無限級数クイズ

$\boxed{1}$ 次の無限級数は収束することを示し，その和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$

解答　証明略，和は 1

解説

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は 1 である

$\boxed{2}$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ の収束，発散について調べよ。

解答　発散

解説

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

ゆえに，この無限級数は発散する。

$\boxed{3}$ 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

解答　(1) 収束，和は $\frac{1}{2}$　　(2) 発散

解説

(1) $\displaystyle\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\frac{1}{2}$ である。

(2) $$\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$

ゆえに，この無限級数は発散する。

$\boxed{4}$ 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $2-3+\frac{9}{2}-\cdots\cdots$　　(2) $\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-4)+\cdots\cdots$

解答　(1) 発散　　(2) 収束，和は $\sqrt{2}+1$

解説

初項を a，公比を r とする。

(1) $a=2$，$r=-\frac{3}{2}$ であり，$|r|\geqq1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(2) $a=\sqrt{2}$，$r=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

公比 r について，$0<\sqrt{2}-1<1$ であるから　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{2}+1$$

$\boxed{5}$ 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $1+\sqrt{2}+2+\cdots\cdots$　　(2) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots\cdots$

(3) $(2+\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})+6-\cdots\cdots$　　(4) $(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-2)+\cdots\cdots$

解答　(1) 発散　　(2) 収束，和は $\frac{3}{5}$　　(3) 発散　　(4) 収束，和は $3+2\sqrt{2}$

解説

初項を a，公比を r とする。

(1) $a=1$，$r=\sqrt{2}$ であり，$|r|\geqq1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(2) $a=1$，$r=-\frac{2}{3}$ であり，$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和 S は　$S=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\dfrac{3}{5}$

(3) $a=2+\sqrt{3}$，$r=-\dfrac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=-3+\sqrt{3}$

公比 r について，$-3+\sqrt{3}\leqq-1$ であるから　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(4) $a=1+\sqrt{2}$，$r=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$

公比 r について，$0<2-\sqrt{2}<1$ であるから　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{1+\sqrt{2}}{1-(2-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$$

$\boxed{6}$ 数直線上で，点 P が原点 O から出発して，正の向きに 1 だけ進み，次に負の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進む。更に，正の向きに $\frac{1}{2^2}$ だけ進み，次に負の向きに $\frac{1}{2^3}$ だけ進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

解答　$\frac{2}{3}$

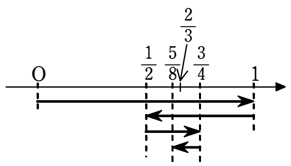
解説

点 P の座標は，順に次のようになる。

$$1,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3},\ \cdots\cdots$$

ゆえに，点 P が近づいていく点の座標を x とすると，

x は初項 1，公比 $-\frac{1}{2}$ の無限等比級数で表される。



$\left|-\frac{1}{2}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$x=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

よって，点 P が近づいていく点の座標 x は

$$x=\frac{2}{3}$$

$\boxed{7}$ 数直線上で，点 P が原点 O から出発して，正の向きに 1 だけ進み，次に負の向きに $\frac{1}{3}$ だけ進む。更に，正の向きに $\frac{1}{3^2}$ だけ進み，次に負の向きに $\frac{1}{3^3}$ だけ進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点 P が近づいていく点の座標を求めよ。

解答　$\frac{3}{4}$

解説

点Pの座標は，順に次のようになる。

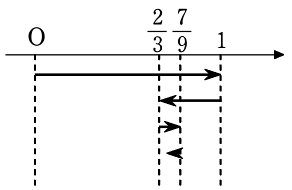
1

$1-\dfrac{1}{3}$

$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}$

$1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{3^3}$

……



ゆえに，点Pが近づいていく点の座標を x とすると，x は初項1，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数で表される。

$\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$x=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}$$

よって，点Pが近づいていく点の座標 x は　$x=\dfrac{3}{4}$

8 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)$ の和を求めよ。

解答　2

解説

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ は，初項 $\dfrac{3}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ は，初項 $\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，この2つの無限等比級数はともに収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=3-1=2$

