$\boxed{1}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　6

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6)$

また　$a_1-6=2-6=-4$

よって，数列 $\{a_n-6\}$ は初項 -4，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で

$$a_n-6=-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$a_n=-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=6$

$\boxed{2}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　-3

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}+3=\frac{2}{3}(a_n+3)$

また　$a_1+3=1+3=4$

よって，数列 $\{a_n+3\}$ は初項 4，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列で

$$a_n+3=4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad ゆえに\qquad a_n=4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=-3$

別解　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)=\frac{2}{3}b_n$$

また　$b_1=a_2-a_1=\left(\frac{2}{3}\cdot1-1\right)-1=-\frac{4}{3}$

よって　$b_n=-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

一方　$b_n=a_{n+1}-a_n=\left(\frac{2}{3}a_n-1\right)-a_n=-\frac{1}{3}a_n-1$

ゆえに　$a_n=-3(b_n+1)=-3\left\{-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1\right\}=4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=-3$

$\boxed{3}$ 次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4-\frac{1}{3}a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n-6\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　(1)　3　　(2)　$-\infty$

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=-\frac{1}{3}(a_n-3)$

また　$a_1-3=1-3=-2$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は初項 -2，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列で

$$a_n-3=-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\qquad ゆえに\qquad a_n=-2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=3$

(2)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-6=2(a_n-6)$

また　$a_1-6=3-6=-3$

よって，数列 $\{a_n-6\}$ は初項 -3，公比 2 の等比数列で

$$a_n-6=-3\cdot2^{n-1}\qquad ゆえに\qquad a_n=-3\cdot2^{n-1}+6$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}2^{n-1}=\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=\frac{3}{2}$，$a_{n+1}=\frac{2}{3-a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義されている。

(1)　$b_n=a_n-1$ とおいて数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

解答　(1)　$a_n=\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$　　(2)　1

解説

(1)　$a_{n+1}-1=\frac{2}{3-a_n}-1$

$$=\frac{2-(3-a_n)}{3-a_n}=\frac{a_n-1}{3-a_n}=\frac{a_n-1}{2-(a_n-1)}$$

$b_n=a_n-1$ より $b_{n+1}=a_{n+1}-1$ となるので

$b_{n+1}=\frac{b_n}{2-b_n}$　両辺の逆数をとって　$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2-b_n}{b_n}=2\frac{1}{b_n}-1$

変形して　$\frac{1}{b_{n+1}}-1=2\left(\frac{1}{b_n}-1\right)$　より数列 $\left\{\frac{1}{b_n}-1\right\}$ は公比2の等比数列

$$\frac{1}{b_n}-1=\left(\frac{1}{b_1}-1\right)\cdot2^{n-1}=\left(\frac{1}{a_1-1}-1\right)\cdot2^{n-1}=\left(\frac{1}{\frac{3}{2}-1}-1\right)\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$$

よって　$\frac{1}{b_n}=2^{n-1}+1$　より　$b_n=\frac{1}{2^{n-1}+1}$

$a_n-1=\frac{1}{2^{n-1}+1}$　より　$a_n=\frac{1}{2^{n-1}+1}+1=\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$

(2)　$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{2^{n-1}}}{1+\frac{1}{2^{n-1}}}=1$$

$\boxed{5}$ 次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項と，その極限を求めよ。[25 点]

$$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-6\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=3(a_n-3)$

また　$a_1-3=2-3=-1$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は初項 -1，公比 3 の等比数列で

$$a_n-3=-3^{n-1}$$

ゆえに　$a_n=-3^{n-1}+3$

ここで，$\lim_{n\to\infty}3^{n-1}=\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=3(a_n-3)$

また　$a_1-3=2-3=-1$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は初項 -1，公比 3 の等比数列で

$$a_n-3=-3^{n-1}$$

ゆえに　$a_n=-3^{n-1}+3$

ここで，$\lim_{n\to\infty}3^{n-1}=\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

$\boxed{6}$ $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2+3a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の 第 n 項を求めよ。　[(1) 15 点　(2) 10 点]

(2)　数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求めよ。また，$\lim_{n\to\infty}2^na_n$ を求めよ。

解答　(1)　$a_n>0$ であるから，与えられた漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2+3a_n}{a_n}\qquad すなわち\qquad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+3$$

$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+3$

よって　$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$　　また　$b_1+3=\frac{1}{a_1}+3=4$

ゆえに，数列 $\{b_n+3\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+3=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$$

