$\boxed{1}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$ を求めよ。

解答　0

解説

$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to+0}\sin\theta=0$

$\boxed{2}$ 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}$

解答　(1)　0　　(2)　1

解説

(1)　$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow-0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to-0}\sin\theta=0$

(2)　$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to+0}\cos\theta=1$

$\boxed{3}$ 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

解答　(1)　2　　(2)　2

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\sin2x}{2x}=2\cdot1=2$

(2)　$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)=1^2\cdot2=2$$

$\boxed{4}$ 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin3x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

解答　(1)　$\dfrac{2}{3}$　　(2)　1

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin3x}\right)=\frac{2}{3}\cdot1\cdot1=\frac{2}{3}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=1\cdot\frac{1}{1}=1$

$\boxed{5}$ 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{2x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin5x}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

解答　(1)　$\dfrac{3}{2}$　　(2)　$\dfrac{3}{5}$　　(3)　$\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin3x}{3x}\right)=\frac{3}{2}\cdot1=\frac{3}{2}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin5x}\right)=\frac{3}{5}\cdot1\cdot1=\frac{3}{5}$

(3)　$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{6}$ $x-\pi=\theta$ とおくことにより，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}$ を求めよ。

解答　2

解説

$x-\pi=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\pi$ のとき　$\theta\longrightarrow0$

よって　$$\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^2}{1+\cos(\theta+\pi)}=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^2}{1-\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2\cdot(1+\cos\theta)$$
$$=1^2\cdot(1+1)=2$$

$\boxed{7}$ 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

解答　(1)　-1　　(2)　1

解説

(1)　$x-\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta\longrightarrow0$

よって　$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{\theta\to0}\frac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\left(-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=-1$$

(2)　$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

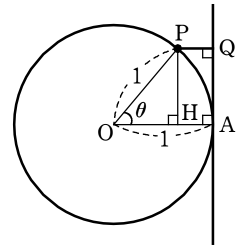
$\boxed{8}$ 半径 1 の円 O の周上に，定点 A がある。A における円 O の接線に，A と異なる円周上の点 P から垂線 PQ を下ろす。ただし，$0<\angle\mathrm{AOP}<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とするとき，AQ，PQ を θ を用いて表せ。

(2)　P が A に限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{PQ}}$ の極限を求めよ。

解答　(1)　$1-\cos\theta$　　(2)　2

解説



(1)　右の図において，P から OA に下ろした垂線を PH とすると

$\mathrm{AQ}=\mathrm{HP}=\sin\theta$

$\mathrm{PQ}=\mathrm{HA}=\mathrm{OA}-\mathrm{OH}$

$=1-\cos\theta$

(2)　P が A に限りなく近づくときは

$\theta\to+0$

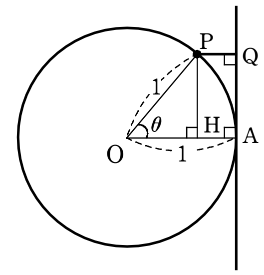
よって，求める極限は

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{PQ}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}(1+\cos\theta)=2$$

$\boxed{9}$ 半径 1 の円 O の周上に，定点 A がある。A における円 O の接線に，A と異なる円周上の点 P から垂線 PQ を下ろす。ただし，$0<\angle\mathrm{AOP}<\dfrac{\pi}{2}$ とする。$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とし，中心角 θ に対する弧 PA の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{PA}}$ で表すとき，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{PA}}{}^2}{\mathrm{PQ}}$ を求めよ。

解答　2

解説



右の図において，P から OA に下ろした垂線を PH とすると

$\mathrm{PQ}=\mathrm{HA}=\mathrm{OA}-\mathrm{OH}=1-\cos\theta$

また　$\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=\theta$

よって　$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{PA}}{}^2}{\mathrm{PQ}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2}{1-\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta^2(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2\cdot(1+\cos\theta)$$
$$=1^2\cdot2=2$$

10 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 3x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$

解答 (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) 0

解説

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3\cos x}\right)$$
$$=1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