9 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}+\frac{1}{2^n}\right)$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+1}{3^n}$

解答　(1) 2　(2) 1　(3) $\dfrac{9}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n}$ は，初項 $\dfrac{3}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ は，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\dfrac{1}{4}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから，この2つの無限等比級数はともに収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+1=2$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$ は，初項2，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ は，初項1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$ であるから，この2つの無限等比級数はともに収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=3-2=1$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ は，初項 $\dfrac{4}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数であり，

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ は，初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数である。

公比について，$\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，この2つの無限等比級数はともに収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}}=4,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}+1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

10 次の無限級数は発散することを示せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) 数列 $\{(-1)^{n-1}(2n-1)\}$ は振動し，0に収束しない。

よって，この無限級数は発散する。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\neq 0$

よって，この無限級数は発散する。

11 次の無限級数の収束，発散を調べよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n}$

解答　(1) 発散　(2) 発散

解説

第 n 項を a_n とする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は振動し，0に収束しない。

よって，この無限級数は発散する。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3}=\frac{2}{3}\neq 0$

よって，この無限級数は発散する。

12 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $(\sqrt{3}-1)+2(2-\sqrt{3})+2(3\sqrt{3}-5)+\cdots\cdots$

(2) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})-\sqrt{3}+(\sqrt{6}+\sqrt{3})-\cdots\cdots$

解答　(1) 収束，和は $\sqrt{3}+1$　(2) 発散

解説

初項を a，公比を r とする。

(1) $a=\sqrt{3}-1$

$$r=\frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}-1$$

公比 r について，$0<\sqrt{3}-1<1$ であるから　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{\sqrt{3}-1}{1-(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\sqrt{3}+1$$

(2) $a=\sqrt{6}-\sqrt{3}$

$$r=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=-(\sqrt{2}+1)$$

公比 r について，$-(\sqrt{2}+1)<-1$ であるから　$|r|\geqq 1$

よって，この無限等比級数は発散する。

13 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。[各25点]

(1) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}$

解答　(1) $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\dfrac{1}{3}$ である。

(2) $$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4}}{(n+2)-(n+4)}$$
$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4})$$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{2+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}$$
$$=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(2-\sqrt{6})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4})\}$$
$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+2-\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4})$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

ゆえに，この無限級数は発散する。

解説

(1)　$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\frac{1}{3}$ である。

(2)　$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4}}{(n+2)-(n+4)}$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4})$$

であるから，第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{2+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}$$
$$=-\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(2-\sqrt{6})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4})\}$$
$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+2-\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4})$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

ゆえに，この無限級数は発散する。

14 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1)　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$　　(2)　$\sqrt{2}-\sqrt{5}+\frac{5\sqrt{2}}{2}-\cdots\cdots$

(3)　$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\cdots\cdots$　　[各 10 点]

解答　初項を a，公比を r とする。

(1)　$a=1$，$r=-\frac{1}{2}$ であり，$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する。

よって，その和 S は　$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$

(2)　$a=\sqrt{2}$，$r=\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$|r|\geqq1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(3)　$a=\frac{1}{2}$，$r=-1$

$|r|\geqq1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

解説

初項を a，公比を r とする。

(1)　$a=1$，$r=-\frac{1}{2}$ であり，$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束する。

よって，その和 S は　$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$

(2)　$a=\sqrt{2}$，$r=\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$|r|\geqq1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(3)　$a=\frac{1}{2}$，$r=-1$

$|r|\geqq1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

15 次の無限級数の和を求めよ。[各 10 点]

(1)　$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)$　　(2)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{4^n}$

解答　(1)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ は，ともに公比の絶対値が 1 より小さい無限等比級数であるから収束する。よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1-1=0$$

(2)　$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ は，ともに公比の絶対値が 1 より小さい無限等比級数であるから収束する。よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}$$

解説

(1)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$ は，ともに公比の絶対値が 1 より小さい無限等比級数であるから収束する。よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1-1=0$$