したがって　$b_n=2^{n+1}-3$

(2)　(1) から　$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2^{n+1}-3}$

よって　$\lim_{n\to\infty}2^na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{2}$

解説

(1)　$a_n>0$ であるから，与えられた漸化式の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2+3a_n}{a_n}\qquad すなわち\qquad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+3$$

$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+3$

よって　$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$　　また　$b_1+3=\frac{1}{a_1}+3=4$

ゆえに，数列 $\{b_n+3\}$ は初項 4，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n+3=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$$

したがって　$b_n=2^{n+1}-3$

(2)　(1) から　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2^{n+1}-3}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{2}$

$\boxed{7}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　2

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1-2=1-2=-1$ であるから

$$a_n-2=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

$\boxed{8}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　$\dfrac{3}{4}$

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{3}\left(a_n-\dfrac{3}{4}\right)$

よって，数列 $\left\{a_n-\dfrac{3}{4}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1-\dfrac{3}{4}=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$a_n-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3}{4}\right)=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$

$\boxed{9}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。　[20点]

$$a_1=2,\ 3a_{n+1}=a_n+2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{3}(a_n-1)$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1-1=2-1=1$ であるから　$a_n-1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{3}(a_n-1)$

よって，数列 $\{a_n-1\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

その初項は，$a_1-1=2-1=1$ であるから　$a_n-1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

$\boxed{10}$ 次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=4,\ a_{n+1}=2a_n-3$　　(2)　$a_1=1,\ a_2=3,\ 4a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n$

解答　(1)　∞　　(2)　$\dfrac{11}{3}$

解説

(1)　$a_{n+1}=2a_n-3$ を変形すると　$a_{n+1}-3=2(a_n-3)$

数列 $\{a_n-3\}$ は初項 $a_1-3=1$，公比 2 の等比数列であるから

$a_n-3=1\cdot 2^{n-1}$　　よって　$a_n=2^{n-1}+3$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

(2)　$4a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n$ を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_{n+1}-a_n)$　　また　$a_2-a_1=2$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項が $a_1=1$ で，階差数列が初項 2，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=1+2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{4}}=1+\frac{8}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1+\frac{8}{3}=\frac{11}{3}$

$\boxed{11}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$　　(2)　$a_1=5,\ a_{n+1}=2a_n-4$

解答　(1)　2　　(2)　∞

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$　　また　$a_1-2=1-2=-1$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は初項 -1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$a_n-2=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$

(2)　与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}-4=2(a_n-4)$　　また　$a_1-4=5-4=1$

よって，数列 $\{a_n-4\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列で

$a_n-4=2^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=2^{n-1}+4$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2^{n-1}+4)=\infty$

$\boxed{12}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+2$　　(2)　$a_1=1,\ 2a_{n+1}=6-a_n$

解答　(1)　∞　　(2)　2

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$　　また　$a_1+1=2+1=3$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は，初項 3，公比 3 の等比数列で

$a_n+1=3\cdot 3^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=3^n-1$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(3^n-1)=\infty$

(2)　与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}-2=-\dfrac{1}{2}(a_n-2)$　　また　$a_1-2=1-2=-1$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は初項 -1，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$a_n-2=-1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　ゆえに　$a_n=2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$

$\boxed{13}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\frac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)$$

解答　$\dfrac{4}{7}$

解説

与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{3}{4}(a_{n+1}-a_n)$　　また　$a_2-a_1=1-0=1$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 1，公比 $-\dfrac{3}{4}$ の等比数列で

$$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}=0+\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{4}{7}$

別解　与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{4}(a_{n+1}-a_n),\quad a_{n+2}+\frac{3}{4}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{3}{4}a_n$$

ゆえに　$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$，$a_{n+1}+\frac{3}{4}a_n=a_2+\frac{3}{4}a_1=1$

辺々引いて　$-\frac{7}{4}a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1$

よって　$a_n=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{4}{7}$

14　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$$a_1=1,\ a_2=3,\ 4a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n$$

解答　$\frac{11}{3}$

解説

$4a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n$ を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_{n+1}-a_n)$　　また　$a_2-a_1=3-1=2$

ゆえに，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は，初項 2，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列で　$a_{n+1}-a_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=1+2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{4}}=1+\frac{8}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{8}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}\right]=1+\frac{8}{3}=\frac{11}{3}$

別解　与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_{n+1}-a_n),\quad a_{n+2}-\frac{1}{4}a_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n$$