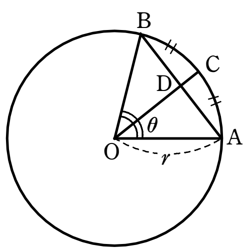
別解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{2\sin x\cos^2 x+\cos 2x\sin x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{2\cos^2 x+\cos 2x}\right)$$
$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)=1\cdot\frac{0}{2}=0$$

別解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot x$$
$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot 0=0$$

11 半径 r の円 O の周上に，中心角 θ に対する弧 AB をとり，弧 AB を 2 等分する点を C とする。また，線分 OC と弦 AB の交点を D とする。次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to +0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to +0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}$



解答 (1) 1　(2) 0

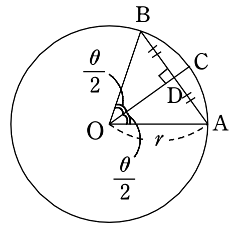
解説

$\theta\longrightarrow +0$ のときについて考えるのであるから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい。

(1) $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=r\theta$

AB と OD は垂直で，OD は ∠AOB の二等分線

であるから　$\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\theta}{2}$



よって　$\mathrm{AD}=r\sin\dfrac{\theta}{2}$

ゆえに　$\mathrm{AB}=2\mathrm{AD}=2r\sin\dfrac{\theta}{2}$

したがって　$$\lim_{\theta\to +0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}=\lim_{\theta\to +0}\frac{r\theta}{2r\sin\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to +0}\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=1$$

(2) $\mathrm{CD}=\mathrm{OC}-\mathrm{OD}=r-r\cos\dfrac{\theta}{2}=r\left(1-\cos\dfrac{\theta}{2}\right)$

であるから

$$\lim_{\theta\to +0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}=\lim_{\theta\to +0}\frac{r\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2r\sin\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to +0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to +0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}=\lim_{\theta\to +0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to +0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

12 次の極限を求めよ。[各 7 点]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\cos\frac{1}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\tan\frac{1}{x}$

解答 (1) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow -\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow -0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\cos\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to -0}\cos\theta=1$

(2) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow \infty$ のとき　$\theta\longrightarrow +0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to \infty}\tan\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to +0}\tan\theta=0$

解説

(1) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow -\infty$ のとき　$\theta\longrightarrow -0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\cos\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to -0}\cos\theta=1$

(2) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow \infty$ のとき　$\theta\longrightarrow +0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to \infty}\tan\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to +0}\tan\theta=0$

13 次の極限を求めよ。[各 9 点]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan 3x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}$

解答 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{5}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{2}$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3}$$

(4) $x+\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow -\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta\longrightarrow 0$

よって　$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{5}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{2}$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\cos 3x$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3}$$

(4) $x+\dfrac{\pi}{2}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow -\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\theta\longrightarrow 0$

よって　$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x+\frac{\pi}{2}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

14 次の極限を求めよ。[25 点]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$$

解答 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos 3x}$$
$$=1^2\cdot\frac{9}{1+1}=\frac{9}{2}$$

解説

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos 3x}$$
$$=1^2\cdot\frac{9}{1+1}=\frac{9}{2}$$

15 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{\cos x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\tan 2x}$

解答　(1) 2　　(2) 0　　(3) $\frac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cos x=2$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}=2\cdot 1\cdot 1=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos^2 x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\cos x)=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\tan^2 x}{2}=\frac{1}{2}$

16 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos x}$

解答　(1) 3　　(2) $\frac{\pi}{180}$　　(3) 8

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=1\cdot 3=3$

別解　$3x=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow 0$ のとき $\theta\longrightarrow 0$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\dfrac{\theta}{3}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot 3=1\cdot 3=3$

(2) x° は弧度法で表すと $\frac{\pi}{180}x$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{180}x}=1\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\pi}{180}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)\sin^2 2x}{1-\cos^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)\sin^2 2x}{\sin^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\times(2x)^2\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\frac{1}{x^2}\times(1+\cos x)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times 4(1+\cos x)$