(2)　$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ は，ともに公比の絶対値が 1 より小さい無限等比級数であるから収束する。よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}$$

16 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

(1)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2)　$\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots\cdots$

解答　(1)　収束，和 $\frac{1}{2}$　　(2)　発散

解説

第 n 項 a_n までの部分和を S_n とする。

(1)　$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ であるから

$$S_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\frac{1}{2}$ である。

(2)　$a_n=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\frac{2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{(n+2)-n}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ であるから

$$S_n=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2}$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

ゆえに，この無限級数は発散する。

17 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

(1)　$\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}+\cdots\cdots$

(2)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$　　(3)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$　　(4)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

解答　(1)　収束，和 2　　(2)　収束，和 $\frac{3}{4}$　　(3)　発散　　(4)　収束，和 1

解説

第 n 項 a_n までの部分和を S_n とする。

(1)　$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}=\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}$

$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

であるから

$$S_n=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=2$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は 2 である。

(2)　$a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$ であるから

$$S_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\frac{3}{4}$ である。

(3)　$a_n=\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(2n+1)-(2n-1)}=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

であるから

$$S_n=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3})+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$　　よって　$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$

ゆえに，この無限級数は発散する。

(4)　$a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ であるから　$S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

よって　$\lim_{n\to\infty} S_n=1$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は1である。

18 次の無限級数は発散することを示せ。

(1)　$\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{7}{4}+\frac{10}{5}+\cdots\cdots$　　(2)　$\cos\pi+\cos2\pi+\cos3\pi+\cdots\cdots$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　第 n 項 a_n は　$a_n=\frac{3n-2}{n+1}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=3\neq0$

よって，この無限級数は発散する。

(2)　第 n 項 a_n は　$a_n=\cos n\pi$

k を自然数とすると

$n=2k-1$ のとき　$\cos n\pi=\cos(2k-1)\pi=\cos(-\pi)=-1$

$n=2k$ のとき　$\cos n\pi=\cos2k\pi=1$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は振動する。

よって，数列 $\{a_n\}$ は0に収束しないから，この無限級数は発散する。

19 次の無限級数は発散することを示せ。

(1)　$1-3+5-7+9-\cdots\cdots$　　(2)　$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots\cdots$

(3)　$\sin^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\pi+\sin^2\frac{3}{2}\pi+\sin^2 2\pi+\cdots\cdots$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　第 n 項 a_n は　$a_n=(2n-1)\cdot(-1)^{n-1}$

n が奇数のとき $a_n\geqq1$，n が偶数のとき $a_n\leqq-3$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は振動して0に収束しないから，この無限級数は発散する。

(2)　第 n 項 a_n は　$a_n=\frac{n}{n+1}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\neq0$

よって，数列 $\{a_n\}$ は0に収束しないから，この無限級数は発散する。

(3)　第 n 項 a_n は　$a_n=\sin^2\frac{n\pi}{2}$

k を自然数とすると，$n=2k-1$ のとき

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos k\pi=\begin{cases}1 & (k\text{ が奇数})\\ -1 & (k\text{ が偶数})\end{cases}$$

よって　$\sin^2\frac{n\pi}{2}=(\pm1)^2=1$

$n=2k$ のとき　$\sin^2\frac{n\pi}{2}=\sin^2 k\pi=0$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は振動して0に収束しないから，この無限級数は発散する。

20 (1)　次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

(ア)　$\frac{4}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots$　　(イ)　$12+6\sqrt{2}+6+\cdots\cdots$

(2)　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$ の和を求めよ。

解答　(1)　(ア)　発散　　(イ)　収束，和 $12(2+\sqrt{2})$　　(2)　$\frac{3}{10}$

解説

(1)　(ア)　初項は $\frac{4}{27}$，公比は $r=\frac{1}{3}\div\left(-\frac{2}{9}\right)=-\frac{3}{2}$ で，$|r|>1$ であるから，発散する。

(イ)　初項は12，公比は $r=\frac{6\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ で，$|r|<1$ であるから，収束する。

