極限クイズ

$\boxed{1}$ 次の数列の極限値を求めよ。

(1) $1+1,\ 1+\dfrac{1}{2},\ 1+\dfrac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ 1+\dfrac{1}{n},\ \cdots\cdots$

(2) $1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\cdots,\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots\cdots$

解答 (1) 1 (2) 0

解説

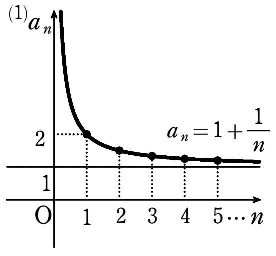
(1) 第 n 項は $a_n=1+\dfrac{1}{n}$

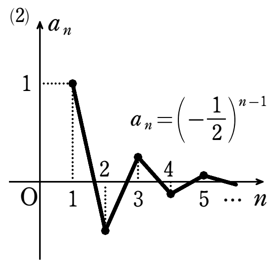
n を限りなく大きくすると，$\dfrac{1}{n}$ は 0 に限りなく近づくから，$\{a_n\}$ は 1 に収束し，$\{a_n\}$ の極限値は 1 である。

(2) 第 n 項は $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

n を限りなく大きくすると，a_n の絶対値 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ は 0 に限りなく近づくから，$\{a_n\}$ も 0 に収束し，$\{a_n\}$ の極限値は 0 である。

参考





$\boxed{2}$ 第 n 項が次の式で表される数列の収束，発散について調べよ。

(1) $\sqrt{n}$ (2) $-n^2+3$ (3) $1+(-1)^n$ (4) $1-\dfrac{(-1)^n}{n}$

解答 (1) 正の無限大に発散 (2) 負の無限大に発散
(3) 振動 (極限はない) (4) 1 に収束

解説

(1) n を限りなく大きくすると，$\sqrt{n}$ の値は限りなく大きくなるから，この数列は正の無限大に発散する。

(2) n を限りなく大きくすると，$-n^2+3$ の値は $n\geqq 2$ で負の数であり，その絶対値は限りなく大きくなる。
よって，この数列は負の無限大に発散する。

(3) この数列は交互に 0 と 2 が現れ，n を限りなく大きくしても一定の値に近づかない。
よって，この数列は振動する。（極限はない）

(4) n を限りなく大きくすると，$\dfrac{(-1)^n}{n}$ は交互に正負の値をとりながら，その絶対値は 0 に限りなく近づくから，この数列は 1 に収束する。

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=4$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-5$ のとき

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=2\lim\limits_{n\to\infty} a_n+3\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$=2\cdot 4+3\cdot(-5)=-7$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\lim\limits_{n\to\infty} b_n=4\cdot(-5)=-20$

解説

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=3$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-2$ のとき，次の極限を求めよ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n-5b_n)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$

解答 (1) 22 (2) 2 (3) $-\dfrac{3}{2}$ (4) $\dfrac{1}{5}$

解説

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n-5b_n)=4\lim\limits_{n\to\infty} a_n-5\lim\limits_{n\to\infty} b_n=4\cdot 3-5\cdot(-2)=22$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} 1=3-1=2$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{3}{-2}=-\dfrac{3}{2}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n-b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n-\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{3+(-2)}{3-(-2)}=\dfrac{1}{5}$

$\boxed{5}$ (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1+0=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3-\dfrac{2}{n}}=\dfrac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{0}{1}=0$

解説

$\boxed{6}$ 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\dfrac{2n-5}{n}$ (2) $\dfrac{4n^2-3n-5}{n^2}$ (3) $\dfrac{2n-1}{5n+1}$

(4) $\dfrac{3n^2-1}{2n^2+3}$ (5) $\dfrac{-4n^2-6n+1}{2n^2+5n-4}$ (6) $\dfrac{-3+7n}{4n+3n^2}$

解答 (1) 2 (2) 4 (3) $\dfrac{2}{5}$ (4) $\dfrac{3}{2}$ (5) -2 (6) 0

解説

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{5}{n}\right)=2-0=2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-3n-5}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(4-\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)=4-0-0=4$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{5n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{5+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{2}{5}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-1}{2n^2+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n^2}}=\dfrac{3}{2}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4n^2-6n+1}{2n^2+5n-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-4-\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{-4}{2}=-2$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-3+7n}{4n+3n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{7}{n}}{\dfrac{4}{n}+3}=\dfrac{0}{3}=0$

$\boxed{7}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-100n^2)$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

解答 (1) ∞ (2) $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-100n^2)=\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(1-\dfrac{100}{n}\right)$ において

$\lim\limits_{n\to\infty} n^3=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{100}{n}\right)=1$

