2次方程式の解の配置クイズ

1 2次方程式 $x^2-2ax+4a+1=0$ が，次の条件を満たすように定数 a の値の範囲を定めよ。

(1) 1つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 0 と 1 の間にある。

(2) $-1<x<1$ の範囲に異なる2つの実数解をもつ。

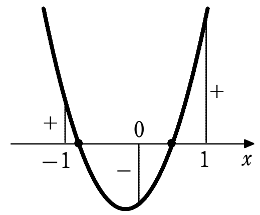
解答 (1) $-\dfrac{1}{3}<a<-\dfrac{1}{4}$ (2) $-\dfrac{1}{3}<a<2-\sqrt{5}$

解説

$f(x)=x^2-2ax+4a+1$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

(1) 2次方程式 $f(x)=0$ の1つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 0 と 1 の間にあるのは，次の[1]～[3]が同時に成り立つときである。



[1] $f(-1)>0$ すなわち $6a+2>0$

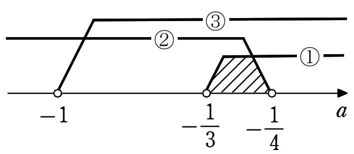
よって $a>-\dfrac{1}{3}$ …… ①

[2] $f(0)<0$ すなわち $4a+1<0$

よって $a<-\dfrac{1}{4}$ …… ②

[3] $f(1)>0$ すなわち $2a+2>0$

よって $a>-1$ …… ③



①，②，③の共通範囲を求めて

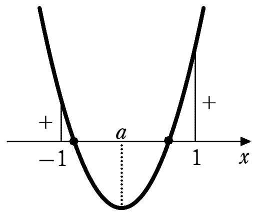
$$-\frac{1}{3}<a<-\frac{1}{4}$$

(2) 2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-2a)^2-4\cdot1\cdot(4a+1)=4(a^2-4a-1)$$

$y=f(x)$ のグラフの軸は 直線 $x=a$

2次方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<1$ の範囲に異なる2つの実数解をもつのは，次の[1]～[4]が同時に成り立つときである。



[1] $D>0$ すなわち $a^2-4a-1>0$

$a^2-4a-1=0$ を解くと

$$a=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}}{1}=2\pm\sqrt{5}$$

よって，$a^2-4a-1>0$ の解は $a<2-\sqrt{5}$，$2+\sqrt{5}<a$ …… ①

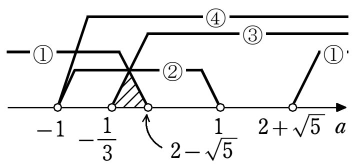
[2] 軸について $-1<a<1$ …… ②

[3] $f(-1)>0$ すなわち $6a+2>0$

よって $a>-\dfrac{1}{3}$ …… ③

[4] $f(1)>0$ すなわち $2a+2>0$

よって $a>-1$ …… ④



①，②，③，④の共通範囲を求めて

$$-\frac{1}{3}<a<2-\sqrt{5}$$

2 2次方程式 $x^2-ax+1=0$ の1つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

解答 $\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{10}{3}$

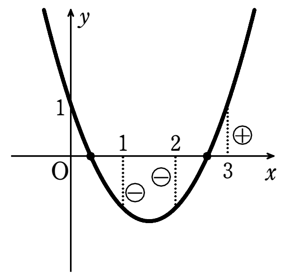
解説

$f(x)=x^2-ax+1$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$f(0)=1>0$ である。

よって，2次方程式 $f(x)=0$ の1つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるのは

$f(1)<0$ かつ $f(2)<0$ かつ $f(3)>0$ のときである。



$f(1)<0$ から $2-a<0$

よって $a>2$ …… ①

$f(2)<0$ から $5-2a<0$

よって $a>\dfrac{5}{2}$ …… ②

$f(3)>0$ から $10-3a>0$

よって $a<\dfrac{10}{3}$ …… ③

①，②，③の共通範囲を求めて $\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{10}{3}$

3 2次関数 $y=x^2-mx+m^2-3m$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) x 軸の正の部分と異なる2点で交わる。

(2) x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

解答 (1) $3<m<4$ (2) $0<m<3$

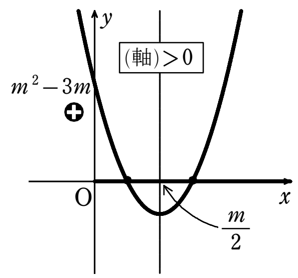
解説

$f(x)=x^2-mx+m^2-3m$ とし，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とする。$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=\dfrac{m}{2}$ である。

(1) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる2点で交わるための条件は，次の[1]，[2]，[3]が同時に成り立つことである。

[1] $D>0$ [2] 軸が $x>0$ の範囲にある

[3] $f(0)>0$



[1] $D=(-m)^2-4(m^2-3m)=-3m(m-4)$

$D>0$ から $m(m-4)<0$

よって $0<m<4$ …… ①

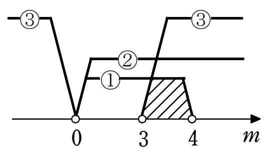
[2] 軸 $x=\dfrac{m}{2}$ について $\dfrac{m}{2}>0$

よって $m>0$ …… ②

[3] $f(0)>0$ から $m^2-3m>0$

ゆえに $m(m-3)>0$

よって $m<0$，$3<m$ …… ③

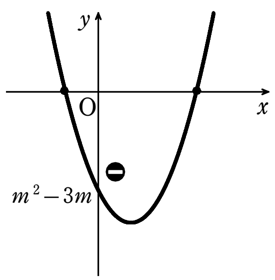


①，②，③の共通範囲を求めて $3<m<4$

(2) $y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わるための条件は $f(0)<0$

ゆえに $m^2-3m<0$ よって $m(m-3)<0$

したがって $0<m<3$



4 2次関数 $y=-x^2+(m-10)x-m-14$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