和は　$\frac{12}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{24}{2-\sqrt{2}}=\frac{24(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=12(2+\sqrt{2})$

(2)　k を自然数とすると

$n=2k-1$ のとき　$\sin\frac{n\pi}{2}=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos k\pi=(-1)^{k+1}$

$n=2k$ のとき　$\sin\frac{n\pi}{2}=\sin k\pi=0$

よって，数列 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ は　$\frac{1}{3}$，0，$-\frac{1}{3^3}$，0，$\frac{1}{3^5}$，0，$-\frac{1}{3^7}$，……　となる。

ゆえに，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$ は初項 $\frac{1}{3}$，公比 $-\frac{1}{3^2}$ の無限等比級数であり，公比 r は $|r|<1$ であるから収束する。その和は　$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3^2}\right)}=\frac{3}{10}$

21 (1)　次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束すればその和を求めよ。

(ア)　$1+0.9+0.81+\cdots\cdots$　　(イ)　$2+2\sqrt{2}+4+\cdots\cdots$

(ウ)　$(2-\sqrt{2})+(3\sqrt{2}-4)+(10-7\sqrt{2})+\cdots\cdots$

(2)　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}$ の和を求めよ。

解答　(1)　(ア)　収束，和10　　(イ)　発散　　(ウ)　収束，和1　　(2)　$-\frac{1}{5}$

解説

(1)　(ア)　初項は1，公比は $r=0.9$ で $|r|<1$ であるから和は収束する。

その和は　$\frac{1}{1-0.9}=10$

(イ)　初項は2，公比は $r=\sqrt{2}$ で $|r|>1$ であるから和は発散する。

(ウ)　初項は $2-\sqrt{2}$，公比は

$r=\frac{3\sqrt{2}-4}{2-\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{2}-4)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}$

ゆえに $|r|<1$ であるから和は収束する。

その和は　$\frac{2-\sqrt{2}}{1-(-1+\sqrt{2})}=\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=1$

(2)　k を自然数とすると

$n=2k-1$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{2}=\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin k\pi=0$

$n=2k$ のとき　$\cos\frac{n\pi}{2}=\cos k\pi=(-1)^k$

よって，$\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}$ で $n=1$，2，…… とおいたものを順に並べると

0，$-\frac{1}{2^2}$，0，$\frac{1}{2^4}$，0，……

ゆえに，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}$ は初項 $-\frac{1}{2^2}$，公比 $-\frac{1}{2^2}$ の無限等比級数であり，公比 r は $|r|<1$ であるから収束する。

その和は　$\frac{-\frac{1}{2^2}}{1-\left(-\frac{1}{2^2}\right)}=\frac{-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{5}$

22 次の無限級数の収束・発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{2}{3^2}-\frac{1}{2^3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)+\cdots\cdots\cdots$$

解答　収束，和 $\frac{8}{3}$

解説

初項から第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\left(2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}\right)-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right\}$$

$$=\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

よって　$\lim_{n\to\infty} S_n=3\cdot1-\frac{1}{3}\cdot1=\frac{8}{3}$

ゆえに，この無限級数は収束して，その和は $\frac{8}{3}$

別解　$(\text{与式})=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ はともに，公比の絶対値が1より小さいから，収束する。

ゆえに，与えられた無限級数は収束して，その和は

$$(\text{与式})=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{3}$$

23 次の無限級数の収束・発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$　　(2) $(1-2)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{2}{3^2}\right)+\cdots\cdots$

解答　(1) 収束，和 $\dfrac{26}{5}$　　(2) 収束，和 $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ は初項 2，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ は初項 3，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数

であり，$\left|-\dfrac{2}{3}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{4}\right|<1$ であるから，ともに収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{1+\frac{2}{3}}=\frac{6}{5},\quad \sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

よって，与えられた無限級数は収束し，その和は

$$(\text{与式})=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{6}{5}+4=\frac{26}{5}$$

(2) $(\text{与式})=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ は初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ は初項 2，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数

であり，$\left|\dfrac{1}{2}\right|<1$，$\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから，ともに収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