また　$a_2-a_1=2$，$a_2-\frac{1}{4}a_1=\frac{11}{4}$

ゆえに　$a_{n+1}-a_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，$a_{n+1}-\frac{1}{4}a_n=\frac{11}{4}$

辺々を引いて　$a_n=\frac{11}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{11}{3}-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{11}{3}-0=\frac{11}{3}$

15　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$a_1=0$，$a_{n+1}=1-\frac{1}{2}a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　(1)　3　　(2)　$\frac{2}{3}$　　(3)　∞

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$

また　$a_1-3=1-3=-2$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は，初項 -2，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で　$a_n-3=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_n=3-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=3$

(2)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$

また　$a_1-\frac{2}{3}=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$

よって，数列 $\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$ は，初項 $-\frac{2}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列で

$$a_n-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{3}$

(3)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

また　$a_1+1=1+1=2$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は，初項 2，公比 2 の等比数列で　$a_n+1=2\cdot2^{n-1}$

ゆえに　$a_n=2^n-1$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

16　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，$\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2+a_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　$a_n=\frac{1}{3\cdot2^{n-1}-1}$，極限は 0

解説

$a_1>0$ であるから　$a_2=\frac{a_1}{2+a_1}>0$

同様にして　$a_3>0$，$a_4>0$，……，$a_n>0$

したがって　$a_n\neq0$

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2+a_n}{a_n}$

すなわち　$\frac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{1}{a_n}+1$

$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$

よって　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

また　$b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=2+1=3$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列で　$b_n+1=3\cdot2^{n-1}$

よって　$b_n=3\cdot2^{n-1}-1$

ゆえに　$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{3\cdot2^{n-1}-1}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=0$

17　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=0$，$a_2=1$，$3a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　(1)　$\frac{3}{5}$　　(2)　∞　　(3)　$-\infty$

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比 $-\frac{2}{3}$ の等比数列である。

よって　$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　…… ①

また　$a_{n+2}+\frac{2}{3}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n$

ゆえに　$a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n=a_2+\frac{2}{3}a_1=1$　…… ②

①，② より　$\frac{5}{3}a_n=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

したがって　$a_n=\frac{3}{5}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{5}(1-0)=\frac{3}{5}$

別解　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと　$b_1=a_2-a_1=1$，$b_{n+1}=-\frac{2}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公比 $-\frac{2}{3}$ の等比数列で　$b_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq2$ のとき　$a_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{5}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{3}{5}$

(2)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-2a_{n+1}=5(a_{n+1}-2a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=1$，公比 5 の等比数列である。

よって　$a_{n+1}-2a_n=5^{n-1}$　…… ①

また　$a_{n+2}-5a_{n+1}=2(a_{n+1}-5a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 $a_2-5a_1=1$，公比 2 の等比数列である。

よって　$a_{n+1}-5a_n=2^{n-1}$　…… ②

① − ② より　$3a_n=5^{n-1}-2^{n-1}$

したがって　$a_n=\frac{1}{3}(5^{n-1}-2^{n-1})$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot 5^{n-1}\left\{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}=\infty$

(3)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 $a_2-3a_1=-1$，公比 3 の等比数列である。

よって　$a_{n+1}-3a_n=(-1)\cdot 3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=-\frac{1}{9}$

したがって，数列 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ は，初項 $\frac{a_1}{3}=\frac{1}{3}$，公差 $-\frac{1}{9}$ の等差数列である。

よって　$\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{4-n}{9}$

ゆえに　$a_n=(4-n)\cdot 3^{n-2}$

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

$\boxed{18}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$a_1=10$，$a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　4

解説

$a_1>0$ であるから　$a_2=2\sqrt{a_1}>0$

同様にして　$a_3>0$，$a_4>0$，……

よって　$a_n>0$

漸化式の両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2\sqrt{a_n}$　すなわち　$\log_2 a_{n+1}=\frac{1}{2}\log_2 a_n+1$

よって　$\log_2 a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(\log_2 a_n-2)$

また　$\log_2 a_1-2=\log_2 10-2=\log_2\frac{5}{2}$

ゆえに，数列 $\{\log_2 a_n-2\}$ は，初項 $\log_2\frac{5}{2}$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で

$\log_2 a_n-2=\left(\log_2\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

よって　$\log_2 a_n=2+\left(\log_2\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}\log_2 a_n=2$　　ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=4$