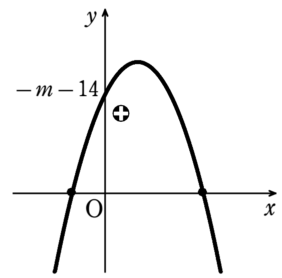
(2) x 軸の負の部分とのみ共有点をもつ。

解答 (1) $m<-14$ (2) $-14<m\leqq2$

解説

$f(x)=-x^2+(m-10)x-m-14$ とし，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とする。

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，その軸は直線 $x=\dfrac{m-10}{2}$ である。



(1) $y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わるための条件は $f(0)>0$

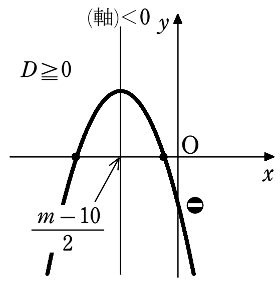
$f(0)=-m-14$ から $-m-14>0$

よって $m<-14$

(2) $y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分とのみ共有点をもつための条件は，次の[1]，[2]，[3]が同時に成り立つことである。

[1] $D\geqq0$ [2] 軸が $x<0$ の範囲にある

[3] $f(0)<0$



(x 軸に接する場合も含める)

[1] $D=(m-10)^2-4\cdot(-1)\cdot(-m-14)$

$=m^2-24m+44=(m-2)(m-22)$

$D\geqq0$ から $(m-2)(m-22)\geqq0$

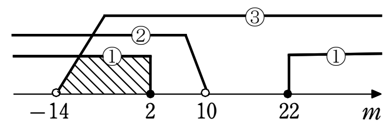
よって $m\leqq2$，$22\leqq m$ …… ①

[2] 軸 $x=\dfrac{m-10}{2}$ について $\dfrac{m-10}{2}<0$

よって $m<10$ …… ②

[3] $f(0)<0$ から $-m-14<0$

よって $m>-14$ …… ③



①，②，③の共通範囲を求めて

$-14<m\leqq2$

5 2次方程式 $x^2-(a-1)x+a+2=0$ が次のような解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる2つの正の解 (2) 正の解と負の解

解答 (1) $a>7$ (2) $a<-2$

解説

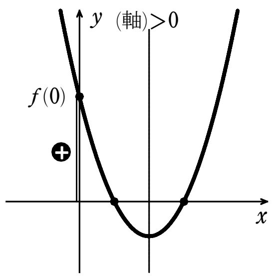
$f(x)=x^2-(a-1)x+a+2$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=\dfrac{a-1}{2}$ である。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と，異なる 2 点で交わることである。

よって，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，次のことが同時に成り立つ。

[1]　$D>0$　　[2]　軸が $x>0$ の範囲にある

[3]　$f(0)>0$



[1]　$D=\{-(a-1)\}^2-4\cdot1\cdot(a+2)=a^2-6a-7$
$=(a+1)(a-7)$

$D>0$ から　　$(a+1)(a-7)>0$

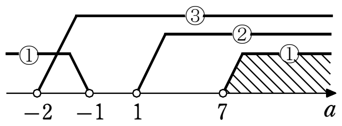
よって　　　$a<-1,\ 7<a$　…… ①

[2]　$\dfrac{a-1}{2}>0$ から　　$a>1$　　…… ②

[3]　$f(0)=a+2$

$f(0)>0$ から　　　$a+2>0$

よって　　　$a>-2$　　…… ③

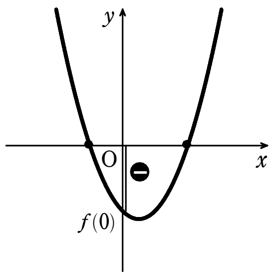


①，②，③ の共通範囲を求めて　　$a>7$

(2)　方程式 $f(x)=0$ が正の解と負の解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わることであるから　　$f(0)<0$

よって　　　　　$a+2<0$

したがって　　　$a<-2$



6　実数を係数とする 2 次方程式 $x^2-2ax+a+6=0$ が，次の条件を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　正の解と負の解をもつ。　　　　(2)　異なる 2 つの負の解をもつ。

解答　(1)　$a<-6$　　(2)　$-6<a<-2$

解説

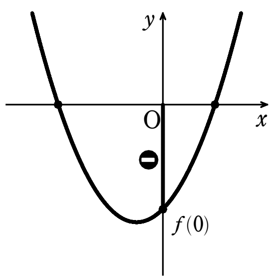
$f(x)=x^2-2ax+a+6$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=a$ である。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が正の解と負の解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わることであるから

$f(0)<0$

よって　　　$a+6<0$

したがって　$a<-6$

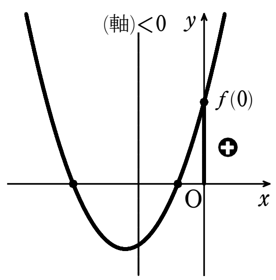


(2)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの負の解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と，異なる 2 点で交わることである。

よって，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，次のことが同時に成り立つ。

[1]　$D>0$　　[2]　軸が $x<0$ の範囲にある

[3]　$f(0)>0$



[1]　$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(a+6)=a^2-a-6$
$=(a+2)(a-3)$