よって，与えられた無限級数は収束し，その和は

$$(\text{与式})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

24 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)+\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n+1}{n+2}\right)+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots\cdots$

(3) $\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}+\cdots\cdots$

(4) $\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{2+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}+\cdots\cdots$

解答　(1) 収束，$-\dfrac{1}{2}$　　(2) 収束，$\dfrac{1}{3}$　　(3) 収束，$\dfrac{5}{12}$　　(4) 発散

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1) $S_n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{n+1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{n+1}{n+2}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

ゆえに，この無限級数は収束し，その和は　$-\dfrac{1}{2}$

(2) $S_n=\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$

ゆえに，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{3}$

(3) $S_n=\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$

ゆえに，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{5}{12}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}=\dfrac{\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}}{(\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1})(\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1})}$

$$=\frac{\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}}{(3n-2)-(3n+1)}=\frac{1}{3}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2})$$

ゆえに　$S_n=\dfrac{1}{3}\{(2-1)+(\sqrt{7}-2)+\cdots\cdots+(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2})\}$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{3n+1}-1)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(\sqrt{3n+1}-1)=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

25 次の無限等比級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

解答　(1) $\dfrac{4}{5}$　　(2) $10(2+\sqrt{3})$　　(3) $\dfrac{9+3\sqrt{3}}{2}$

解説

公比を r とする。

(1) 初項は 1，公比は $r=-\dfrac{1}{4}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は　$S=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{4}{5}$

(2) 初項は 5，公比は $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{5}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{10}{2-\sqrt{3}}=\frac{10(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=10(2+\sqrt{3})$$

(3) 初項は 3，公比は $r=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{3}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$

26 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $1+2+4+8+\cdots\cdots$　　(2) $1-\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{16}-\dfrac{27}{64}+\cdots\cdots$

(3) $0.2+0.18+0.162+\cdots\cdots$　　(4) $\sqrt{3}-3+3\sqrt{3}-\cdots\cdots$

(5) $4+2\sqrt{3}+3+\cdots\cdots$　　(6) $-2+2-2+2+\cdots\cdots$

解答　(1) 発散　(2) 収束，$\dfrac{4}{7}$　(3) 収束，2　(4) 発散　(5) 収束，$8(2+\sqrt{3})$

(6) 発散

解説

公比を r とする。

(1) 初項は 1，公比は $r=2$ で　$|r|>1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(2) 初項は 1，公比は $r=-\dfrac{3}{4}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は　$S=\dfrac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\dfrac{4}{7}$

(3) 初項は 0.2，公比は $r=\dfrac{0.18}{0.2}=0.9$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は　$S=\dfrac{0.2}{1-0.9}=2$

(4) 初項は $\sqrt{3}$，公比は $r=\dfrac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ で　$|r|>1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(5) 初項は 4，公比は $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{4}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{8}{2-\sqrt{3}}=\frac{8(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=8(2+\sqrt{3})$$

(6) 初項は -2，公比は $r=-1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

27 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $(3+\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-1)+(5-3\sqrt{2})+\cdots\cdots$

(2) $(1+\sqrt{3})-(5+\sqrt{3})+(1+9\sqrt{3})-\cdots\cdots$

解答　(1) 収束，$\dfrac{8+5\sqrt{2}}{2}$　　(2) 発散

解説

無限等比級数の公比を r とする。

(1)　$r=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\sqrt{2}-1$

$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{3+\sqrt{2}}{1-(\sqrt{2}-1)}=\frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(3+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{8+5\sqrt{2}}{2}$$

(2) $r=\dfrac{-(5+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{-(5+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=1-2\sqrt{3}$

$|r|>1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

$\boxed{28}$ 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^n}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3}{5^n}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}$

解答 (1) $\dfrac{5}{4}$　(2) $-\dfrac{1}{12}$　(3) $\dfrac{9}{4}$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ はともに公比の絶対値が 1 より小さい無限等比級数であるから収束する。

よって，求める和 S は　$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n-3\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{5}\right)^n$ は，ともに公比の絶対値が 1 より小さい無限等比級数であるから収束する。