よって $\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-100n^2)=\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{8}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n}{n+1}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n^2+3n}-n}$

解答 (1) ∞ (2) $\dfrac{4}{3}$

解説

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{1+\dfrac{1}{n}}$ において

$$\lim_{n\to\infty}(2n-3)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{n+1}=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+3n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n})^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n^2+3n}+n)}{3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{3}=\frac{2\cdot 2}{3}=\frac{4}{3}$$

別解　(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(2n-5+\frac{5}{n+1}\right)=\infty$

9　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-4n)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(7n^2-3n^3)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n-3}$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+n}}$

解答　(1) ∞　(2) $-\infty$　(3) 1　(4) 1　(5) ∞　(6) -2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-4n)=\lim_{n\to\infty}2n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)$ において

$$\lim_{n\to\infty}2n^3=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)=1$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-4n)=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(7n^2-3n^3)=\lim_{n\to\infty}(-n^3)\left(3-\frac{7}{n}\right)$ において

$$\lim_{n\to\infty}(-n^3)=-\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{7}{n}\right)=3$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(7n^2-3n^3)=-\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$$

$$=1$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=1$$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}}$ において

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right)=2$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n-3}=\infty$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{-n}=-\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$=-2$$

10　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}$ を求めよ。

解答　0

解説

$-1\leqq\sin\dfrac{n\pi}{6}\leqq 1$ であるから　$-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{6}\leqq\dfrac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{6}=0$$

11　θ を定数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\theta$ を求めよ。

解答　0

解説

$-1\leqq\cos n\theta\leqq 1$ であるから　$-\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{n}\cos n\theta\leqq\dfrac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\theta=0$

12　次の無限等比数列の極限を調べよ。

(1) 3，9，27，81，……　(2) 1，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$，……

(3) $-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{4}{9}$，$-\dfrac{8}{27}$，……　(4) 8，-12，18，-27，……

解答　(1) ∞　(2) 0　(3) 0　(4) 極限はない

解説

第 n 項を a_n とする。

(1) $a_n=3^n$，$3>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}3^n=\infty$

(2) $a_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$，$\left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}=0$

(3) $a_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$，$\left|-\dfrac{2}{3}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n=0$

(4) $a_n=8\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$，$-\dfrac{3}{2}<-1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ は振動して，極限はない。

13　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$　(2) $\left(-\dfrac{7}{5}\right)^n$　(3) $3\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

解答　(1) 0　(2) 極限はない　(3) 0

解説

(1) $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

(2) $-\dfrac{7}{5}<-1$ であるから，この数列は振動して，極限はない。

(3) $\left|-\dfrac{3}{4}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}3\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}=3\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}=3\cdot 0=0$

14　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{4^n+3^n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-4^n}{3^n}$

解答　(1) 4　(2) ∞

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=4$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-4^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}}{3^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}=\infty$$

15　次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+5^n}{3^n-5^{n+1}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2^n}{3^n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-3^n}{2^{n+1}}$

解答　(1) $-\dfrac{1}{5}$　(2) ∞　(3) $-\infty$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+5^n}{3^n-5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-5}=-\frac{1}{5}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left\{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\left\{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^n}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right\}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right\}=-\infty$

16 次の数列の収束，発散について調べ，極限があれば，その極限を求めよ。

(1) $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$　　(2) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right\}$

(3) $\{4^n-3^n\}$　　(4) $\left\{\dfrac{(-2)^{n+1}-3^n}{4^n}\right\}$

解答　(1) 収束，$\dfrac{1}{2}$　(2) 収束，3　(3) 発散，∞　(4) 収束，0

解説

(1) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

よって，数列 $\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$ は収束して，その極限は $\dfrac{1}{2}$ である。

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-(n-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$
$$=3\cdot\frac{1+1}{1+1}=3$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right\}$ は収束して，その極限は3である。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ において

$$\lim_{n\to\infty}4^n=\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=1$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4^n-3^n)=\infty$

ゆえに，数列 $\{4^n-3^n\}$ は発散して，その極限は ∞ である。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}-3^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left\{-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n-1\right\}}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left\{-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n-1\right\}$ において

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(-\frac{2}{3}\right)^n-1\right\}=-1$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}-3^n}{4^n}=0\cdot(-1)=0$

ゆえに，数列 $\left\{\dfrac{(-2)^{n+1}-3^n}{4^n}\right\}$ は収束して，その極限は0である。

別解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}-3^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}$ において

$$\lim_{n\to\infty}(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}-3^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0-0=0$

ゆえに，数列 $\left\{\dfrac{(-2)^{n+1}-3^n}{4^n}\right\}$ は収束して，その極限は0である。

17 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}}{3^n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}$

