いろいろな関数の極限クイズ

$\boxed{1}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1-x^2)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^4-2)$

解答　(1) 0　(2) 1　(3) 0　(4) $-\infty$　(5) $-\infty$　(6) ∞

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3+1}=0$

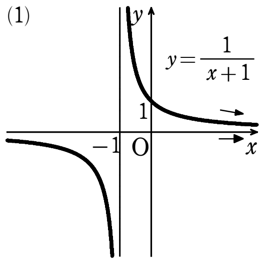
(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(1-x^2)=-\infty$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3+1)=-\infty$

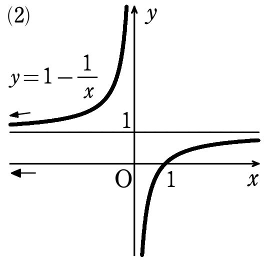
(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^4-2)=\infty$

参考

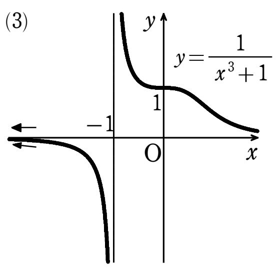
(1)



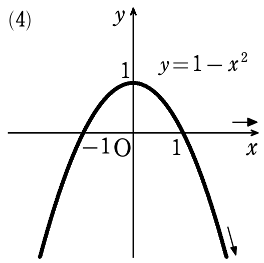
(2)



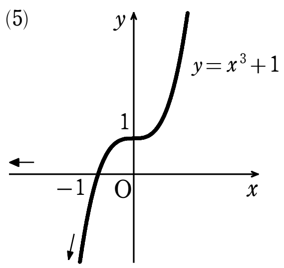
(3)



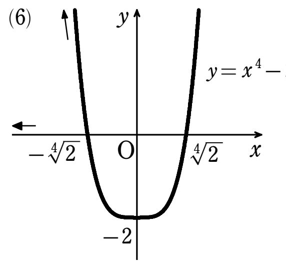
(4)



(5)



(6)



$\boxed{2}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4}{3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-\infty$

解説

$\boxed{3}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-4}{x^2+x-5}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2+1}$

解答　(1) 2　(2) ∞　(3) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-4}{x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$

$\boxed{4}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$

解答　(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $-\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{4}$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t}-t)$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-t}-t)(\sqrt{t^2-t}+t)}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}=-\frac{1}{2}$

$\boxed{5}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}-x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)$

解答　(1) -1　(2) $-\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x+2}-x)(\sqrt{x^2-2x+2}+x)}{\sqrt{x^2-2x+2}+x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$

$=-1$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+2x}+2x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2-2t}-2t)$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2-2t}-2t)(\sqrt{4t^2-2t}+2t)}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{4t^2-2t}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{4-\frac{2}{t}}+2}=-\frac{1}{2}$

$\boxed{6}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}3^{-x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2 x$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{3}} x$

解答　(1) 0　(2) 0　(3) ∞　(4) ∞

解説

(1) 底 2 は，$2>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x=0$

(2) $3^{-x}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

底 $\dfrac{1}{3}$ は，$0<\dfrac{1}{3}<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}3^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$

(3) 底 2 は，$2>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$

(4) 底 $\dfrac{1}{3}$ は，$0<\dfrac{1}{3}<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{3}} x=\infty$

$\boxed{7}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x-2}{x}$

解答　(1) ∞　(2) 1

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)=\lim_{x\to\infty}3^x\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x-2}{x}=\lim_{x\to\infty}\log_3\left(3-\frac{2}{x}\right)=\log_3 3=1$

8 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x-2^{2x})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2(x-1)\}$

解答 (1) $-\infty$ (2) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x-2^{2x})=\lim_{x\to\infty}(3^x-4^x)=\lim_{x\to\infty}4^x\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^x-1\right\}=-\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2(x-1)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(4+\frac{5}{x-1}\right)$

$=\log_2 4=2$

別解 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2(x-1)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

$=\log_2 4=2$

9 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$ を求めよ。

解答 0

解説

$\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき $\theta\longrightarrow+0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to+0}\sin\theta=0$

10 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}$

解答 (1) 0 (2) 1

解説

(1) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $\theta\longrightarrow-0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to-0}\sin\theta=0$