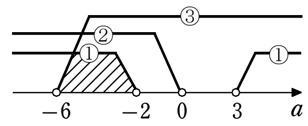
$D>0$ から　　$(a+2)(a-3)>0$

よって　　　$a<-2,\ 3<a$　…… ①

[2]　　$a<0$　　…… ②

[3]　$f(0)=a+6$　　$f(0)>0$ から　　$a+6>0$

よって　　　$a>-6$　　　…… ③



①，②，③ の共通範囲を求めて

$-6<a<-2$

7　a を 0 でない実数の定数とする。x の方程式 $ax^2+2(a-2)x+2a-7=0$ が異なる 2 つの負の実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

解答　$-1<a<0,\ \dfrac{7}{2}<a<4$

解説

$f(x)=ax^2+2(a-2)x+2a-7$ とすると，$y=f(x)$ のグラフの軸は直線 $x=-\dfrac{a-2}{a}$ である。

求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と，異なる 2 点で交わることである。

また，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-a\cdot(2a-7)=-a^2+3a+4=-(a^2-3a-4)=-(a+1)(a-4)$$

[1]　$a>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，次のことが同時に成り立つ。

(i)　$D>0$　　(ii)　軸が $x<0$ の範囲にある　　(iii)　$f(0)>0$

(i)　$D>0$ から　　$-(a+1)(a-4)>0$

よって　　$-1<a<4$　…… ①

(ii)　$-\dfrac{a-2}{a}<0$，$a>0$ から　　$a>2$　…… ②

(iii)　$f(0)>0$ から　　$2a-7>0$

よって　　$a>\dfrac{7}{2}$　…… ③

① ～ ③ と $a>0$ との共通範囲は　　$\dfrac{7}{2}<a<4$

[2]　$a<0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，次のことが同時に成り立つ。

(i)　$D>0$　　(ii)　軸が $x<0$ の範囲にある　　(iii)　$f(0)<0$

(i)　$D>0$ から　　$-(a+1)(a-4)>0$

よって　　$-1<a<4$　…… ④

(ii)　$-\dfrac{a-2}{a}<0$，$a<0$ から　　$a<2$　…… ⑤

(iii)　$f(0)<0$ から　　$2a-7<0$

よって　　$a<\dfrac{7}{2}$　…… ⑥

④ ～ ⑥ と $a<0$ との共通範囲は　　$-1<a<0$

したがって，条件を満たす a の値の範囲は　　$-1<a<0,\ \dfrac{7}{2}<a<4$

8　2 次関数 $y=x^2-2mx+m+2$ のグラフと x 軸の $x>1$ の部分が異なる 2 点で交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$2<m<3$

解説

$f(x)=x^2-2mx+m+2$ とおく。

変形すると　　$f(x)=(x-m)^2-m^2+m+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=m$ である。

グラフと x 軸の $x>1$ の部分が異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であるから　　$(-2m)^2-4(m+2)>0$

よって　　　$4(m+1)(m-2)>0$

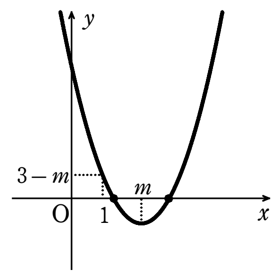
ゆえに　　　$m<-1,\ 2<m$　…… ①

[2]　軸 $x=m$ について　　$m>1$　…… ②

[3]　$f(1)>0$

よって　　$1^2-2m\cdot1+m+2>0$

ゆえに　　$m<3$　…… ③



①，②，③ の共通範囲を求めて　　$2<m<3$

9　2 次関数 $y=x^2+mx+2$ が次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　この 2 次関数のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わる。

(2)　この 2 次関数のグラフと x 軸の $x<-1$ の部分が異なる 2 点で交わる。

解答　(1)　$m<-2\sqrt{2}$　　(2)　$2\sqrt{2}<m<3$

解説

$f(x)=x^2+mx+2$ とおく。

これを変形すると　　$f(x)=\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=-\dfrac{m}{2}$ である。

(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$m^2-4\cdot1\cdot2>0$

よって　　$(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})>0$

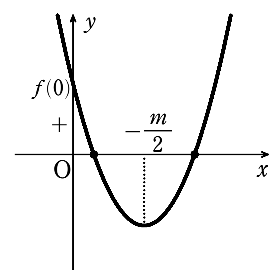
ゆえに　　$m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$　…… ①

[2]　軸 $x=-\dfrac{m}{2}$ について

$-\dfrac{m}{2}>0$　　　よって　　$m<0$　…… ②

[3]　$f(0)>0$

$f(0)=2>0$ であるから，成り立つ。



①，② の共通範囲を求めて　　$m<-2\sqrt{2}$

参考　① は次のように求めてもよい。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

放物線 $y=\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+2$ の頂点の y 座標は負であるから　　$-\dfrac{m^2}{4}+2<0$

すなわち　　$m^2-8>0$

よって　　$(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})>0$

ゆえに　　$m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$　…… ①

(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<-1$ の部分が異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D>0$ であるから

$$m^2-4\cdot1\cdot2>0$$

よって　$(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})>0$

ゆえに　$m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$ ……①

[2] 軸 $x=-\frac{m}{2}$ について

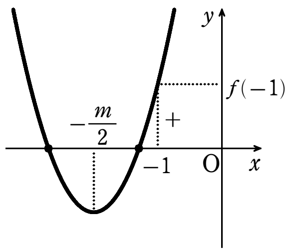
$-\frac{m}{2}<-1$　　よって　$m>2$ ……②

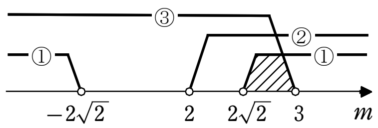
[3] $f(-1)>0$

よって　$(-1)^2+m\cdot(-1)+2>0$

ゆえに　$m<3$ ……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$2\sqrt{2}<m<3$





10 放物線 $y=x^2+2(m-1)x+5-m^2$ が x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$m<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<m$