解答　(1) 0　(2) 3

解説

(1) $1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$ であるから

$$\frac{1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\frac{2^n-1}{3^n}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=0$$

別解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=0-0=0$$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3}{n(n+1)(2n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{6}{1\cdot2}=3$$

18 第 n 項が次の式で表される数列の収束，発散について調べよ。[各5点]

(1) $\dfrac{3}{5-n^2}$　(2) $4-(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$　(3) $200-\sqrt{3n}$　(4) $(-4)^n+5$

解答　(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5-n^2}=0$　　よって，この数列は0に収束する。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{4-(-1)^n\frac{1}{n^2}\right\}=4$　　よって，この数列は4に収束する。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(200-\sqrt{3n})=-\infty$　　よって，この数列は $-\infty$ に発散する。

(4) $a_n=(-4)^n+5$ とすると，$n\longrightarrow\infty$ のとき　$a_{2n}\longrightarrow\infty$，$a_{2n-1}\longrightarrow-\infty$

よって，この数列は振動して，極限はない。

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5-n^2}=0$　　よって，この数列は0に収束する。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{4-(-1)^n\frac{1}{n^2}\right\}=4$　　よって，この数列は4に収束する。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(200-\sqrt{3n})=-\infty$　　よって，この数列は $-\infty$ に発散する。

(4) $a_n=(-4)^n+5$ とすると，$n\longrightarrow\infty$ のとき　$a_{2n}\longrightarrow\infty$，$a_{2n-1}\longrightarrow-\infty$

よって，この数列は振動して，極限はない。

19 次の極限を求めよ。[各6点]

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-5n^2+2}{n^3+4n}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+5n}+2n}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2n^2}{1-5n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4n+2n^3)$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})$

解答　(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-5n^2+2}{n^3+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{4-0+0}{1+0}=4$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+5n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+2}=\frac{3}{1+2}=1$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2n^2}{1-5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+2n}{\frac{1}{n}-5}=-\infty$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}(4n+2n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{4}{n^2}+2\right)=\infty$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(2n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=0$$

解説

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-5n^2+2}{n^3+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{4-0+0}{1+0}=4$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+5n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+2}=\frac{3}{1+2}=1$$

(3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2n^2}{1-5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+2n}{\frac{1}{n}-5}=-\infty$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}(4n+2n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{4}{n^2}+2\right)=\infty$$

(5) $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(2n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}=0$$

20 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。[各5点]

(1) $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^n$　　(2) $-2\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

解答　(1) $-\dfrac{5}{3}<-1$ であるから，この数列は振動する。

(2) $\left|-\dfrac{3}{4}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}=-2\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$

よって，この数列は 0 に収束する。

解説

(1)　$-\frac{5}{3}<-1$ であるから，この数列は振動する。

(2)　$\left|-\frac{3}{4}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}=-2\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$

よって，この数列は 0 に収束する。

21 次の極限を求めよ。[各 8 点]

(1)　$\lim_{n\to\infty}\{3^n-(-2)^{2n}\}$　(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-1}{2^n+3}$　(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3\cdot4^n}{4^n+2^n}$

解答　(1)　$\lim_{n\to\infty}\{3^n-(-2)^{2n}\}=\lim_{n\to\infty}(3^n-4^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-1}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{2^n\left\{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\infty$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3\cdot4^n}{4^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n+3}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=3$

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}\{3^n-(-2)^{2n}\}=\lim_{n\to\infty}(3^n-4^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-1}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right\}}{2^n\left\{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\infty$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3\cdot4^n}{4^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^n+3}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=3$

22 次の極限を求めよ。[25 点]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$$

解答　$-1\leqq\cos\frac{n\pi}{3}\leqq1$ であるから

$$-\frac{1}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}\leqq\frac{1}{n+1}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}=0$$

解説

$-1\leqq\cos\frac{n\pi}{3}\leqq1$ であるから

$$-\frac{1}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}\leqq\frac{1}{n+1}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}=0$$

23 次の極限を求めよ。[25 点]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(2n-1)+2(2n-2)+3(2n-3)+\cdots\cdots+n\cdot n}{n^3}$$

解答　$1\cdot(2n-1)+2(2n-2)+\cdots\cdots+n\cdot n=\sum_{k=1}^{n}k(2n-k)=2n\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

よって　与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\cdot1\cdot4=\frac{2}{3}$

解説

$1\cdot(2n-1)+2(2n-2)+\cdots\cdots+n\cdot n=\sum_{k=1}^{n}k(2n-k)=2n\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

よって　与式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}\cdot1\cdot4=\frac{2}{3}$