(2) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき $\theta\longrightarrow+0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to+0}\cos\theta=1$

11 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x+3)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-x+1)$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

解答 (1) $-\infty$ (2) 1 (3) 2 (4) 0

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x+3)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)=-\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-1}{2^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^x}}{1+\frac{1}{2^x}}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-x+1)$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{x^2+2x-1}-(x-1)\}\{\sqrt{x^2+2x-1}+(x-1)\}}{\sqrt{x^2+2x-1}+(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x-1)-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x-1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}=\frac{4}{2}=2$

(4) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+1}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+1}-t)(\sqrt{t^2+1}+t)}{\sqrt{t^2+1}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+1)-t^2}{\sqrt{t^2+1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}=0$

12 次の極限を求めよ。[(1) 5 点 (2)(3) 各 7 点]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(4-\frac{3}{x^2}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x}{x^3-3x+2}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$

解答 (1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(4-\frac{3}{x^2}\right)=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(4-\frac{3}{x^2}\right)=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x}{x^3-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=-\frac{1}{2}$

13 次の極限を求めよ。[各 7 点]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2^{3x}+3^{-x})$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_3(6x+1)-\log_3(2x+3)\}$

解答 (1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2^{3x}+3^{-x})=\lim_{x\to-\infty}\left\{8^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_3(6x+1)-\log_3(2x+3)\}=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{6x+1}{2x+3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{6+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=1$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2^{3x}+3^{-x})=\lim_{x\to-\infty}\left\{8^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_3(6x+1)-\log_3(2x+3)\}=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{6x+1}{2x+3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{6+\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}=1$

14 次の極限を求めよ。[各 7 点]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan\frac{1}{x}$

解答 (1) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $\theta\to-0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to-0}\cos\theta=1$

(2) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $\theta\to+0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to+0}\tan\theta=0$

解説

(1) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $\theta\to-0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to-0}\cos\theta=1$

(2) $\dfrac{1}{x}=\theta$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $\theta\to+0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to+0}\tan\theta=0$

15 次の極限を求めよ。[25 点]

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$

解答 $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+t+1})$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}=-1$

解説

$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+t+1})$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}=-1$$

$\boxed{16}$ 次の極限を求めよ。[25 点]

$$\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{9x^2-3x})$$

解答 $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって

$$\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{9x^2-3x})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{9t^2+3t}-3t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{9t^2+3t}-3t)(\sqrt{9t^2+3t}+3t)}{\sqrt{9t^2+3t}+3t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(9t^2+3t)-(3t)^2}{\sqrt{9t^2+3t}+3t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{9t^2+3t}+3t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{9+\frac{3}{t}}+3}=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}$$

解説

$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって

$$\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{9x^2-3x})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{9t^2+3t}-3t)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{9t^2+3t}-3t)(\sqrt{9t^2+3t}+3t)}{\sqrt{9t^2+3t}+3t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(9t^2+3t)-(3t)^2}{\sqrt{9t^2+3t}+3t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{9t^2+3t}+3t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{9+\frac{3}{t}}+3}=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}$$

$\boxed{17}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-3)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{3x^2+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2x}-x}$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$

解答 (1) $-\infty$　(2) $\frac{2}{3}$　(3) 4　(4) $-\frac{3}{2}$

解説

(1) $$\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-3)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)=-\infty$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{3x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4(\sqrt{x^2+2x}+x)}{(x^2+2x)-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4(\sqrt{x^2+2x}+x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)=4$$

(4) $$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1}=-\frac{3}{2}$$

別解 $x\longrightarrow-\infty$ のとき，$x=-t$ とおくと $t\longrightarrow\infty$ で

$$(与式)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{\sqrt{t^2-3t}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{t}}+1}=-\frac{3}{2}$$

$\boxed{18}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^4-3x^2+2)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x}{2x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-1})$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3x+1+\sqrt{9x^2+1})$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

解答 (1) ∞　(2) $-\infty$　(3) $\frac{3}{2}$　(4) $-\frac{1}{2}$　(5) 1　(6) 1

解説

(1) $$\lim_{x\to-\infty}(x^4-3x^2+2)=\lim_{x\to-\infty}x^4\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)=\infty$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{2-\frac{1}{x}}=-\infty$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-1})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{2}$$