解説

$f(x)=x^2+2(m-1)x+5-m^2$ とおく。

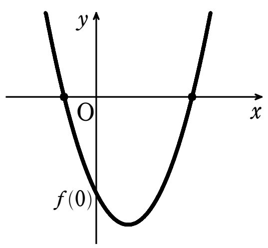
放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，放物線が y 軸の負の部分と交わるときである。

したがって　$f(0)<0$　すなわち　$5-m^2<0$

よって　$m^2-5>0$

ゆえに　$(m+\sqrt{5})(m-\sqrt{5})>0$

したがって　$m<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<m$



参考　$f(0)<0$ のとき，すなわち $m<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<m$ ……① のとき，放物線 $y=f(x)$ は x 軸と異なる 2 点で交わる。

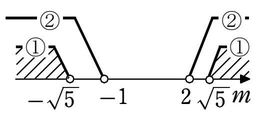
したがって，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D としたとき，$D>0$ という条件は考える必要はない。

実際，D について計算してみると

$$D=\{2(m-1)\}^2-4(5-m^2)=8m^2-8m-16=8(m+1)(m-2)$$

よって，$D>0$ とすると　$m<-1,\ 2<m$ ……②

右の図より，① と ② の共通部分は ① に一致することがわかる。



11 2 次関数 $y=x^2+2(m+3)x+3-m$ のグラフと x 軸の負の部分が，異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

解答　$-1<m<3$

解説

$f(x)=x^2+2(m+3)x+3-m$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=-m-3$ である。

グラフと x 軸の負の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=\{2(m+3)\}^2-4\cdot1\cdot(3-m)=4(m^2+7m+6)$$
$$=4(m+1)(m+6)$$

$D>0$ から　$m<-6,\ -1<m$ ……①

[2] 軸 $x=-m-3$ について　$-m-3<0$

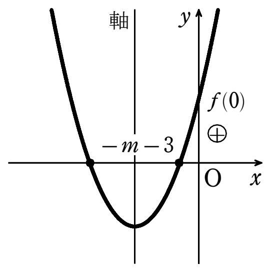
よって　$m>-3$ ……②

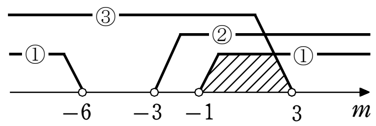
[3] $f(0)>0$　すなわち　$3-m>0$

よって　$m<3$ ……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$-1<m<3$





12 2 次関数 $y=x^2+2(m-2)x+m$ のグラフと次の部分が，異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1) x 軸の正の部分　　(2) x 軸の負の部分

解答　(1) $0<m<1$　　(2) $m>4$

解説

$f(x)=x^2+2(m-2)x+m$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=-m+2$ である。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=\{2(m-2)\}^2-4\cdot1\cdot m=4(m^2-5m+4)=4(m-1)(m-4)$$

(1) グラフと x 軸の正の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

$D>0$ から　$(m-1)(m-4)>0$

よって　$m<1,\ 4<m$ ……①

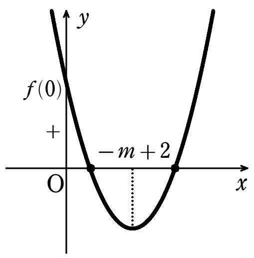
[2] 軸 $x=-m+2$ について　$-m+2>0$

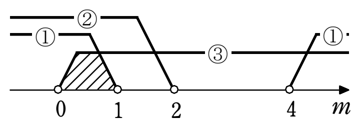
よって　$m<2$ ……②

[3] $f(0)>0$　すなわち　$m>0$ ……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$0<m<1$





(2) グラフと x 軸の負の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つときである。

[1] グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

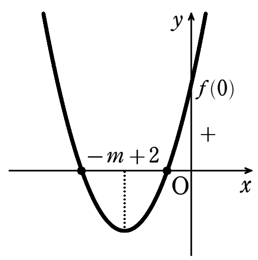
$D>0$ から　$(m-1)(m-4)>0$

よって　$m<1,\ 4<m$ ……①

[2] 軸 $x=-m+2$ について　$-m+2<0$

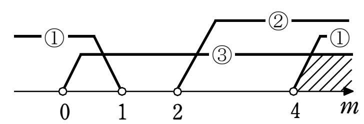
よって　$m>2$ ……②

[3] $f(0)>0$　すなわち　$m>0$ ……③



①，②，③ の共通範囲を求めて

$m>4$



13 方程式 $x^2+mx+3=0$ が次のような実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1) 異なる 2 つの正の解　　(2) -1 より小さい異なる 2 つの解

解答　(1) $m<-2\sqrt{3}$　　(2) $2\sqrt{3}<m<4$

解説

$f(x)=x^2+mx+3$ とする。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=m^2-4\cdot1\cdot3=m^2-12$$

放物線 $y=f(x)$ の軸は　直線 $x=-\frac{m}{2}$

(1) 方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつのは，放物線 $y=f(x)$ と x 軸の $x>0$ の部分が異なる 2 点で交わるときである。

すなわち，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つときである。

[1] $D>0$　　[2] $-\frac{m}{2}>0$　　[3] $f(0)>0$

[1] $D>0$ から　$m^2-12>0$　　よって　$m<-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}<m$ ……①