24 (1)　次の数列の収束，発散を調べよ。

(ア)　$\{n^2-3\}$　(イ)　$\left\{-\frac{1}{2}n^3+1\right\}$　(ウ)　$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$　(エ)　$\{1-(-1)^n\}$

(2)　第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(ア)　$2n-n^3$　(イ)　$\frac{2n^2-n}{n^2+3}$

解答　(1)　(ア)　正の無限大に発散する　(イ)　負の無限大に発散する

(ウ)　収束する。極限値は 0　(エ)　振動する

(2)　(ア)　$-\infty$　(イ)　2

解説

(1)　(ア)　$\lim_{n\to\infty}(n^2-3)=\infty$　正の無限大に発散する

(イ)　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}n^3+1\right)=-\infty$　負の無限大に発散する

(ウ)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$　収束する。極限値は 0

(エ)　2，0，2，0，2，……　振動する

(2)　(ア)　$\lim_{n\to\infty}(2n-n^3)=\lim_{n\to\infty}\left\{-n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)\right\}=-\infty$

(イ)　$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n^2}}=2$

25 (1)　次の数列の収束，発散を調べよ。

(ア)　$\{-n^3+1\}$　(イ)　$\left\{-\frac{1}{n^3}+2\right\}$　(ウ)　$\left\{\frac{3}{n+2}\right\}$　(エ)　$\left\{\frac{(-2)^n}{3}-1\right\}$

(2)　第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(ア)　$-2n^2+3n+1$　(イ)　$\frac{-5n+3}{3n^2-1}$　(ウ)　$\frac{2n^2-3n}{4n^2+2}$

解答　(1)　(ア)　負の無限大に発散する　(イ)　収束する。極限値は 2

(ウ)　収束する。極限値は 0　(エ)　振動する

(2)　(ア)　$-\infty$　(イ)　0　(ウ)　$\frac{1}{2}$

解説

(1)　(ア)　$\lim_{n\to\infty}(-n^3+1)=-\infty$　負の無限大に発散する

(イ)　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^3}+2\right)=2$　収束する。極限値は 2

(ウ)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+2}=0$　収束する。極限値は 0

(エ)　$-\frac{5}{3}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{11}{3}$，……　振動する

(2)　(ア)　$\lim_{n\to\infty}(-2n^2+3n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=-\infty$

(イ)　$\lim_{n\to\infty}\frac{-5n+3}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}=0$

(ウ)　$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n}{4n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{4+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

26 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1)　$\frac{\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n}}$　(2)　$\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$　(3)　$\sqrt{n^2+4n}-n$

(4)　$\log_3\sqrt[n]{2}$　(5)　$\cos n\pi$

解答　(1)　∞　(2)　∞　(3)　2　(4)　0　(4)　0　(5)　振動する (極限はない)

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}=\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{(2n+1)-(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{2}=\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=\dfrac{4}{1+1}=2$

(4) $\lim_{n\to\infty}\log_3\sqrt[n]{2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log_3 2=0$

(5) 数列 $\{\cos n\pi\}$ は　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$

したがって，振動する (極限はない)。

27 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\dfrac{n+\sqrt{3n^2+2}}{\sqrt{2n^3-1}}$　(2) $\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}$　(3) $\dfrac{n}{\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-1}}$

(4) $\dfrac{n^2}{2}\log_2\sqrt[n]{81}$　(5) $\tan\dfrac{2n-1}{4}\pi$

解答 (1) 0　(2) 0　(3) ∞　(4) ∞　(5) 振動する

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{3n^2+2}}{\sqrt{2n^3-1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}}{\sqrt{2-\frac{1}{n^3}}}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)-(n-1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt{3n^2+2}+\sqrt{3n^2-1})}{(3n^2+2)-(3n^2-1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt{3n^2+2}+\sqrt{3n^2-1})}{3}=\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2}\log_2\sqrt[n]{81}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2}\log_2 3^{\frac{4}{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2}\cdot\dfrac{4}{n}\log_2 3$

$=\lim_{n\to\infty}2n\log_2 3=\infty$

(5) $\left\{\tan\dfrac{2n-1}{4}\pi\right\}$: $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots\cdots$　振動する

28 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(1+2+3+\cdots\cdots+n)(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3)}{(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)^2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\{\log_3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)-\log_3 n^3\}$

解答 (1) $\dfrac{9}{8}$　(2) -1

解説

(1) $\dfrac{(1+2+3+\cdots\cdots+n)(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3)}{(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)^2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)\times\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}{\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}^2}=\dfrac{9n(n+1)}{2(2n+1)^2}$

