# rのn乗を含む極限クイズ

$\boxed{1}$ $r \fallingdotseq -1$ のとき，第 $n$ 項が $\dfrac{r^n}{1+r^n}$ で表される数列の極限を，次の各場合について求めよ。

(1) $r>1$　(2) $r=1$　(3) $|r|<1$　(4) $r<-1$

解答 (1) 1　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) 0　(4) 1

解説

(1) $r>1$ のときは $\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

(2) $r=1$ のときは $r^n=1$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $|r|<1$ のときは $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

(4) $r<-1$ のときは $\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$

よって，(1) の場合と同様に

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=1$$

$\boxed{2}$ $r>0$ のとき，第 $n$ 項が $\dfrac{2}{3+r^n}$ で表される数列の極限を求めよ。

解答 $0<r<1$ のとき $\dfrac{2}{3}$，$r=1$ のとき $\dfrac{1}{2}$，$r>1$ のとき 0

解説

$0<r<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+r^n}=\frac{2}{3+0}=\frac{2}{3}$$

$r=1$ のとき $r^n=1$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+r^n}=\frac{2}{3+1}=\frac{1}{2}$$

$r>1$ のとき $0<\dfrac{1}{r}<1$，$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{r}\right)^n}{3\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

$\boxed{3}$ $r \fallingdotseq -1$ のとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}$$

解答 $|r|<1$ のとき 1，$|r|>1$ のとき $-1$，$r=1$ のとき 0

解説

$|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$|r|>1$ のとき $\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$　ゆえに $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$r=1$ のとき $r^n=1$

よって $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

$\boxed{4}$ 数列 $\left\{\dfrac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1}\right\}$ の極限を求めよ。

解答 $|r|<1$ のとき $-1$，$|r|=1$ のとき 0，$|r|>1$ のとき 1

解説

$a_n=\dfrac{r^{2n}-1}{r^{2n}+1}$ とおく。

[1] $|r|<1$ のとき $0\leqq r^2<1$

よって $\lim_{n\to\infty}(r^2)^n=0$

ゆえに $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(r^2)^n-1}{(r^2)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

[2] $|r|=1$ のとき $r^2=1$

よって $\lim_{n\to\infty}(r^2)^n=1$

ゆえに $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(r^2)^n-1}{(r^2)^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

[3] $|r|>1$ のとき $0<\dfrac{1}{r^2}<1$

よって $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r^2}\right)^n=0$

ゆえに $$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{r^2}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$\boxed{5}$ $r$ の値によって場合分けすることにより，次の極限を求めよ。[25 点]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n-1}-r}{r^{2n}+1}$$

解答 [1] $|r|>1$ のとき　与式$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{r^{2n-2}}}{r+\frac{1}{r^{2n-1}}}=\dfrac{1}{r}$

[2] $r=1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}r^{2n-1}=1$，$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$ であるから　与式$=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

[3] $|r|<1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}r^{2n-1}=0$，$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから　与式$=\dfrac{0-r}{0+1}=-r$

[4] $r=-1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}r^{2n-1}=-1$，$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$ であるから　与式$=\dfrac{-1-(-1)}{1+1}=0$

以上により，求める極限は

$|r|>1$ のとき $\dfrac{1}{r}$，$r=\pm1$ のとき 0，$|r|<1$ のとき $-r$

解説

[1] $|r|>1$ のとき　与式$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{r^{2n-2}}}{r+\frac{1}{r^{2n-1}}}=\dfrac{1}{r}$

[2] $r=1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}r^{2n-1}=1$，$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$ であるから　与式$=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

[3] $|r|<1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}r^{2n-1}=0$，$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから　与式$=\dfrac{0-r}{0+1}=-r$

[4] $r=-1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}r^{2n-1}=-1$，$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=1$ であるから　与式$=\dfrac{-1-(-1)}{1+1}=0$

以上により，求める極限は

$|r|>1$ のとき $\dfrac{1}{r}$，$r=\pm1$ のとき 0，$|r|<1$ のとき $-r$

$\boxed{6}$ 数列 $\left\{\dfrac{2r^n}{1-r^n}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。[10点×2=20点]

(1) $|r|<1$　(2) $|r|>1$

解答 (1) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1-r^n}=\frac{0}{1-0}=0$$

(2) $|r|>1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1-r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}=\frac{2}{0-1}=-2$$

解説

(1) $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1-r^n}=\frac{0}{1-0}=0$$

(2) $|r|>1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{r}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1-r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}$$

$$=\frac{2}{0-1}=-2$$

$\boxed{7}$ 第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $-2\left(\frac{4}{3}\right)^n$　(2) $3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$　(3) $5^n-3^n$

(4) $\frac{4^{n+1}-1}{4^n+3}$　(5) $\frac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}$