[2] $-\frac{m}{2}>0$ から　$m<0$ ……②

[3] $f(0)>0$ から　$f(0)=3>0$　　これは常に成り立つ。

①，② から　$m<-2\sqrt{3}$

(2) 方程式 $f(x)=0$ が -1 より小さい異なる 2 つの解をもつのは，放物線 $y=f(x)$ と x 軸の $x<-1$ の部分が異なる 2 点で交わるときである。

すなわち，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つときである。

[1] $D>0$　　[2] $-\frac{m}{2}<-1$　　[3] $f(-1)>0$

[1] $D>0$ から　$m^2-12>0$　　よって　$m<-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}<m$ ……①

[2] $-\frac{m}{2}<-1$ から　$m>2$ ……②

[3] $f(-1)>0$ から　$f(-1)=(-1)^2+m\cdot(-1)+3=-m+4>0$

よって　$m<4$ ……③

① ～ ③ から　$2\sqrt{3}<m<4$

14 2 次方程式 $x^2-ax+4=0$ が 3 より小さい異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$a<-4,\ 4<a<\frac{13}{3}$

解説

$f(x)=x^2-ax+4$ とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=\frac{a}{2}$

また，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

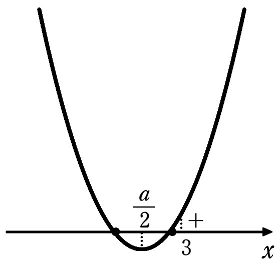
$$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot4=a^2-16$$
$$=(a+4)(a-4)$$

方程式 $f(x)=0$ が 3 より小さい異なる 2 つの実数解をもつのは，次の 3 つが同時に成り立つときである。

[1]　$D>0$

[2]　軸について　$\dfrac{a}{2}<3$

[3]　$f(3)>0$



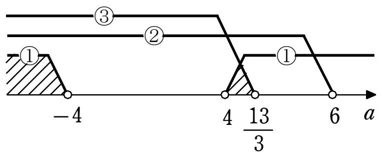
[1] から　　$(a+4)(a-4)>0$

よって　　$a<-4,\ 4<a$　……①

[2] から　　$a<6$　……②

[3] から　　$13-3a>0$

よって　　$a<\dfrac{13}{3}$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて

$$a<-4,\ 4<a<\frac{13}{3}$$

15 2 次方程式 $x^2+2mx+2m+3=0$ が次のような実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　異なる 2 つの負の解　　　　(2)　-4 より大きい異なる 2 つの解

解答　(1)　$m>3$　　(2)　$m<-1,\ 3<m<\dfrac{19}{6}$

解説

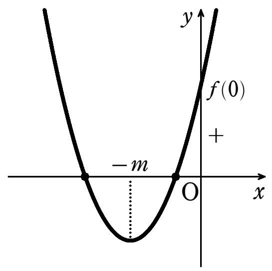
$f(x)=x^2+2mx+2m+3$ とおく。

これを変形すると　　$f(x)=(x+m)^2-m^2+2m+3$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=-m$ である。

(1)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの負の解をもつのは，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の負の部分が異なる 2 点で交わるときである。

すなわち，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。



[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$D>0$ であるから　　$(2m)^2-4(2m+3)>0$

よって　　$(m+1)(m-3)>0$

ゆえに　　$m<-1,\ 3<m$　……①

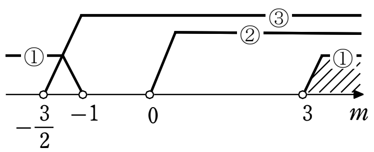
[2]　軸 $x=-m$ について　　$-m<0$

よって　　$m>0$　……②

[3]　$f(0)>0$

よって　　$2m+3>0$

ゆえに　　$m>-\dfrac{3}{2}$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて　　$m>3$

参考　① は次のように求めてもよい。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

放物線 $y=(x+m)^2-m^2+2m+3$ の頂点の y 座標は負であるから

$$-m^2+2m+3<0$$

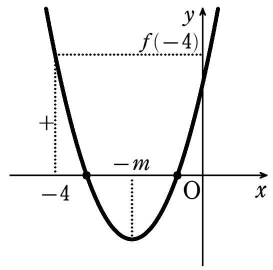
すなわち　　$m^2-2m-3>0$

よって　　$(m+1)(m-3)>0$

ゆえに　　$m<-1,\ 3<m$　……①

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ が -4 より大きい異なる 2 つの解をもつのは，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x>-4$ の部分が異なる 2 点で交わるときである。

すなわち，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。



[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$D>0$ であるから　　$(2m)^2-4(2m+3)>0$

よって　　$(m+1)(m-3)>0$

ゆえに　　$m<-1,\ 3<m$　……①

[2]　軸 $x=-m$ について　$-m>-4$

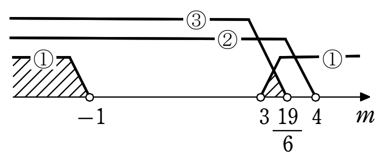
よって　　$m<4$　……②

[3]　$f(-4)>0$

よって　　$(-4)^2+2m\cdot(-4)+2m+3>0$

すなわち　　$-6m+19>0$

ゆえに　　$m<\dfrac{19}{6}$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて

$$m<-1,\ 3<m<\frac{19}{6}$$

参考　$\dfrac{D}{4}=m^2-(2m+3)=m^2-2m-3$ としてもよい。

16 2 次方程式 $x^2-2ax+2a+3=0$ が $1\leqq x\leqq 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