よって　(与式) $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{9\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{9}{8}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\{\log_3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)-\log_3 n^3\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_3\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\log_3 n^3\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_3\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_3\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}=\log_3\dfrac{2}{6}=\log_3\dfrac{1}{3}=-1$

29 (1) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}$ を求めよ。

(2) $a_n=1+2+3+\cdots\cdots+n$ とするとき，

$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(a_1\times\dfrac{1}{a_2}\right)\times\left(a_3\times\dfrac{1}{a_4}\right)\times\cdots\cdots\times\left(a_{2m-1}\times\dfrac{1}{a_{2m}}\right)\right\}$ を求めよ。

解答 (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) 0

解説

(1) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n(n+1)(n+2)}{n^3}\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)=\dfrac{1}{3}$

参考　$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\dfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$

$=\dfrac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-0\cdot1\cdot2\}=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) $a_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ であるから，k を自然数とすると

$a_k\times\dfrac{1}{a_{k+1}}=\dfrac{k(k+1)}{2}\cdot\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{k}{k+2}$

よって

$\left(a_1\times\dfrac{1}{a_2}\right)\times\left(a_3\times\dfrac{1}{a_4}\right)\times\cdots\cdots\times\left(a_{2m-1}\times\dfrac{1}{a_{2m}}\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}\times\cdots\cdots\times\dfrac{2m-1}{2m+1}$

$=\dfrac{1}{2m+1}$

ゆえに　$\lim_{m\to\infty}\left\{\left(a_1\times\dfrac{1}{a_2}\right)\times\left(a_3\times\dfrac{1}{a_4}\right)\times\cdots\cdots\times\left(a_{2m-1}\times\dfrac{1}{a_{2m}}\right)\right\}=\lim_{m\to\infty}\dfrac{1}{2m+1}=0$

30 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $3\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$　(2) $(-2)^n-3^n$　(3) $\dfrac{3^n+2}{3^{n+2}+5}$　(4) $\dfrac{1-r^n}{1+r^n}$ $(r\neq-1)$

解答 (1) 0　(2) $-\infty$　(3) $\dfrac{1}{9}$

(4) $-1<r<1$ のとき 1；$r=1$ のとき 0；$r<-1$，$1<r$ のとき -1

解説

(1) $\left|-\dfrac{2}{5}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}3\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}=0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n-3^n\}=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2}{3^{n+2}+5}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{3^n}}{9+\frac{5}{3^n}}=\dfrac{1+0}{9+0}=\dfrac{1}{9}$

(4) $-1<r<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

$r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

$r<-1$，$1<r$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{r}\right)^n-1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+1}=\dfrac{0-1}{0+1}=-1$

31 第 n 項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $-2\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$　(2) $3\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$　(3) 5^n-3^n

(4) $\dfrac{4^{n+1}-1}{4^n+3}$　(5) $\dfrac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}$

解答 (1) $-\infty$　(2) 0　(3) ∞　(4) 4

(5) $-1<r<1$ のとき 0；$r=1$ のとき 0；$r=-1$ のとき振動する；

$r<-1$，$1<r$ のとき 1

解説

(1) $\dfrac{4}{3}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left\{-2\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}=-\infty$

(2) $\left|\dfrac{2}{5}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}3\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}(5^n-3^n)=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right\}=\infty$

(4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}-1}{4^n+3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4-\frac{1}{4^n}}{1+\frac{3}{4^n}}=\dfrac{4-0}{1+0}=4$

(5) [1]　$-1<r<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}=\dfrac{0-0}{0+1}=0$

[2]　$r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

[3]　$r=-1$ のとき

$\dfrac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}=\dfrac{(-1)^{2n}-(-1)^n}{(-1)^{2n}+1}=\dfrac{1-(-1)^n}{1+1}=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$

ゆえに，数列は　1，0，1，0，……

よって　振動する。

[4]　$r<-1,\ 1<r$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}-r^n}{r^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{1+\frac{1}{r^{2n}}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

32 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$3n+4$　(2)　$-n^2+100$　(3)　n^3+1　(4)　$\sqrt{2n}$

(5)　$(-1)^{n+1}$　(6)　$(-2)^n$　(7)　$(-1)^n n^2$

解答　(1)　正の無限大に発散　(2)　負の無限大に発散　(3)　正の無限大に発散
(4)　正の無限大に発散　(5)　振動して，極限はない
(6)　振動して，極限はない　(7)　振動して，極限はない