$=1^2\cdot 1^2\cdot 4(1+1)=8$

17 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{\sin 3x}$

解答　(1) 2　　(2) 2　　(3) $\frac{5}{4}$　　(4) $\frac{1}{2}$　　(5) 8　　(6) $-\frac{1}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 4x}{4x}=2\cdot 1=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{1}=2$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{5}{4}=1\cdot 1\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 4x}{x^2(1+\cos 4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{x^2(1+\cos 4x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2\cdot\frac{16}{1+\cos 4x}\right\}=1^2\cdot\frac{16}{2}=8$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}8\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 3x}-\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{3}-\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}\right)$

$\displaystyle=1\cdot\frac{1}{3}-1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2\sin x\cos x}{-4\sin^3 x+3\sin x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}-2\cos x}{-4\sin^2 x+3}=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$

18 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

解答　(1) $\frac{1}{8}$　　(2) $-\pi$　　(3) 1

解説

(1) $x-\frac{\pi}{2}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ のとき $t\longrightarrow 0$

$1-\sin x=1-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=1-\cos t$,　$(2x-\pi)^2=\left\{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2=4t^2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(2x-\pi)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{4t^2}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{4t^2(1+\cos t)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{4t^2(1+\cos t)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos t}=\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(2) $x-1=t$ とおくと　$x\longrightarrow 1$ のとき $t\longrightarrow 0$

$\sin\pi x=\sin\pi(t+1)=-\sin\pi t$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)\cdot\pi=-\pi$

(3) $\frac{1}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow +0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin t}{t}=1$

19 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\tan\pi x-1}{4x-1}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

解答　(1) 2　　(2) $\frac{\pi}{2}$　　(3) $\frac{1}{2}$

解説

(1) $x-\pi=t$ とおくと　$x\longrightarrow\pi$ のとき $t\longrightarrow 0$

$1+\cos x=1+\cos(t+\pi)=1-\cos t$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2(1+\cos t)}{1-\cos^2 t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^2(1+\cos t)=1^2\cdot 2=2$

(2) $x-\frac{1}{4}=t$ とおくと，$x\to\frac{1}{4}$ のとき $t\to 0$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\tan\pi x-1}{4x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)-1}{4t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\tan\pi t+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\pi t\cdot\tan\frac{\pi}{4}}-1}{4t}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan\pi t}{2t(1-\tan\pi t)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\pi}{\cos\pi t}\cdot\frac{1}{1-\tan\pi t}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\pi}{2}$

別解　$f(x)=\tan\pi x$ とすると　$f'(x)=\dfrac{\pi}{\cos^2\pi x}$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\tan\pi x-1}{4x-1}=\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{1}{4}\cdot\frac{\tan\pi x-\tan\frac{\pi}{4}}{x-\frac{1}{4}}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{1}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow +0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to +0}\frac{1}{t^2}(1-\cos t)=\lim_{t\to +0}\frac{\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)}$

$\displaystyle=\lim_{t\to +0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos t}=\frac{1}{2}$

20 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(2\sin x)}{3x(1+2x)}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sin\frac{x}{\pi}\right)}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$

解答 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{\pi}$ (3) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(2\sin x)}{3x(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(2\sin x)}{2\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{3(1+2x)}=1\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sin\frac{x}{\pi}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sin\frac{x}{\pi}\right)}{\sin\frac{x}{\pi}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{\pi}}{\frac{x}{\pi}}\cdot\frac{1}{\pi}$

$\displaystyle=1\cdot1\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi}$

(3) $-1\leqq\sin\frac{1}{x}\leqq1$, $x\neq0$ から $-x^2\leqq x^2\sin\frac{1}{x}\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-x^2)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

21 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$

解答 (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}{\frac{\pi}{2}\sin x}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}$

(3) $x>0$ のとき，$-1\leqq\cos x\leqq1$ から $\displaystyle-\frac{1}{x}\leqq\frac{\cos x}{x}\leqq\frac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

(4) $0\leqq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq1$ であるから

$0\leqq|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$ すなわち $0\leqq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|$

$\displaystyle\lim_{x\to0}|x|=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

22 次の極限を調べよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{2}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin x}$

解答 (1) 1 (2) 0 (3) 極限はない

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{2}{x}=\cos0=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1}{\tan x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\tan x}=0$ よって $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sin x}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{\sin x}=-\infty$ よって，極限はない。