(4) $$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}=-\frac{1}{2}$$

(5) $$\lim_{x\to-\infty}(3x+1+\sqrt{9x^2+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(3x+1)^2-(9x^2+1)}{3x+1-\sqrt{9x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{3x+1-\sqrt{9x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{3+\frac{1}{x}+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}=1$$

(6) $$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\{(x+1)-(x-1)\}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$$

別解 (4) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ で

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-t^2}{\sqrt{t^2-t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

(5) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ で

$$\lim_{x\to-\infty}(3x+1+\sqrt{9x^2+1})=\lim_{t\to\infty}(-3t+1+\sqrt{9t^2+1})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(-3t+1)^2-(9t^2+1)}{-3t+1-\sqrt{9t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-6t}{-3t+1-\sqrt{9t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-6}{-3+\frac{1}{t}-\sqrt{9+\frac{1}{t^2}}}=1$$

$\boxed{19}$ (1) 次の極限を求めよ。

(ア) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{3^x-2^x}$　　(イ) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+2^x)^{\frac{1}{x}}$

(ウ) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})\right\}$

(2) $x>1$ のとき，不等式 $0<\log x<x$ が成り立つ。これを利用して，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ。ただし，$\log x$ は $e=2.71828\cdots\cdots$ を底とする対数とする。

解答 (1) (ア) 0　(イ) 3　(ウ) $-\frac{1}{2}\log_3 2$　(2) 0

解説

(1) (ア) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}=\frac{0}{0-1}=0$$

(イ) $$\lim_{x\to\infty}(3^x+2^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}3\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}=3(1+0)^0=3$$

別解 $$(3^x+2^x)^{\frac{1}{x}}=3\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$$

$x\to\infty$ であるから，$x>1$　すなわち $0<\frac{1}{x}<1$ と考えてよい。

ゆえに　$$\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^0<\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}<\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^1$$

ここで　$$\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^0=1,\quad \lim_{x\to\infty}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^1=1$$

よって　$$\lim_{x\to\infty}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}=1$$

したがって　$$\lim_{x\to\infty}(3^x+2^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}3\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}=3$$

(ウ) $$\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})=\log_3\sqrt{x}+\log_3\frac{(2x+1)-(2x-1)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$$

$$=\log_3\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}$$
$$=\log_3\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}}$$

したがって

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})\right\}=\log_3\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\log_3 2$$

(2) $x>1$ のとき $\sqrt{x}>1$ であるから　$0<\log\sqrt{x}<\sqrt{x}$

すなわち　$0<\frac{1}{2}\log x<\sqrt{x}$

ゆえに　$0<\frac{\log x}{x}<\frac{2}{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ であるから　$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

20 次の極限を求めよ。ただし，(4) において，$\log x$ は $e=2.71828\cdots\cdots$ を底とする対数とする。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+5^x}{3^x-5^x}$　(2) $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^x+\left(\frac{4}{3}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(8x^2+2)-2\log_2(5x+3)\}$

(4) $\lim_{x\to+0}x\log x$ $\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0\text{ であることを利用してもよい。}\right)$

解答 (1) 1　(2) $\frac{3}{2}$　(3) $3-2\log_2 5$　(4) 0

解説

(1) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x+5^x}{3^x-5^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\left(\frac{5}{3}\right)^x}{1-\left(\frac{5}{3}\right)^x}=1$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^x+\left(\frac{4}{3}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}\left\{1+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}=\frac{3}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(8x^2+2)-2\log_2(5x+3)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{8x^2+2}{(5x+3)^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{8+\frac{2}{x^2}}{\left(5+\frac{3}{x}\right)^2}$$
$$=\log_2\frac{8}{5^2}=3-2\log_2 5$$

(4) $x=\frac{1}{t}$ とおくと $x\to+0$ のとき $t\to\infty$

ゆえに　$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\log t}{t}\right)=0$$

21 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}$　(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-1}$　(3) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)$

(4) $\lim_{x\to\infty}(2-x^2)$　(5) $\lim_{x\to-\infty}(1-x^3)$

解答 (1) 0　(2) 0　(3) 1　(4) $-\infty$　(5) ∞

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}=0$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-1}=0$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)=1$