解答　$3<a\leqq\dfrac{7}{2}$

解説

$f(x)=x^2-2ax+2a+3$ とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=a$

また，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(2a+3)=a^2-2a-3$$

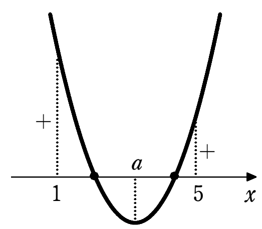
$$=(a+1)(a-3)$$

方程式 $f(x)=0$ が $1\leqq x\leqq 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつのは，次の 4 つが同時に成り立つときである。

[1]　$D>0$

[2]　軸について　$1<a<5$

[3]　$f(1)\geqq 0$　　　[4]　$f(5)\geqq 0$



[1] から　　$(a+1)(a-3)>0$

よって　　$a<-1,\ 3<a$　……①

[2] から　　$1<a<5$　……②

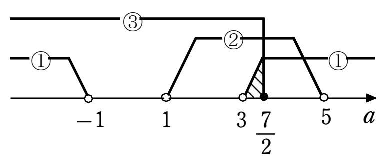
[3] から　　$f(1)=1^2-2a\cdot 1+2a+3=4\geqq 0$

これは常に成り立つ。

[4] から　　$f(5)=5^2-2a\cdot 5+2a+3\geqq 0$

ゆえに　　$-8a+28\geqq 0$

よって　　$a\leqq\dfrac{7}{2}$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて

$$3<a\leqq\frac{7}{2}$$

17 2 次関数 $y=x^2-mx-m+3$ のグラフと x 軸の正の部分が，異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

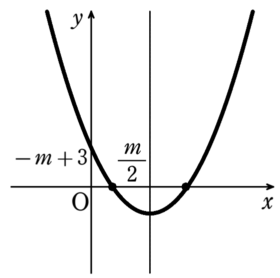
解答　$2<m<3$

解説

$f(x)=x^2-mx-m+3$ とする。

これを変形すると

$$f(x)=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}-m+3$$



グラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=\dfrac{m}{2}$ である。

グラフと x 軸の正の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4\cdot 1\cdot(-m+3)=m^2+4m-12=(m-2)(m+6)$$

$D>0$ から　　$(m-2)(m+6)>0$

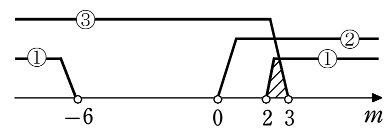
これを解くと　　$m<-6,\ 2<m$　……①

[2]　軸 $x=\dfrac{m}{2}$ について　　$\dfrac{m}{2}>0$

すなわち　　$m>0$　……②

[3]　$f(0)>0$　すなわち　$-m+3>0$

よって　　$m<3$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて　　$2<m<3$

18 2 次関数 $y=x^2+2mx+3m+4$ のグラフと次の部分が，異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の正の部分　　　　(2)　x 軸の負の部分

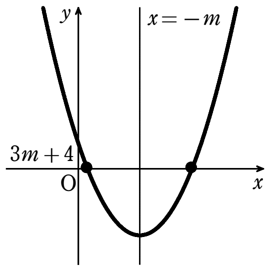
解答　(1)　$-\dfrac{4}{3}<m<-1$　　(2)　$m>4$

解説

$f(x)=x^2+2mx+3m+4$ とする。$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=-m$ である。また，2 次方程式 $x^2+2mx+3m+4=0$ の判別式を D とすると

$$D=(2m)^2-4\cdot 1\cdot(3m+4)=4(m^2-3m-4)$$

(1)　グラフと x 軸の正の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つときである。



[1]　グラフが x 軸と異なる 2 点で交わる。

$D>0$ から　　$m^2-3m-4>0$

すなわち　　$(m+1)(m-4)>0$

これを解くと　　$m<-1,\ 4<m$　……①

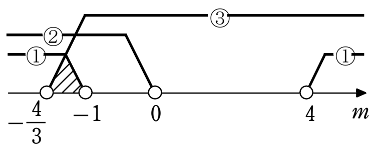
[2]　軸 $x=-m$ について　　$-m>0$

よって　　$m<0$　……②

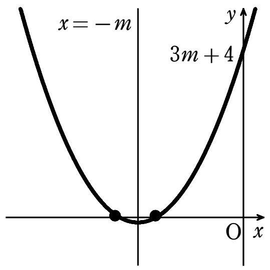
[3]　$f(0)>0$　　すなわち　$3m+4>0$

よって　　$m>-\dfrac{4}{3}$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$-\dfrac{4}{3}<m<-1$



(2)　グラフと x 軸の負の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つときである。



[1]　グラフが x 軸と異なる 2 点で交わる。

$D>0$ から　　$m^2-3m-4>0$

すなわち　　$(m+1)(m-4)>0$

これを解くと　　$m<-1,\ 4<m$　……①

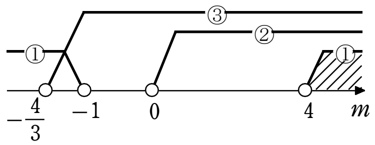
[2]　軸 $x=-m$ について　　$-m<0$

よって　　$m>0$　……②

[3]　$f(0)>0$　　すなわち　$3m+4>0$

よって　　$m>-\dfrac{4}{3}$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　　$m>4$



19　放物線 $y=x^2-2ax+a+2$ と x 軸が次の範囲において異なる 2 点で交わるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

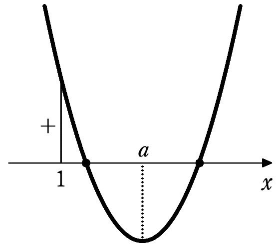
(1)　$x>1$　　　　(2)　1 点は $x<1$，他の 1 点は $x>1$