23 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin5x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\tan x}$

解答 (1) 4 (2) $\frac{2}{5}$ (3) 3

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{x}=\lim_{x\to0}4\cdot\frac{\sin4x}{4x}=4\cdot1=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin5x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{5}\cdot\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin5x}=\frac{2}{5}\cdot1\cdot1=\frac{2}{5}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{\tan x}=\lim_{x\to0}\sin3x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot3\cos x$

$=1\cdot1\cdot3\cdot1=3$

24 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan2x-\sin x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+\sin x}{\sin2x}$

解答 (1) 1 (2) 2 (3) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan2x-\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos2x}-\frac{\sin x}{x}\right)=1\cdot\frac{2}{1}-1=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\sin x}{x}=2\cdot1=2$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+\sin x}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{\sin2x}+\frac{\sin x}{\sin2x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\right)$

$\displaystyle=\frac{3}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=2$

25 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin2x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}$

解答 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sin x}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{\sin x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}(1+\cos x)=1+1=2$

26 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x^\circ}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{2x}$

解答 (1) $\frac{\pi}{180}$ (2) 1 (3) -1 (4) $-\pi$ (5) 1 (6) $\frac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\frac{\pi}{180}}{\cos\frac{\pi}{180}x}=\frac{\pi}{180}$

(2) $x-\pi=t$ とおくと $x\longrightarrow\pi$ のとき $t\longrightarrow0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

(3) $x-\frac{\pi}{2}=t$ とおくと $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ のとき $t\longrightarrow0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x=\lim_{t\to0}t\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{t\to0}\left(-\frac{t}{\tan t}\right)$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)\cdot(-\cos t)=-1$

(4) $x-1=t$ とおくと $x\longrightarrow1$ のとき $t\longrightarrow0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi t+\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\pi t}{t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\left(-\pi\cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)=-\pi$

(5) $\sin x=t$ とおくと $x\longrightarrow0$ のとき $t\longrightarrow0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

(6) $t=\frac{1}{2x}$ とおくと $x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow+0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{2x}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}$

27 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x}$

解答 (1) $\dfrac{9}{2}$ (2) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}9\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos 3x}$

$\displaystyle=9\cdot 1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{9}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x^2)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x^2)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)=1\cdot 1^2\cdot 2=2$

28 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x+\pi}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}$

解答 (1) 1 (2) 極限はない (3) 0

解説

(1) $x\longrightarrow\infty$ のとき $\dfrac{1}{x+\pi}\longrightarrow +0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x+\pi}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{1}{\sin x}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{1}{\sin x}=-\infty$

よって，$x\longrightarrow 0$ のときの極限はない。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1}{\tan x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{\tan x}=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}=0$

29 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan x}$

解答 (1) 4 (2) 3 (3) 5

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\right)=4\cdot 1=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{6}{2}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right)=\frac{6}{2}\cdot 1\cdot 1=3$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\sin 5x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)$

$=5\cdot 1\cdot 1\cdot 1=5$

30 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sin x}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^3}$

解答 (1) 0 (2) 0 (3) 0

解説

(1) $0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ であるから

$0\leqq\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x^2|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq x^2$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

(2) $0\leqq|\sin x|\leqq 1$ であるから，$x\neq 0$ のとき

$0\leqq\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=\dfrac{|\sin x|}{|x|}\leqq\dfrac{1}{|x|}$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{|x|}=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

(3) $-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから $0\leqq 1-\cos x\leqq 2$

よって，$x>0$ のとき $0\leqq\dfrac{1-\cos x}{x^3}\leqq\dfrac{2}{x^3}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x^3}=0$

31 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

解答 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 4 (3) $\dfrac{9}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cos x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2\cos x(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\right\}$

$\displaystyle=1^2\cdot\frac{1}{1(1+1)}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\sin x}\cdot 2(1+\cos x)\right\}=1\cdot 2(1+1)=4$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos 3x}\right\}=1^2\cdot\frac{9}{1+1}=\frac{9}{2}$