(4) $\lim_{x\to\infty}(2-x^2)=-\infty$

(5) $\lim_{x\to-\infty}(1-x^3)=\infty$

22 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^2-3x)$　(2) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+9x^2)$　(3) $\lim_{x\to-\infty}(x^2-x^3)$

解答 (1) ∞　(2) $-\infty$　(3) ∞

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^2-3x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)=\infty$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+9x^2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2+\frac{9}{x}\right)=-\infty$

(3) $\lim_{x\to-\infty}(x^2-x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)=\infty$

23 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x+1}$　(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x}{-x^3+4x^2+2}$　(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x-2}{x^2-3x+2}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+3}{-3x+1}$　(5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+3x+1}{x^2+2x-1}$

解答 (1) 0　(2) 0　(3) 3　(4) $-\infty$　(5) ∞

解説

(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=0$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x}{-x^3+4x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}=0$$

(3) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-5x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=3$$

(4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+3}{-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4+\frac{3}{x}}{-3+\frac{1}{x}}=-\infty$$

(5) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+3x+1}{x^2+2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\infty$$

24 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$　(2) $\lim_{x\to\infty}(x+1-\sqrt{x^2+x})$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})$　(4) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}+x)$

解答 (1) 0　(2) $\frac{1}{2}$　(3) 1　(4) $\frac{3}{2}$

解説

(1) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}=0$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}(x+1-\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1-\sqrt{x^2+x})(x+1+\sqrt{x^2+x})}{x+1+\sqrt{x^2+x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x^2+x)}{x+1+\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+1+\sqrt{x^2+x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

(4) $x=-t$ とおくと　$x\to-\infty$ のとき　$t\to\infty$

よって　$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+3t+1}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+3t+1)-t^2}{\sqrt{t^2+3t+1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t+1}{\sqrt{t^2+3t+1}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}}+1}=\frac{3}{2}$$

別解 $$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-3x+1)-x^2}{\sqrt{x^2-3x+1}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{x^2-3x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{3}{2}$$

25 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}3^x$　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$　(3) $\lim_{x\to\infty}\log_5 x$　(4) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{5}}x$

(5) $\lim_{x\to\infty}(5^x-3^x)$　(6) $\lim_{x\to\infty}(6^x-3^{2x})$　(7) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(8x+3)-\log_2 x\}$

解答 (1) 0　(2) 0　(3) ∞　(4) $-\infty$　(5) ∞　(6) $-\infty$　(7) 3

解説

(1) $\lim_{x\to-\infty}3^x=0$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}\log_5 x=\infty$

(4) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{5}}x=-\infty$

(5) $\lim_{x\to\infty}(5^x-3^x)=\lim_{x\to\infty}5^x\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x\right\}=\infty$

(6) $\lim_{x\to\infty}(6^x-3^{2x})=\lim_{x\to\infty}(6^x-9^x)=\lim_{x\to\infty}9^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}=-\infty$

(7) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(8x+3)-\log_2 x\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{8x+3}{x}=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(8+\frac{3}{x}\right)=\log_2 8=3$

26 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}$　(2) $\lim_{x\to\infty}x(x-\sqrt{x^2-a^2})$　（a は定数）

(3) $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})\right\}$

解答 (1) -2　(2) $\frac{a^2}{2}$　(3) $-\frac{1}{2}$

解説

(1) $x=-t$ とおくと　$x\to-\infty$ のとき　$t\to\infty$

よって　$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}{(t^2-t+1)-(t^2+1)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}{-t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)=-2$

別解 $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}{(x^2+x+1)-(x^2+1)}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=-2$

(2) $\lim_{x\to\infty}x(x-\sqrt{x^2-a^2})=\lim_{x\to\infty}\frac{x\{x^2-(x^2-a^2)\}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^2x}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}=\frac{a^2}{2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})\right\}=\lim_{x\to\infty}\log_3\sqrt{x}(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})$

ここで　$\sqrt{x}(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})=\frac{\sqrt{x}\{(3x+1)-(3x-1)\}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$

$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}=\frac{2}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{1}{x}}}$

よって　$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{2}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{1}{x}}}=\log_3\frac{2}{2\sqrt{3}}=\log_3\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$

27 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}$　(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)$　(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x^3}$