解答　(1)　$2<a<3$　　(2)　$a>3$

解説

$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=a$



また，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(-2a)^2-4\cdot1\cdot(a+2)$

$=4(a^2-a-2)=4(a+1)(a-2)$

(1)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $x>1$ の範囲において異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　$D>0$

[2]　軸について　$a>1$

[3]　$f(1)>0$

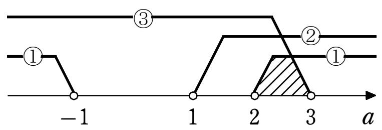
[1] から　　$(a+1)(a-2)>0$

よって　　$a<-1,\ 2<a$　……①

[2] から　　$a>1$　……②

[3] から　　$-a+3>0$

よって　　$a<3$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて

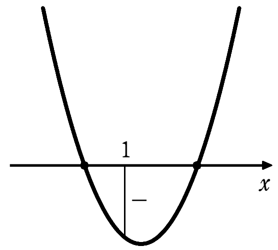
$2<a<3$

(2)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $x<1$ と $x>1$ のそれぞれの範囲において 1 点ずつ交わるのは

$f(1)=-a+3<0$

が成り立つときである。

よって　　$a>3$



20　放物線 $y=x^2+2mx+2m+3$ と x 軸が次の範囲において異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　$x>0$　　　(2)　$x<0$　　　(3)　$x\leqq2$

(4)　1 点は $x<1$，他の 1 点は $x>1$

解答　(1)　$-\dfrac{3}{2}<m<-1$　　(2)　$m>3$　　(3)　$-\dfrac{7}{6}\leqq m<-1,\ 3<m$

(4)　$m<-1$

解説

$f(x)=x^2+2mx+2m+3$ とする。

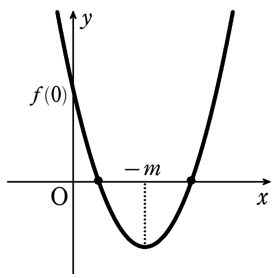
放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=-m$

また，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(2m)^2-4\cdot1\cdot(2m+3)$

$=4(m^2-2m-3)=4(m+1)(m-3)$

(1)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $x>0$ の範囲において異なる 2 点で交わるのは，次の 3 つが同時に成り立つときである。



[1]　$D>0$

[2]　軸について　$-m>0$

[3]　$f(0)>0$

[1] から　　$(m+1)(m-3)>0$

よって　　$m<-1,\ 3<m$　……①

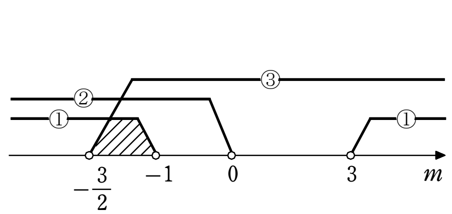
[2] から　　$m<0$　　……②

[3] から　　$2m+3>0$

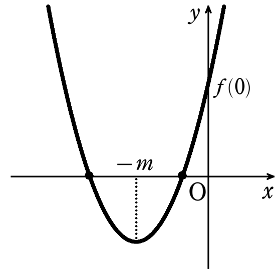
よって　　$m>-\dfrac{3}{2}$　　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$-\dfrac{3}{2}<m<-1$



(2)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $x<0$ の範囲において異なる 2 点で交わるのは，次の 3 つが同時に成り立つときである。



[1]　$D>0$

[2]　軸について　$-m<0$

[3]　$f(0)>0$

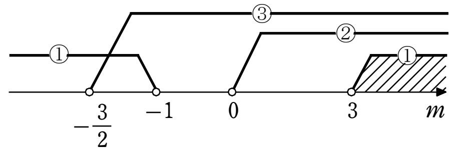
[1] から　　$m<-1,\ 3<m$　……①

[2] から　　$m>0$　　……②

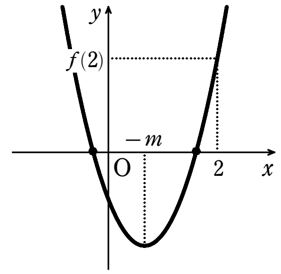
[3] から　　$m>-\dfrac{3}{2}$　　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$m>3$



(3)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $x\leqq2$ の範囲において異なる 2 点で交わるのは，次の 3 つが同時に成り立つときである。



[1]　$D>0$

[2]　軸について　$-m<2$

[3]　$f(2)\geqq0$

[1] から　　$m<-1,\ 3<m$　……①

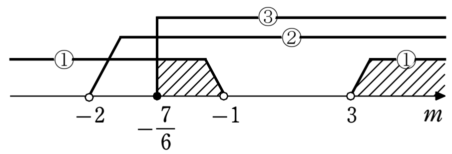
[2] から　　$m>-2$　　……②

[3] から　　$6m+7\geqq0$

よって　　$m\geqq-\dfrac{7}{6}$　　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$-\dfrac{7}{6}\leqq m<-1,\ 3<m$



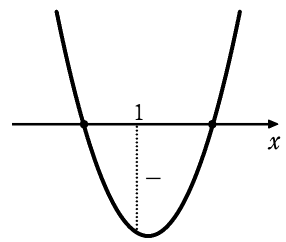
(4)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $x<1$ と $x>1$ のそれぞれの範囲において 1 点ずつ交わるのは

$f(1)<0$

が成り立つときである。

すなわち　$4m+4<0$

よって　　$m<-1$



21　2 次関数 $y=x^2+2(m-1)x+3-m$ のグラフが次のようになるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の $x<1$ の部分と，異なる 2 点で交わる。

(2)　x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わる。

解答　(1)　$m>2$　　(2)　$m>3$

(解説)