$\boxed{19}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$a_1=1$，$a_2=2$，$5a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　$\frac{9}{4}$

解説

与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{5}(a_{n+1}-a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列である。

よって　$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$　…… ①

また　$a_{n+2}-\frac{1}{5}a_{n+1}=a_{n+1}-\frac{1}{5}a_n$

ゆえに　$a_{n+1}-\frac{1}{5}a_n=a_2-\frac{1}{5}a_1=\frac{9}{5}$　…… ②

①，② より　$\frac{4}{5}a_n=\frac{9}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$　　したがって　$a_n=\frac{5}{4}\left\{\frac{9}{5}-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{5}{4}\left(\frac{9}{5}-0\right)=\frac{9}{4}$

参考　① より，$\{a_n\}$ の階差数列の一般項 b_n は　$b_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

よって，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}=1+\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=1+\frac{5}{4}(1-0)=\frac{9}{4}$

$\boxed{20}$ $a_1=3$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$b_n=\frac{a_n}{n}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項とその極限を求めよ。

解答　(1)　$b_n=\frac{5n-2}{n}$　　(2)　$a_n=5n-2$，∞

解説

(1)　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n(n+1)}$

ゆえに　$b_{n+1}=b_n+\frac{2}{n(n+1)}$　　また　$b_1=\frac{a_1}{1}=3$

よって，$\{b_n\}$ は初項が 3，階差数列の第 n 項が $\frac{2}{n(n+1)}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{k(k+1)}=3+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=3+2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=3+2\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{5n-2}{n}\quad\cdots\cdots ①$$

初項は $b_1=3$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$b_n=\frac{5n-2}{n}$

(2)　$a_n=nb_n=n\cdot\frac{5n-2}{n}=5n-2$

よって　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(5n-2)=\infty$

$\boxed{21}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=5$，$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+3$　　(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n-9$

解答　(1)　2　　(2)　$-\infty$

解説

(1)　$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+3$ を変形すると　$a_{n+1}-2=-\frac{1}{2}(a_n-2)$

また　$a_1-2=5-2=3$

よって，数列 $\{a_n-2\}$ は初項 3，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列で　$a_n-2=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_n=3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n=2$

(2)　$a_{n+1}=4a_n-9$ を変形すると　$a_{n+1}-3=4(a_n-3)$

また　$a_1-3=2-3=-1$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は初項 -1，公比 4 の等比数列で　$a_n-3=(-1)\cdot 4^{n-1}$

ゆえに　$a_n=-4^{n-1}+3$

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

$\boxed{22}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項と極限を求めよ。

(1)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}-3a_{n+1}-10a_n=0$

(2)　$a_1=1$，$a_2=2$，$3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$

解答　(1)　$a_n=\frac{1}{7}\{5^{n-1}-(-2)^{n-1}\}$，$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$

(2)　$a_n=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{5}{2}$

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}+2a_{n+1}=5(a_{n+1}+2a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は初項 $a_2+2a_1=1$，公比 5 の等比数列である。

よって　$a_{n+1}+2a_n=5^{n-1}$　…… ①

また　$a_{n+2}-5a_{n+1}=-2(a_{n+1}-5a_n)$

したがって，数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 $a_2-5a_1=1$，公比 -2 の等比数列である。

よって　$a_{n+1}-5a_n=(-2)^{n-1}$　…… ②

①－② より　$7a_n=5^{n-1}-(-2)^{n-1}$

したがって　$a_n=\frac{1}{7}\{5^{n-1}-(-2)^{n-1}\}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7}\cdot 5^{n-1}\left\{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}=\infty$

(2)　与えられた漸化式を変形すると　$3(a_{n+2}-a_{n+1})=a_{n+1}-a_n$

よって　$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$

また　$b_1=a_2-a_1=2-1=1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列で　$b_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

$a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$　ゆえに　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$

23 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=0,\ a_{n+1}=1-\frac{1}{2}a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3)　$a_1=6,\ a_{n+1}=2a_n-5$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　(1)　$\frac{2}{3}$　(2)　4　(3)　∞

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$

また　$a_1-\frac{2}{3}=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$

よって，数列 $\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$ は初項 $-\frac{2}{3}$，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$

(2)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-4=\frac{3}{4}(a_n-4)$

また　$a_1-4=1-4=-3$

よって，数列 $\{a_n-4\}$ は初項 -3，公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$$a_n-4=(-3)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(a_n-4)=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=4$