32 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}x\sin\frac{1}{3x}$

解答 (1) 1 (2) 1 (3) $\dfrac{1}{3}$

解説

(1) $x-\pi=t$ とおくと，$x\longrightarrow\pi$ のとき

$t\longrightarrow 0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

(2) $\sin x=t$ とおくと，$x\longrightarrow 0$ のとき

$t\longrightarrow 0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

(3) $\dfrac{1}{3x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow -\infty$ のとき

$t\longrightarrow -0$

また $x=\dfrac{1}{3t}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}x\sin\frac{1}{3x}=\lim_{t\to -0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin t}{t}\right)=\frac{1}{3}$

別解 おき換えを用いず，次のように解いてもよい。

$x\longrightarrow -\infty$ のとき，$\dfrac{1}{3x}\longrightarrow -0$ であるから

$$\lim_{x\to -\infty}x\sin\frac{1}{3x}=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{1}{3x}}{\frac{1}{3x}}\right)=\frac{1}{3}$$

33 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan 2x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ (5) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\sin\pi x}{x+1}$

解答 (1) -1 (2) $\dfrac{\pi}{180}$ (3) 2 (4) 2 (5) $-\pi$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2x}{x\cos 2x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right)$

$=1-2\cdot 1\cdot 1=-1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}\right)$

$\displaystyle=\frac{\pi}{180}\cdot 1=\frac{\pi}{180}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=1+1=2$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{x^2(1+\cos 2x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{4\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos 2x}\right\}$$

$$=4\cdot1^2\cdot\frac{1}{1+1}=2$$

別解　$1-\cos 2x=2\sin^2 x$ であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}=2\cdot1^2=2$$

(5)　$x+1=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow -1$ のとき

$\theta\longrightarrow 0$

また　$\sin\pi x=\sin\pi(\theta-1)=\sin(\pi\theta-\pi)$

$=-\sin\pi\theta$

よって　$$\lim_{x\to-1}\frac{\sin\pi x}{x+1}=\lim_{\theta\to0}\frac{-\sin\pi\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left\{(-\pi)\cdot\frac{\sin\pi\theta}{\pi\theta}\right\}$$

$$=(-\pi)\cdot1=-\pi$$

34　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{2x+x^3}$　　(2)　$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$　　(3)　$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2\sin x)}{3x(1+2x)}$

解答　(1)　$\frac{1}{2}$　　(2)　$\frac{1}{2}$　　(3)　$\frac{2}{3}$

解説

(1)　$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{2x+x^3}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x(2+x^2)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{(2+x^2)\cos x}\right\}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2\cdot1}=\frac{1}{2}$$

(2)　$\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow+0$

したがって

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t^2}(1-\cos t)$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t^2(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\sin^2 t}{t^2(1+\cos t)}$$

$$=\lim_{t\to+0}\left\{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos t}\right\}$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(3)　$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2\sin x)}{3x(1+2x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(2\sin x)}{3x(1+2x)}\cdot\frac{\sin x}{\sin x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(2\sin x)}{2\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{3(1+2x)}\right\}$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{2}{3\cdot1}=\frac{2}{3}$$

35　極限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{2}$

解説

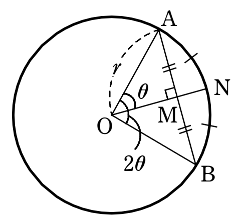
$x-\frac{\pi}{2}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$ のとき　$t\longrightarrow0$　　また　$2x-\pi=2t$

よって　　与式$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{2t}=\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}\right)=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

36　定円 O の弦 AB，弧 AB の中点を，それぞれ M，N とする。B が A に限りなく近づくとき，$\frac{MN}{AB}$ の極限値を求めよ。

解答　0

解説



OA$=r$，$\angle$AOB$=2\theta$ とする。

△AOM において　　OM$=r\cos\theta$

よって　　MN$=$ON$-$OM

$=r-r\cos\theta$

$=r(1-\cos\theta)$

また，AB$=2$AM$=2r\sin\theta$ であるから

$$\frac{MN}{AB}=\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{2\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{1-\cos^2\theta}{2\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\sin^2\theta}{2\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