よって，求める和 S は　$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}-\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}}$

$$=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ は，ともに公比の絶対値が 1 より小さい無限等比級数であるから収束する。

よって，求める和 S は　$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

$\boxed{29}$ 次の無限級数は発散することを示せ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot 2n$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$

解答 (1) 略　(2) 略

解説

無限級数の第 n 項を a_n とする。

(1) $a_n=(-1)^{n-1}\cdot 2n$

$n\to\infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ は発散 (振動) し，0 に収束しない。

よって，この無限級数は発散する。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=1$

よって，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，この無限級数は発散する。

$\boxed{30}$ 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束する場合は，その和を求めよ。

(1) $2+\dfrac{2}{1+2}+\dfrac{2}{1+2+3}+\cdots\cdots+\dfrac{2}{1+2+3+\cdots\cdots+n}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3+5}+\dfrac{1}{3+5+7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{3+5+7+\cdots\cdots+(2n+1)}+\cdots\cdots$

解答 (1) 収束，4　(2) 収束，$\dfrac{3}{4}$

解説

無限級数の第 n 項を a_n，第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1) $a_n=\dfrac{2}{1+2+3+\cdots\cdots+n}=\dfrac{2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{4}{n(n+1)}$

したがって　$S_n=\dfrac{4}{1\cdot2}+\dfrac{4}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\dfrac{4}{n(n+1)}$

$$=4\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=4$

ゆえに，この無限級数は収束し，その和は　4

(2) $a_n=\dfrac{1}{3+5+7+\cdots\cdots+(2n+1)}=\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)}=\dfrac{1}{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n}$

$$=\frac{1}{n(n+1)+n}=\frac{1}{n(n+2)}$$

したがって

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

ゆえに，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{3}{4}$

$\boxed{31}$ $a_1=\dfrac{1}{35}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+8n+20$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) a_n を n の式で表せ。　　(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ。

解答 (1) $a_n=\dfrac{1}{4n^2+16n+15}$　(2) $\dfrac{1}{10}$

解説

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　$b_1=35$，$b_{n+1}=b_n+8n+20$

$b_{n+1}-b_n=8n+20$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=35+\sum_{k=1}^{n-1}(8k+20)=35+8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+20(n-1)$$

$$=35+4n(n-1)+20(n-1)$$

ゆえに　$b_n=4n^2+16n+15$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

よって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{4n^2+16n+15}$

(2) 第 n 項までの部分和を S_n とする。

$a_n=\dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+3}-\dfrac{1}{2n+5}\right)$ であるから

$$S_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+5}\right)$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{10}$

ゆえに，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{10}$

$\boxed{32}$ 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos n\pi$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$

解答 (1) $-\dfrac{1}{4}$　(2) $-\dfrac{3}{10}$

解説

(1) $\cos n\pi=(-1)^n$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos n\pi=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{4}$$

(2) k は自然数とする。

$n=2k$ のとき　$\sin\dfrac{n\pi}{2}=\sin k\pi=0$

$n=2k-1$ のとき　$\sin\dfrac{n\pi}{2}=\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2}=(-1)^{k-1}$

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^7}-\cdots\cdots=\sum_{l=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{l-1}$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=-\frac{3}{10}$$

$\boxed{33}$ $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ である。このことを利用して，次の無限級数の和を求めよ。ただし，$|x|<1$ とする。

(1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{3^n}+\cdots\cdots$　　(2) $1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots$

解答　(1)　$\dfrac{3}{4}$　　(2)　$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)　$S_n=1\cdot\dfrac{1}{3}+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$\dfrac{1}{3}S_n=1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

辺々引くと　$S_n-\dfrac{1}{3}S_n=\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

よって　$\dfrac{2}{3}S_n=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}-n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

ゆえに　$S_n=\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}-\dfrac{1}{2}n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$

したがって，求める和は　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3}{4}$

(2)　$S_n=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}$

$xS_n=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots+nx^n$

辺々引くと　$S_n-xS_n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$

よって，$|x|<1$ より $x\neq1$ であるから　$(1-x)S_n=\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n$