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}(3n+4)=\infty$

よって，正の無限大に発散する。

(2)　$\lim_{n\to\infty}(-n^2+100)=-\infty$

よって，負の無限大に発散する。

(3)　$\lim_{n\to\infty}(n^3+1)=\infty$

よって，正の無限大に発散する。

(4)　$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}=\infty$

よって，正の無限大に発散する。

(5)　$a_n=(-1)^{n+1}$ とおくと，数列 $\{a_n\}$ は交互に 1，-1 が現れ，n を限りなく大きくしても一定の値に近づかない。
よって，この数列は振動して，極限はない。

(6)　$a_n=(-2)^n$ とおく。数列 $\{a_n\}$ で n を限りなく大きくすると，絶対値は限りなく大きくなるが，符号は交互に正負になって一定しない。
よって，この数列は振動して，極限はない。

(7)　$a_n=(-1)^n n^2$ とおく。数列 $\{a_n\}$ で n を限りなく大きくすると，絶対値は限りなく大きくなるが，符号は交互に正負になって一定しない。
よって，この数列は振動して，極限はない。

33 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$\frac{2}{n^3}$　(2)　$\frac{1}{2-n^2}$　(3)　$\frac{(-1)^n}{n+1}$　(4)　$1+(-1)^n\frac{1}{n^2}$

(5)　$2n^2-1$　(6)　$4-\frac{n}{3}$　(7)　$\sqrt{2n-1}$　(8)　$1000-\sqrt{n}$

(9)　$\frac{n}{(-1)^n}$　(10)　$\sin n\pi$　(11)　$\cos n\pi$　(12)　$\tan n\pi$

解答　(1)　0 に収束　(2)　0 に収束　(3)　0 に収束　(4)　1 に収束
(5)　正の無限大に発散　(6)　負の無限大に発散　(7)　正の無限大に発散
(8)　負の無限大に発散　(9)　振動して，極限はない　(10)　0 に収束
(11)　振動して，極限はない　(12)　0 に収束

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}=0$

よって，0 に収束する。

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-n^2}=0$

よって，0 に収束する。

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0$

よって，0 に収束する。

(4)　$\lim_{n\to\infty}\left\{1+(-1)^n\frac{1}{n^2}\right\}=1$

よって，1 に収束する。

(5)　$\lim_{n\to\infty}(2n^2-1)=\infty$

よって，正の無限大に発散する。

(6)　$\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{n}{3}\right)=-\infty$

よって，負の無限大に発散する。

(7)　$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n-1}=\infty$

よって，正の無限大に発散する。

(8)　$\lim_{n\to\infty}(1000-\sqrt{n})=-\infty$

よって，負の無限大に発散する。

(9)　$a_n=\frac{n}{(-1)^n}$ とおく。数列 $\{a_n\}$ で n を限りなく大きくすると，絶対値は限りなく大きくなるが，符号は交互に正負になって一定しない。
よって，この数列は振動して，極限はない。

(10)　$\sin n\pi=0$ から　$\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0$

よって，0 に収束する。

(11)　$\cos n\pi=(-1)^n$
$a_n=(-1)^n$ とおくと，数列 $\{a_n\}$ は交互に -1，1 が現れ，n を限りなく大きくしても一定の値に近づかない。
よって，この数列は振動して，極限はない。

(12)　$\tan n\pi=0$ から　$\lim_{n\to\infty}\tan n\pi=0$

よって，0 に収束する。

34 次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+1}$　(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n^2-3}$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n^2+1}{3n^3+4n}$　(4)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n^2+1}$

解答　(1)　2　(2)　$\frac{3}{2}$　(3)　$\frac{4}{3}$　(4)　0

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2-0}{1+0}=2$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{2-\frac{3}{n^2}}=\frac{3+0}{2-0}=\frac{3}{2}$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-2n^2+1}{3n^3+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{4}{n^2}}=\frac{4-0+0}{3+0}=\frac{4}{3}$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0}=0$

35 次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n)$　(2)　$\lim_{n\to\infty}(-2n^3+5n)$　(3)　$\lim_{n\to\infty}(2n^3-3n^2+4)$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{5n+4}$　(5)　$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+3}{2n^2-2n+1}$　(6)　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n+1}{n+1}-3n\right)$

解答　(1)　∞　(2)　$-\infty$　(3)　∞　(4)　∞　(5)　$-\infty$　(6)　-2

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(3-\frac{2}{n}\right)=\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}(-2n^3+5n)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(-2+\frac{5}{n^2}\right)=-\infty$

(3)　$\lim_{n\to\infty}(2n^3-3n^2+4)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(2-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}\right)=\infty$

(4)　$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{5n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{5+\frac{4}{n}}=\infty$

(5)　$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3+3}{2n^2-2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=-\infty$

(6)　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n+1}{n+1}-3n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{-2+0}{1+0}=-2$

36 次の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}$　(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$　(3)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$