(3)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+1}-5=2(a_n-5)$

また　$a_1-5=6-5=1$

よって，数列 $\{a_n-5\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから

$$a_n-5=1\cdot 2^{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}2^{n-1}=\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(a_n-5)=\infty$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

24 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

解答　$\frac{5}{2}$

解説

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと　$b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

25 $a_1=0,\ a_2=4,\ a_{n+2}=6a_{n+1}-5a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

解答　(1)　$a_n=5^{n-1}-1$　(2)　∞

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_{n+1}=5b_n$

また　$b_1=a_2-a_1=4-0=4$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 4，公比 5 の等比数列であるから，一般項は　$b_n=4\cdot 5^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot 5^{k-1}=0+\frac{4(5^{n-1}-1)}{5-1}=5^{n-1}-1$

$a_1=0$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=5^{n-1}-1$

別解　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$

数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=4$，公比 5 の等比数列であるから

$a_{n+1}-a_n=4\cdot 5^{n-1}$　$\cdots\cdots ①$

また　$a_{n+2}-5a_{n+1}=a_{n+1}-5a_n$

よって　$a_{n+1}-5a_n=a_2-5a_1=4$　$\cdots\cdots ②$

①，② より　$4a_n=4(5^{n-1}-1)$

したがって　$a_n=5^{n-1}-1$

(2)　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(5^{n-1}-1)=\infty$

26 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2)　$a_1=0,\ a_2=1,\ 3a_{n+2}-5a_{n+1}+2a_n=0$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

解答　(1)　∞　(2)　3

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

したがって　$a_{n+1}-a_n=a_2-a_1=2-1=1$

数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 1 の等差数列であるから，一般項は　$a_n=n$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

(2)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_{n+1}=\frac{2}{3}b_n$

また　$b_1=a_2-a_1=1-0=1$

数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから，一般項は　$b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=0+\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}=3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3$

別解　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$

数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 $a_2-a_1=1$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　$\cdots\cdots ①$

また　$a_{n+2}-\frac{2}{3}a_{n+1}=a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n$

よって　$a_{n+1}-\frac{2}{3}a_n=a_2-\frac{2}{3}a_1=1$　$\cdots\cdots ②$

①，② より　$\frac{1}{3}a_n=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

すなわち　$a_n=3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3$

27 $a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

解答　(1)　$a_n=2^n-1$　(2)　∞

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると　$b_{n+1}=2b_n$

また　$b_1=a_2-a_1=3-1=2$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 2，公比 2 の等比数列であるから，一般項は　$b_n=2^n$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$

$a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

(2)　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2^n-1)=\infty$

$\boxed{28}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項とその極限を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$2a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$

(2)　$a_1=3$，$a_2=5$，$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$

解答　(1)　$a_n=3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$　　(2)　$a_n=2^{n+1}-3^{n-1}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

解説

(1)　漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$$

また　$a_2-a_1=1$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は，初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であり

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$a_n=3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ であり

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3$$

(2)　漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)\quad\cdots\cdots①$$

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)\quad\cdots\cdots②$$

① から，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$$a_2-2a_1=5-2\cdot3=-1$$

よって　　$a_{n+1}-2a_n=-3^{n-1}$　……③

② から，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$a_2-3a_1=5-3\cdot3=-4$$

よって　　$a_{n+1}-3a_n=-4\cdot2^{n-1}=-2^{n+1}$　……④

③−④ から　　$a_n=2^{n+1}-3^{n-1}$

したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}3^{n-1}\left\{4\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1\right\}=-\infty$

$\boxed{29}$ $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，一般項とその極限を求めよ。

解答　$a_n=\dfrac{1}{3^n-1}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

解説

$a_1=\dfrac{1}{2}>0$ であるから，漸化式より　　$a_2>0$，$a_3>0$，$a_4>0$，……

よって，すべての自然数 n に対して，$a_n>0$ が成り立つ。

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+2$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　　$b_{n+1}=3b_n+2$

変形すると　　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また　　$b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=3$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+1=3\cdot3^{n-1}$$

したがって　　$b_n=3^n-1$

ゆえに　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3^n-1}$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\boxed{30}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

$$a_1=1,\ a_2=2,\ 3a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$

解答　$\dfrac{7}{4}$

解説

漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$$

また，$a_2-a_1=1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 1，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であり　　$a_{n+1}-a_n=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって，$n\geqq2$ のとき　　$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=1+\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1+\frac{3}{4}(1-0)=\frac{7}{4}$