解答　(1) $-\infty$　(2) $0$　(3) $\infty$　(4) $4$

(5) $-1<r<1$ のとき $0$；$r=1$ のとき $0$；$r=-1$ のとき振動する；$r<-1,\ 1<r$ のとき $1$

解説

(1) $\frac{4}{3}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}=-\infty$

(2) $\left|\frac{2}{5}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-1}{4^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{4^n}}{1+\frac{3}{4^n}}=\frac{4-0}{1+0}=4$

(5) [1] $-1<r<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}=\frac{0-0}{0+1}=0$

[2] $r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$

[3] $r=-1$ のとき

$$\frac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}=\frac{(-1)^{2n}-(-1)^n}{(-1)^{2n}+1}=\frac{1-(-1)^n}{1+1}=\frac{1-(-1)^n}{2}$$

ゆえに，数列は　1，0，1，0，……

よって　振動する。

[4] $r<-1,\ 1<r$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^{2n}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$\boxed{8}$ 第 $n$ 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $2\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$　(2) $5^n-(-4)^n$　(3) $\frac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^n}$　(4) $\frac{r^n}{2+r^{n+1}}$ $(r>-1)$

解答　(1) $0$　(2) $\infty$　(3) $3$

(4) $-1<r<1$ のとき $0$，$r=1$ のとき $\frac{1}{3}$，$r>1$ のとき $\frac{1}{r}$

解説

(1) $\left|-\frac{3}{4}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}2\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\{5^n-(-4)^n\}=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^n\right\}=\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3$

(4) $-1<r<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2+r^{n+1}}=\frac{0}{2+0}=0$

$r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2+r^{n+1}}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

$r>1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2+r^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}}{\frac{2}{r^{n+1}}+1}=\frac{\frac{1}{r}}{0+1}=\frac{1}{r}$

$\boxed{9}$ $r$ は定数とする。次の数列の極限を調べよ。

(1) $r>0$ のとき　$\left\{\frac{1}{2+r^n}\right\}$　(2) $r\neq\pm1$ のとき　$\left\{\frac{r^n+2}{r^n-1}\right\}$

(3) $r\neq0$ のとき　$\left\{\frac{1}{r^n}\right\}$

解答　(1) $0<r<1$ のとき $\frac{1}{2}$ に収束，$r=1$ のとき $\frac{1}{3}$ に収束，$r>1$ のとき $0$ に収束

(2) $r<-1,\ 1<r$ のとき $1$ に収束；$-1<r<1$ のとき $-2$ に収束

(3) $r<-1,\ 1<r$ のとき $0$ に収束；$r=1$ のとき $1$ に収束；$0<r<1$ のとき正の無限大に発散；$-1\leqq r<0$ のとき振動して，極限はない

解説

(1) [1] $0<r<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}r^n=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+r^n}=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$　　よって，$\frac{1}{2}$ に収束する。

[2] $r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}r^n=1$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+r^n}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$　　よって，$\frac{1}{3}$ に収束する。

[3] $r>1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+r^n}=0$　　よって，0 に収束する。

(2) [1] $|r|>1$ すなわち $r<-1,\ 1<r$ のとき

$\left|\frac{1}{r}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+2}{r^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n}=\frac{1+0}{1-0}=1$

よって，1 に収束する。

[2] $|r|<1$ すなわち $-1<r<1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}r^n=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+2}{r^n-1}=\frac{0+2}{0-1}=-2$　　よって，$-2$ に収束する。

(3) $\frac{1}{r^n}=\left(\frac{1}{r}\right)^n$

[1] $\left|\frac{1}{r}\right|<1$ すなわち $r<-1,\ 1<r$ のとき

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$

よって，0 に収束する。

[2] $\frac{1}{r}=1$ すなわち $r=1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=\frac{1}{1}=1$

よって，1 に収束する。

[3] $\frac{1}{r}>1$ すなわち $0<r<1$ のとき

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=\infty$

よって，正の無限大に発散する。

[4] $\frac{1}{r}\leqq-1$ すなわち $-1\leqq r<0$ のとき

数列 $\left\{\frac{1}{r^n}\right\}$ は振動して，極限はない。

$\boxed{10}$ $r$ は定数とする。数列 $\left\{\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$ の極限について調べよ。

解答　$|r|<1$ のとき $0$，$r=1$ のとき $\frac{2}{3}$，$r=-1$ のとき極限はない，$|r|>1$ のとき $1$

解説

[1] $|r|<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}r^n=0$，$\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{0+0}{0+2}=0$$

[2] $r=1$ のとき　$r^n=1$，$r^{2n}=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

[3] $r=-1$ のとき　$\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{1+(-1)^n}{1+2}=\frac{1+(-1)^n}{3}$

よって，極限はない。(振動する)

[4] $|r|>1$ のとき　$\left|\frac{1}{r}\right|<1$，$\left|\frac{1}{r^2}\right|<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{r^2}\right)^n}=\frac{1+0}{1+2\cdot0}=1$$