(4) $\lim_{x\to\infty}(x^2-5)$　(5) $\lim_{x\to-\infty}(3x-x^3)$　(6) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-3x)$

解答 (1) 0　(2) 1　(3) 0　(4) ∞　(5) ∞　(6) $-\infty$

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2}=0$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=1$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x^3}=0$

(4) $\lim_{x\to\infty}(x^2-5)=\infty$

(5) $\lim_{x\to-\infty}(3x-x^3)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{3}{x^2}-1\right)=\infty$

(6) $\lim_{x\to-\infty}(2x^3+x^2-3x)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=-\infty$

28 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{2x^2+1}$　(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{x+2}$　(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+2}$

解答 (1) $\frac{5}{2}$　(2) ∞　(3) 0

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=\infty$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}=0$

29 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}3^x$　(2) $\lim_{x\to-\infty}3^x$　(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$　(5) $\lim_{x\to\infty}\log_4 x$　(6) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}}x$

(7) $\lim_{x\to+0}5^{\frac{1}{x}}$　(8) $\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$　(9) $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{9x^2+4}{x^2}$

解答 (1) ∞　(2) 0　(3) 0　(4) ∞　(5) ∞　(6) $-\infty$　(7) ∞
(8) ∞　(9) 2

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}3^x=\infty$

(2) $\lim_{x\to-\infty}3^x=0$

(3) $x\longrightarrow\infty$ のとき，$3x\longrightarrow\infty$ であるから　$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=0$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\infty$

(5) $\lim_{x\to\infty}\log_4 x=\infty$

(6) $\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{4}}x=-\infty$

(7) $\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow+0$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって　$\lim_{x\to+0}5^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}5^t=\infty$

(8) $\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow-0$ のとき　$t\longrightarrow-\infty$

よって　$\lim_{x\to-0}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^t=\lim_{t\to-\infty}5^{-t}=\infty$

(9) $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{9x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\log_3\left(9+\frac{4}{x^2}\right)=\log_3 9=2$

30 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}$　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$　(3) $\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

解答 (1) $-\infty$　(2) 1　(3) ∞

解説

(1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3-1}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=-\infty$

(2) $\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow+0$

よって　$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{3}\right)^t=1$

(3) $\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow+0$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

よって　$\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}=\lim_{t\to\infty}\log_2 t=\infty$

31 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(0.4)^x-(0.4)^{-x}}{(0.4)^x+(0.4)^{-x}}$

解答　(1)　2　　(2)　1

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^2-x+1}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}$

$=\log_2 4=2$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(0.4)^x-(0.4)^{-x}}{(0.4)^x+(0.4)^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-(0.4)^{-2x}}{1+(0.4)^{-2x}}=1$

32 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1})$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x}+x)$

解答　(1)　-1　　(2)　$\frac{3}{2}$

解説

(1) $\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1}$

$=(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1})\times\frac{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{(x^2-2x+2)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}$

よって　$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+1})$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$

(2) $x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

したがって

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+3t}-t)$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+3t}-t)(\sqrt{t^2+3t}+t)}{\sqrt{t^2+3t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+3t)-t^2}{\sqrt{t^2+3t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{t^2+3t}+t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1}=\frac{3}{2}$

注意　$x>0$ のとき

$\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=x\sqrt{1-\frac{3}{x}}$

$x<0$ のとき

$\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{(-x)^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}$

このことに注意すると，次のように解くことができる。

別解　$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x}+x)(\sqrt{x^2-3x}-x)}{\sqrt{x^2-3x}-x}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-3x)-x^2}{\sqrt{x^2-3x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-\sqrt{x^2-3x}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-(-x)\sqrt{1-\frac{3}{x}}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}=\frac{3}{2}$

33 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to-\infty}(4x^3-7x^2)$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7}{x+3}$　　(3) $\lim_{x\to-0}5^{\frac{1}{x}}$

解答　(1)　$-\infty$　　(2)　∞　　(3)　0

解説

(1) $\lim_{x\to-\infty}(4x^3-7x^2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(4-\frac{7}{x}\right)=-\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-7}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\infty$

(3) $\frac{1}{x}=t$ とおくと，$x\longrightarrow-0$ のとき　$t\longrightarrow-\infty$

よって　$\lim_{x\to-0}5^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to-\infty}5^t=0$