(4)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$　(5)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$　(6)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3n}-n}$

(7)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$　(8)　$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})$

解答　(1)　$\sqrt{2}$　(2)　2　(3)　0　(4)　0　(5)　∞　(6)　2　(7)　2　(8)　$\frac{3}{2}$

解説

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n}}=\sqrt{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{4}{1+1}=2$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{(n+2)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2}=\infty$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(n^2+3n)-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)=2$

(7) $\displaystyle\sqrt{n^2+4n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+4n}-n)(\sqrt{n^2+4n}+n)}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

$\displaystyle=\frac{(n^2+4n)-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}$

与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=\frac{4}{1+1}=2$

(8) $\displaystyle\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})=\frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{n+1}\{(n+2)-(n-1)\}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}=\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}$

与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$

37 次の極限を求めよ。ただし，θ は定数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}$

解答　(1) 0　(2) 0

解説

(1) $\displaystyle -1\leqq\cos\frac{n\pi}{4}\leqq 1$ であるから　$\displaystyle -\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0$

(2) $0\leqq\sin^2 n\theta\leqq 1$ であるから　$\displaystyle 0\leqq\frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}\leqq\frac{1}{n^2+1}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2 n\theta}{n^2+1}=0$

38 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n}}$

解答　(1) 2　(2) 1

解説

(1) $\displaystyle\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}$

$\displaystyle=\frac{\{(n+5)-(n+3)\}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\{(n+1)-n\}(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3})}=\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}$

よって　与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=\frac{2(1+1)}{1+1}=2$

(2) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1-0}=1$

39 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4+7+10+\cdots\cdots+(3n+1)}{5+8+11+\cdots\cdots+(3n+2)}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1)}{3+5+7+\cdots\cdots+(2n+1)}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

解答　(1) $\frac{1}{2}$　(2) 1　(3) 2　(4) $-\frac{1}{2}$

解説

(1) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+1)=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=\frac{1}{2}n(3n+5)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n=\frac{1}{2}n(3n+7)$

よって　与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{3n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{3+\frac{7}{n}}=1$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n(2n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n(n+2)$

よって　与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=2$

(4) 与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=-\frac{1}{2}$

40 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $\left(\frac{4}{3}\right)^n$　　(2) $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$　　(3) $\left(\frac{3}{4}\right)^n$

(4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^n$　　(5) $2\left(-\frac{5}{4}\right)^n$　　(6) $-3\left(-\frac{3}{5}\right)^n$

解答　(1) 正の無限大に発散　(2) 振動して，極限はない　(3) 0 に収束
(4) 0 に収束　(5) 振動して，極限はない　(6) 0 に収束

解説

(1) $\frac{4}{3}>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$

よって，正の無限大に発散する。

(2) $-\frac{3}{2}<-1$ であるから，この数列は振動して，極限はない。

(3) $\left|\frac{3}{4}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

よって，0 に収束する。

(4) $\left|-\frac{2}{5}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=0$

よって，0 に収束する。

(5) $-\frac{5}{4}<-1$ であるから，この数列は振動して，極限はない。

(6) $\left|-\frac{3}{5}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-3\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right\}=-3\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n=0$

よって，0 に収束する。

41 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-5}{2^n+3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-4}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}-1}{3^n+5}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-(-3)^{n+1}}{(-3)^n+2^n}$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(7^n-6^n)$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-3)^n-5^n\}$

解答　(1) 3　(2) 0　(3) ∞　(4) 3　(5) ∞　(6) $-\infty$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-5}{2^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{2^n}}{1+\frac{3}{2^n}}=\frac{3-0}{1+0}=3$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{4}{3^n}}=\frac{0}{1-0}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}-1}{3^n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{5}{3^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1+\frac{5}{3^n}}=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-(-3)^{n+1}}{(-3)^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{0+3}{1+0}=3$

(5) $\lim_{n\to\infty}(7^n-6^n)=\lim_{n\to\infty}7^n\left\{1-\left(\frac{6}{7}\right)^n\right\}=\infty$

(6) $\lim_{n\to\infty}\{(-3)^n-5^n\}=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{\left(-\frac{3}{5}\right)^n-1\right\}=-\infty$

42 次の数列の極限値をいえ。

(1) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, ……, $\frac{2n-1}{2n}$, ……

(2) 0.9, 0.99, 0.999, ……, $1-(0.1)^n$, ……

(3) 1, $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, ……, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, ……

(4) $\sin\pi$, $\sin 2\pi$, $\sin 3\pi$, ……, $\sin n\pi$, ……

解答　(1) 1　(2) 1　(3) 0　(4) 0

解説

(1) $\frac{2n-1}{2n}=1-\frac{1}{2n}$ で, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)=1$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(0.1)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\{1-(0.1)^n\}=1$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$