B が A に限りなく近づくとき　$\theta\longrightarrow0$ であるから

$$\lim_{\theta\to0}\frac{MN}{AB}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}=0$$

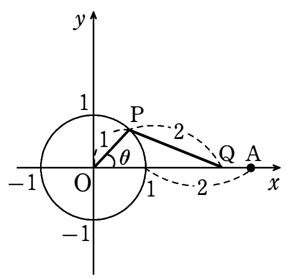
37　θ を $0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす実数とする。単位円周上の点 P を，動径 OP と x 軸の正の部分とのなす角が θ である点とし，点 Q を x 軸の正の部分の点で，点 P からの距離が 2 であるものとする。また，$\theta=0$ のときの点 Q の位置を A とする。

(1)　線分 OQ の長さを θ を使って表せ。

(2)　線分 QA の長さを L とするとき，極限値 $\lim_{\theta\to0}\frac{L}{\theta^2}$ を求めよ。

解答　(1)　$\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}$　　(2)　$\frac{3}{4}$

解説



(1)　OQ$=x$ とおく。△OPQ において，余弦定理により　$2^2=1^2+x^2-2x\cos\theta$

ゆえに　$x^2-2(\cos\theta)x-3=0$

よって　$x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta+3}$

$x>0$ であるから　$x=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}$

したがって　OQ$=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}$

(2)　A$(3,\ 0)$ であるから

$L=$OA$-$OQ$=3-\left(\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)$

$=3-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+3}$

ゆえに　$$\frac{L}{\theta^2}=\frac{3-\cos\theta-\sqrt{\cos^2\theta+3}}{\theta^2}=\frac{(3-\cos\theta)^2-(\cos^2\theta+3)}{\theta^2\left(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)}$$

$$=6\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta^2\left(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)}$$

$\theta\longrightarrow0$ のときを考えるから $1+\cos\theta>0$ として

$$\frac{L}{\theta^2}=6\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\theta^2\left(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)(1+\cos\theta)}$$

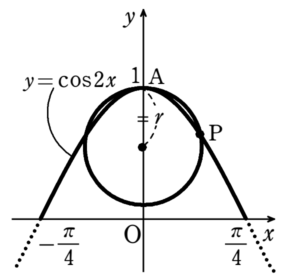
$$=6\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{1}{\left(3-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+3}\right)(1+\cos\theta)}$$

よって　$$\lim_{\theta\to0}\frac{L}{\theta^2}=6\cdot1\cdot\frac{1}{(2+2)\cdot2}=\frac{3}{4}$$

38　曲線 $y=\cos 2x$ $\left(-\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}\right)$ 上の動点 P と A$(0,\ 1)$ を通り y 軸上に中心をもつ円の半径を r とする。P が A に限りなく近づくとき，r はどんな値に近づくか。

解答　$\frac{1}{4}$

解説



P$(x,\ \cos 2x)$ とおく。

曲線 $y=\cos 2x$ は y 軸に関して対称であるから，

$0<x\leqq\frac{\pi}{4}$ の場合を考えれば十分である。

2 点 A，P を通り y 軸上に中心をもつ半径 r の円の中心の座標は　$(0,\ 1-r)$

よって，その方程式は

$$x^2+\{y-(1-r)\}^2=r^2$$

点 P がこの円上にあるから

$$x^2+\{\cos 2x-(1-r)\}^2=r^2$$

整理すると　$2(1-\cos 2x)r=x^2+(1-\cos 2x)^2$

$0<x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$1-\cos 2x\neq0$ であるから

$$r=\frac{x^2+(1-\cos 2x)^2}{2(1-\cos 2x)}=\frac{x^2}{2(1-\cos 2x)}+\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{x^2}{2\cdot2\sin^2 x}+\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+\frac{1-\cos 2x}{2}$$

P が A に限りなく近づくとき，$x\longrightarrow+0$ であり

$$\lim_{x\to+0}r=\lim_{x\to+0}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2+\frac{1-\cos 2x}{2}\right\}=\frac{1}{4}\cdot1^2+\frac{1-1}{2}=\frac{1}{4}$$

したがって，r は $\frac{1}{4}$ に近づく。