$\boxed{11}$ $r$ は定数とする。次の数列の極限について調べよ。

(1) $\left\{\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}\right\}$　(2) $r\geqq-1$ のとき　$\left\{\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}\right\}$

解答　(1) $|r|<1$ のとき $\frac{1-r}{1+r}$，$r=1$ のとき $-\frac{1}{3}$，$r=-1$ のとき $1$，$|r|>1$ のとき $-1$

(2) $|r|<1$ のとき $\frac{1}{1-r}$，$r=1$ のとき $1$，$r=-1$ のとき 極限はない，

$r>1$ のとき $1-r$

解説

(1) [1] $|r|<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=0$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\dfrac{1-r-0}{1+r+0}=\dfrac{1-r}{1+r}$

[2] $r=1$ のとき $r^{2n}=1$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\dfrac{1-1-1}{1+1+1}=-\dfrac{1}{3}$

[3] $r=-1$ のとき $r^{2n}=1$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\dfrac{1-(-1)-1}{1-1+1}=1$

[4] $|r|>1$ のとき $\left|\dfrac{1}{r^2}\right|<1$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-r)\left(\dfrac{1}{r^2}\right)^n-1}{(1+r)\left(\dfrac{1}{r^2}\right)^n+1}=-1$

(2) [1] $|r|<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+2}=0$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\dfrac{1+0-0}{1-r+0}=\dfrac{1}{1-r}$

[2] $r=1$ のとき $r^{n+1}=1$, $r^{n+2}=1$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\dfrac{1+1-1}{1-1+1}=1$

[3] $r=-1$ のとき $\dfrac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\dfrac{1+(-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}}{1-(-1)+(-1)^{n+1}}=\dfrac{1-2(-1)^n}{2-(-1)^n}$

$=\dfrac{3}{(-1)^n-2}+2$

よって，極限はない。(振動する)

[4] $r>1$ のとき $0<\dfrac{1}{r}<1$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^{n+1}+1-r}{(1-r)\left(\dfrac{1}{r}\right)^{n+1}+1}=1-r$

12 数列 $\left\{\dfrac{1}{1+r^{2n}}\right\}$ の極限を，次の各場合について求めよ。

(1) $|r|<1$ (2) $|r|=1$ (3) $|r|>1$

解答 (1) 1 (2) $\dfrac{1}{2}$ (3) 0

解説

(1) $|r|<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=0$ よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+r^{2n}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

(2) $|r|=1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=1$ よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+r^{2n}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(3) $|r|>1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=\infty$ よって $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+r^{2n}}=0$

13 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+1}$ を求めよ。

解答 $r\leqq-1$，$1<r$ のとき $r$；$|r|<1$ のとき $-1$；$r=1$ のとき 0

解説

[1] $|r|>1$ のとき (与式)$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r-\dfrac{1}{r^{2n}}}{1+\dfrac{1}{r^{2n}}}=r$

[2] $|r|<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n+1}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=0$ よって (与式)$=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

[3] $r=1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n+1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=1$ よって (与式)$=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

[4] $r=-1$ のとき $r^{2n}=1$, $r^{2n+1}=-1$ よって (与式)$=\dfrac{-1-1}{1+1}=-1\ (=r)$

以上から，求める極限は

$r\leqq-1$，$1<r$ のとき $r$； $|r|<1$ のとき $-1$； $r=1$ のとき 0

14 次の数列の極限を，$|r|<1$，$r=1$，$|r|>1$ の各場合について求めよ。

(1) $\left\{\dfrac{1+r-r^n}{2+r^n}\right\}$ (2) $\left\{\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}\right\}$

解答 (1) $|r|<1$ のとき $\dfrac{1+r}{2}$， $r=1$ のとき $\dfrac{1}{3}$， $|r|>1$ のとき $-1$

(2) $|r|<1$ のとき 0， $r=1$ のとき $\dfrac{2}{3}$， $|r|>1$ のとき 1

解説

(1) [1] $|r|<1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ であるから

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+r-r^n}{2+r^n}=\dfrac{1+r-0}{2+0}=\dfrac{1+r}{2}$

[2] $r=1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$ であるから

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+r-r^n}{2+r^n}=\dfrac{1+1-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$

[3] $|r|>1$ のとき

$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$ であるから

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+r-r^n}{2+r^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{r^n}+\dfrac{1}{r^{n-1}}-1}{\dfrac{2}{r^n}+1}$

$=\dfrac{0+0-1}{0+1}=-1$

(2) [1] $|r|<1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=0$ であるから

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\dfrac{0+0}{0+2}=0$

[2] $r=1$ のとき

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=1$ であるから

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\dfrac{1+1}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

[3] $|r|>1$ のとき

$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ より，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^{2n}}=0$ であるから

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{r^n}}{1+\dfrac{2}{r^{2n}}}=\dfrac{1+0}{1+0}=1$