ゆえに　$S_n=\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x}$

$|x|<1$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}nx^n=0$

したがって，求める和は　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

34 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{2\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot8}+\dfrac{1}{8\cdot11}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\cdots\cdots$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}}+\cdots\cdots$

解答　(1)　収束，和 $\dfrac{1}{6}$　　(2)　発散

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)　$\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$ であるから

$S_n=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-0\right)=\dfrac{1}{6}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{6}$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}}=\dfrac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}}{(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n})(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})}$

$=\dfrac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n}}{(2n+2)-2n}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})$

であるから

$S_n=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+\cdots\cdots+(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})\}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2})$

ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，この無限級数は発散する。

35 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{9\cdot13}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}+\cdots\cdots$

解答　収束，和 $\dfrac{1}{4}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

$\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)$

であるから

$S_n=\dfrac{1}{4}\left\{\left(1-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{4n-3}-\dfrac{1}{4n+1}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{4n+1}\right)$

ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{4}$

36 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$3-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2^2}-\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots$　　(2)　$5+(-5)+5+(-5)+\cdots\cdots$

(3)　$1+\sqrt{3}+3+\cdots\cdots$　　(4)　$0.1+0.02+0.004+\cdots\cdots$

(5)　$2-\sqrt{2}+1-\cdots\cdots$　　(6)　$(\sqrt{2}-1)+1+(\sqrt{2}+1)+\cdots\cdots$

解答　(1)　収束，和 2　　(2)　発散　　(3)　発散　　(4)　収束，和 0.125
　(5)　収束，和 $4-2\sqrt{2}$　　(6)　発散

解説

公比を r とする。

(1)　初項は 3，公比は $r=-\dfrac{1}{2}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$S=\dfrac{3}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=2$

(2)　初項は 5，公比は $r=-1$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(3)　初項は 1，公比は $r=\sqrt{3}$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(4)　初項は 0.1，公比は $r=0.2$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$S=\dfrac{0.1}{1-0.2}=0.125$

(5)　初項は 2，公比は $r=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$S=\dfrac{2}{1-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=4-2\sqrt{2}$

(6)　初項は $\sqrt{2}-1$，公比は $r=\sqrt{2}+1$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

37 次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$2\sqrt{3}+(6-2\sqrt{3})+(-12+8\sqrt{3})+\cdots\cdots$

(2)　$\sqrt{2}+(2-3\sqrt{2})+(11\sqrt{2}-12)+\cdots\cdots$

解答　(1)　収束，和 $6+4\sqrt{3}$　　(2)　発散

解説

公比を r とする。

(1)　初項は $2\sqrt{3}$，公比は $r=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$S=\dfrac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=6+4\sqrt{3}$

(2)　初項は $\sqrt{2}$，公比は $r=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-3$ で　$|r|\geqq1$

よって，この無限等比級数は発散する。

38 無限等比級数 $1+a+a^2+a^3+\cdots\cdots$ が収束し，その和が $2-\dfrac{3}{2}a$ であるとき，定数 a の値を求めよ。

解答　$a=\dfrac{1}{3}$

解説

与えられた無限等比級数の初項は 1，公比は a であり，収束するから

$-1<a<1$

また，その和が $2-\dfrac{3}{2}a$ であるから

$\dfrac{1}{1-a}=2-\dfrac{3}{2}a$

ゆえに　$1=\left(2-\dfrac{3}{2}a\right)(1-a)$

整理して　$3a^2-7a+2=0$

よって　$(a-2)(3a-1)=0$

ゆえに　$a=\dfrac{1}{3}$，2

$-1<a<1$ であるから　$a=\dfrac{1}{3}$

39 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{5^{n-1}}\right)$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{4^{n-1}}\right)$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}$

解答　(1) $\dfrac{9}{4}$　(2) -3　(3) $-\dfrac{2}{3}$

解説

(1) 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{5}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$$

(2) 無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=1-4=-3$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-5\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{4}\right)^n$ の公比は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$$