$f(x)=x^2+2(m-1)x+3-m$ とする。

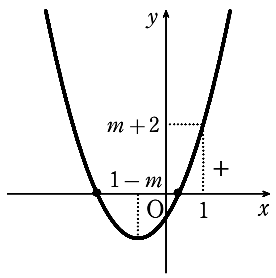
これを変形すると　　$f(x)=\{x+(m-1)\}^2-m^2+m+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=1-m$ である。

また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=\{2(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot(3-m)=4(m^2-m-2)$

$=4(m+1)(m-2)$



(1)　放物線 $y=f(x)$ と x 軸の $x<1$ の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

$D>0$ から　　$m<-1,\ 2<m$　……①

[2]　軸 $x=1-m$ について　　$1-m<1$

すなわち　　$m>0$　……②

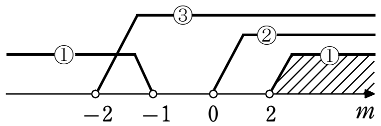
[3]　$f(1)>0$

すなわち

$1^2+2(m-1)\cdot1+3-m>0$

よって　　　$m+2>0$

したがって　　$m>-2$　……③



①，②，③ の共通範囲を求めて　　$m>2$

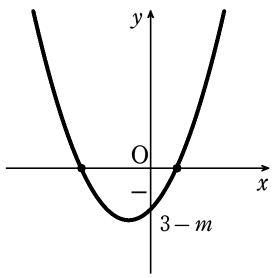
(2)　放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと，交わるのは

$f(0)<0$

が成り立つときである。

$f(0)<0$ から　　$3-m<0$

よって　　　$m>3$



22 2 次関数 $y=-x^2-2mx-2m-3$ のグラフが次のようになるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の $x>-4$ の部分と，異なる 2 点で交わる。

(2)　x 軸の $x>-2$ の部分と $x<-2$ の部分のそれぞれと交わる。

解答　(1)　$m<-1,\ 3<m<\dfrac{19}{6}$　　(2)　$m>\dfrac{7}{2}$

(解説)

$f(x)=-x^2-2mx-2m-3$ とする。

これを変形すると　　$f(x)=-(x+m)^2+m^2-2m-3$

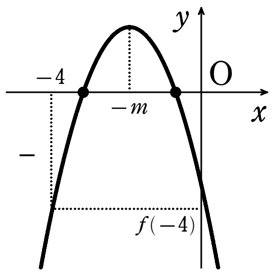
$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=-m$ である。

また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(-2m)^2-4\cdot(-1)\cdot(-2m-3)=4(m^2-2m-3)$

$=4(m+1)(m-3)$

(1)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>-4$ の部分と，異なる 2 点で交わるのは，[1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。



[1]　グラフと x 軸が異なる 2 点で交わる。

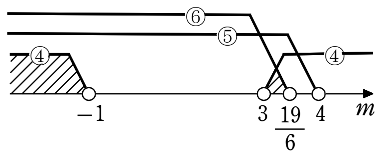
$D>0$ から　　$m<-1,\ 3<m$　……④

[2]　軸 $x=-m$ について　$-m>-4$

すなわち　　$m<4$　……⑤

[3]　$f(-4)<0$　すなわち　$6m-19<0$

よって　　$m<\dfrac{19}{6}$　……⑥



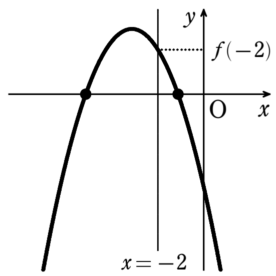
④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて

$m<-1,\ 3<m<\dfrac{19}{6}$

(2)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>-2$ の部分と $x<-2$ の部分のそれぞれと交わるのは $f(-2)>0$ が成り立つときである。

$f(-2)>0$ から　　$2m-7>0$

よって　　$m>\dfrac{7}{2}$



23 2 次関数 $y=x^2-2(m+1)x+4m+4$ のグラフが次のようになるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　x 軸の $x<1$ の部分と，異なる 2 点で交わる。

(2)　x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わる。

解答　(1)　$-\dfrac{3}{2}<m<-1$　　(2)　$m<-1$

(解説)

$f(x)=x^2-2(m+1)x+4m+4$ とする。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，その軸は直線 $x=m+1$ である。

(1)　グラフと x 軸の $x<1$ の部分が，異なる 2 点で交わるのは，次の [1] ～ [3] が同時に成り立つときである。

[1]　グラフが x 軸と異なる 2 点で交わる。

2 次方程式 $x^2-2(m+1)x+4m+4=0$

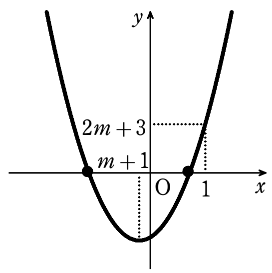
の判別式を D とすると

$D=\{-2(m+1)\}^2-4\cdot1\cdot(4m+4)$

$=4(m^2-2m-3)$

$D>0$ を解くと，$(m+1)(m-3)>0$ から

$m<-1,\ 3<m$　……①



[2]　軸 $x=m+1$ について　　$m+1<1$

よって　　$m<0$　……②

[3]　$f(1)>0$

すなわち　　$1^2-2(m+1)\cdot1+4m+4>0$

よって　　$2m+3>0$

したがって　　$m>-\dfrac{3}{2}$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　　$-\dfrac{3}{2}<m<-1$

(2)　グラフと x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれが，交わるのは $f(0)<0$ が成り立つときである。

よって　　$4m+4<0$

したがって　　$m<-1$