2\sqrt{x}(\log x)^2\right]_1^e-\int_1^e 2\sqrt{x}\cdot\frac{2\log x}{x}dx$$

$$=2\sqrt{e}-4\int_1^e\frac{1}{\sqrt{x}}\log x\,dx=2\sqrt{e}-4\int_1^e(2\sqrt{x})'\log x\,dx$$

$$=2\sqrt{e}-4\left(\left[2\sqrt{x}\log x\right]_1^e-\int_1^e 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=2\sqrt{e}-4\left(2\sqrt{e}-2\int_1^e\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right)$$

$$=2\sqrt{e}-4\left(2\sqrt{e}-2\left[2\sqrt{x}\right]_1^e\right)=10\sqrt{e}-16$$

(4) $3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$　$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

したがって

$$\int_0^\pi|3\sin x+4\cos x|dx=\int_0^\pi|5\sin(x+\alpha)|dx$$

$$=\int_0^{\pi-\alpha}5\sin(x+\alpha)dx+\int_{\pi-\alpha}^\pi\{-5\sin(x+\alpha)\}dx$$

$$=\left[-5\cos(x+\alpha)\right]_0^{\pi-\alpha}+\left[5\cos(x+\alpha)\right]_{\pi-\alpha}^\pi$$

$$=(-5\cos\pi+5\cos\alpha)+\{5\cos(\pi+\alpha)-5\cos\pi\}$$

$$=10+5\cos\alpha-5\cos\alpha=10$$

95 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^4\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx$　　(2) $\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2-3x+2}$　　(3) $\int_0^\pi\sin^2 3x\,dx$

解答　(1) $7+2\log 2$　　(2) $\log\frac{4}{3}$　　(3) $\frac{\pi}{2}$

解説

(1) $$\int_1^4\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx=\int_1^4\left(1+2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx=\left[x+4\sqrt{x}+\log x\right]_1^4$$

$$=(12+\log 4)-5=7+2\log 2$$

(2) $$\int_{-1}^0\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int_{-1}^0\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=\left[\log|x-2|-\log|x-1|\right]_{-1}^0$$

$$=\left[\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]_{-1}^0=\log 2-\log\frac{3}{2}$$

$$=\log\frac{4}{3}$$

(3) $$\int_0^\pi\sin^2 3x\,dx=\int_0^\pi\frac{1-\cos 6x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 6x}{6}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$

96 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^8|\sqrt[3]{x}-1|dx$　　(2) $\int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{2}+\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}\right|dx$

解答　(1) $\frac{9}{2}$　　(2) 2

解説

(1) $0\leqq x\leqq 1$ のとき　$|\sqrt[3]{x}-1|=-(\sqrt[3]{x}-1)$

$1\leqq x\leqq 8$ のとき　$|\sqrt[3]{x}-1|=\sqrt[3]{x}-1$

よって　$$\int_0^8|\sqrt[3]{x}-1|dx=\int_0^1\{-(\sqrt[3]{x}-1)\}dx+\int_1^8(\sqrt[3]{x}-1)dx$$

$$=-\left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-x\right]_0^1+\left[\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}-x\right]_1^8=\frac{9}{2}$$

(2) $$\int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{2}+\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}\right|dx=\int_0^\pi\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|dx$$

$0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$ のとき　$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,

$\frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

であるから

$$\int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{2}+\frac{\sqrt{3}\cos x}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^\pi\left\{-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$$

$$=\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^\pi=2$$

97 定積分 $\int_{-4}^4\sqrt{16-x^2}\,dx$ を求めよ。

解答　8π

解説

$\sqrt{16-x^2}$ は偶関数であるから

$$\int_{-4}^4\sqrt{16-x^2}\,dx=2\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$x=4\sin\theta$ とおくと　$dx=4\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$0 \longrightarrow 4$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

この範囲で　$\cos\theta\geqq 0$

よって　$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}$

$=\sqrt{16\cos^2\theta}=4\cos\theta$

したがって　$$2\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos\theta)4\cos\theta\,d\theta$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=16\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=8\pi$$

参考　求める定積分の値は，半径 4 の半円の面積であるから

$$\frac{1}{2}\pi\cdot 4^2=8\pi$$

98 定積分 $\int_2^3\frac{dx}{x^2-4x+5}$ を求めよ。

解答　$\frac{\pi}{4}$

解説

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

$x-2=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$2 \longrightarrow 3$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

したがって　$$\int_2^3\frac{dx}{x^2-4x+5}=\int_2^3\frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

99 定積分 $\int_0^1 x^2e^x dx$ を求めよ。

解答　$e-2$

解説

$$\int_0^1 x^2e^x dx=\int_0^1 x^2(e^x)'dx=\left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^x dx$$

$$=e-2\int_0^1 x(e^x)'dx=e-2\left(\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)$$

$$=e-2\left(e-\left[e^x\right]_0^1\right)=e-2\{e-(e-1)\}=e-2$$