40 $|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ が成り立つ。このことを用いて，無限級数

$1-\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{8}+\dfrac{5}{16}-\cdots\cdots$ の和を求めよ。

解答　$\dfrac{4}{9}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots\qquad+n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$-\frac{1}{2}S_n=\qquad-\frac{1}{2}+2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

辺々を引くと

$$S_n-\left(-\frac{1}{2}S_n\right)=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって

$$\frac{3}{2}S_n=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}-n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}-n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ゆえに　$S_n=\dfrac{4}{9}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}-\dfrac{2}{3}n\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\left|-\dfrac{1}{2}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4}{9}$

したがって，求める和は　$\dfrac{4}{9}$

41 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{16}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\cdots\cdots$

解答　(1) 発散　(2) 発散

解説

(1) 第 n 項を a_n とすると

$$a_n=\frac{2n-1}{4n}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{4}=\frac{1}{2}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しないから，この無限級数は発散する。

(2) 第 n 項を a_n とすると

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}$$

$$=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{(n+2)-n}=\frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\}$$

$$=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，この無限級数は発散する。

42 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{6}+\dfrac{7}{11}+\dfrac{11}{18}+\cdots\cdots$　　(2) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots$

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1+2}{9}+\dfrac{1+2+4}{27}+\dfrac{1+2+4+8}{81}+\cdots\cdots$

解答　(1) 発散　(2) 収束，和 $\dfrac{1}{4}$　(3) 収束，和 $\dfrac{3}{2}$

解説

(1) 第 n 項の分子を a_n，分母を b_n とする。

数列 $\{a_n\}$ の階差数列は

1，2，3，4，……

この第 n 項は　n

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{n^2-n+2}{2}$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列は

1，3，5，7，……

この第 n 項は　$2n-1$

よって，$n\geqq2$ のとき　$\displaystyle b_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

奇数の和の公式より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=(n-1)^2$ であるから

$$b_n=n^2-2n+3$$

したがって，$n\geqq2$ のとき，この無限級数の第 n 項 c_n は

$$c_n=\frac{n^2-n+2}{2(n^2-2n+3)}$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

(2) 第 n 項は　$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$

よって，この無限級数は収束し，その和は　$\dfrac{1}{4}$

(3) 第 n 項を a_n とすると

$$a_n=\frac{1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}}{3^n}$$

$$=\frac{\frac{2^n-1}{2-1}}{3^n}=\frac{2^n-1}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ の公比は，それぞれ $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{3}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，この無限級数は収束し，その和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$\boxed{43}$ $|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ が成り立つ。このことを用いて，無限級数

$1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\cdots$ の和を求めよ。

解答　$\frac{9}{4}$

解説

第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+\quad n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{3}S_n=\quad\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

辺々を引くと

$$S_n-\frac{1}{3}S_n=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって　$\frac{2}{3}S_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

ゆえに，$S_n=\frac{9}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{3}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ であるから　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{9}{4}$

$\boxed{44}$ 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+3)}+\cdots\cdots$

(2) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}+\cdots$

解答　(1)　収束，$\frac{11}{18}$　　(2)　発散

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)
$$S_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{3\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+3)}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{18}$$

したがって，この無限級数は収束して，その和は $\frac{11}{18}$ である。

(2)
$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})}$$
$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{n-(n+2)}=-\frac{1}{2}(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})$$

であるから

$$S_n=-\frac{1}{2}\{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-2)+\cdots\cdots+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})\}$$
$$=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

$\boxed{45}$ 無限等比級数 $(3+\sqrt{2})-(2\sqrt{2}-1)+\cdots\cdots$ の公比を求めよ。また，この無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

解答　公比 $1-\sqrt{2}$；収束，和は $\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$

解説

公比 r について

$$r=\frac{-(2\sqrt{2}-1)}{3+\sqrt{2}}=\frac{-(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{-(-7+7\sqrt{2})}{9-2}=1-\sqrt{2}$$

$|r|<1$ より，この無限等比級数は収束して，その和は

$$\frac{3+\sqrt{2}}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$$