(4) n が自然数のとき, $\sin n\pi=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0$$

43 第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1) $3n-2$　(2) $-4n+9$　(3) n^3+1　(4) $2n(1-n)$

(5) $\frac{1}{\sqrt{n}}$　(6) $-\frac{3}{2^n}$　(7) $2-(-1)^n$　(8) $\cos n\pi$

解答　(1) ∞　(2) $-\infty$　(3) ∞　(4) $-\infty$　(5) 0　(6) 0

(7) 極限はない　(8) 極限はない

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}(3n-2)=\infty$ であるから, ∞ に発散。

(2) $\lim_{n\to\infty}(-4n+9)=-\infty$

よって, $-\infty$ に発散。

(3) $\lim_{n\to\infty}(n^3+1)=\infty$ であるから, ∞ に発散。

(4) $\lim_{n\to\infty}2n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(1-n)=-\infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}2n(1-n)=-\infty$$

よって, $-\infty$ に発散。

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ であるから, 0 に収束。

(6) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{2^n}\right)=0$ であるから, 0 に収束。

(7) $a_n=2-(-1)^n$ とおくと, $n\longrightarrow\infty$ のとき

$$a_{2n}\longrightarrow 1,\ a_{2n-1}\longrightarrow 3$$

よって, 振動するから, 極限はない。

(8) $\cos\pi=-1$, $\cos 2\pi=1$, $\cos 3\pi=-1$, …… であるから　$\cos n\pi=(-1)^n$

$a_n=(-1)^n$ とおくと, $n\longrightarrow\infty$ のとき

$$a_{2n}\longrightarrow 1,\ a_{2n-1}\longrightarrow -1$$

よって, 振動するから, 極限はない。

44 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)$　(2) $\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n^3)$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}$

解答　(1) ∞　(2) $-\infty$　(3) ∞

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n+1)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\infty$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{3}{n}-2\right)=-\infty$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}=\infty$

45 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{3n^2-n+1}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n^2+1}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n^3-6n+1}$　(5) $\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$

解答　(1) $\frac{5}{2}$　(2) $\frac{4}{3}$　(3) 0　(4) 0　(5) -1

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{5-0}{2+0}=\frac{5}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{3n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4-0}{3-0+0}=\frac{4}{3}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-7}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0-0}{1+0}=0$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n^3-6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6}{n^3-6n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{1-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{0+0+0}{1-0+0}=0$$

(5) $\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{-1}{1+0}=-1$$

46 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}$

解答　(1) $-\frac{1}{2}$　(2) 0

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2-2)}{1-2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2-2n-2}{1-2n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-2}$$

$$=\frac{1+0-0-0}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2(1-5n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^2-5n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}-5}=\frac{0+0-0}{0-5}=0$$

47 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n-1}}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+1}}$　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}$

解答　(1) $\frac{1}{2}$　(2) $2-\sqrt{2}$　(3) $\frac{3}{2}$

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=2-\sqrt{2}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+\sqrt{n^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}$

$$=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

48 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$　(2) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$　(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2+5}-\sqrt{2}\,n}$

解答　(1)　0　　(2)　0　　(3)　∞　　(4)　∞

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=0$

(2) $\displaystyle\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}=\frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$

$\displaystyle=\frac{(n^2+2)-(n^2-2)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$

$\displaystyle=\frac{4}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}$

よって　与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-2}}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{(n+2)-(n-1)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}}{3}=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2+5}-\sqrt{2}\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+5}+\sqrt{2}\,n}{(\sqrt{2n^2+5}-\sqrt{2}\,n)(\sqrt{2n^2+5}+\sqrt{2}\,n)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+5}+\sqrt{2}\,n}{(2n^2+5)-2n^2}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+5}+\sqrt{2}\,n}{5}=\infty$

49 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$

解答　(1)　0　　(2)　0

解説

(1) $\displaystyle-1\leqq\cos\frac{n\pi}{4}\leqq 1$ であるから

$\displaystyle-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0$

(2) $-1\leqq(-1)^n\leqq 1$ であるから

$\displaystyle-\frac{1}{n+1}\leqq\frac{(-1)^n}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0$

50 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}\sin^2\frac{n\pi}{6}$ を求めよ。

解答　0

解説

$\displaystyle 0\leqq\sin^2\frac{n\pi}{6}\leqq 1$ であるから

$\displaystyle 0\leqq\frac{1}{n^2+1}\sin^2\frac{n\pi}{6}\leqq\frac{1}{n^2+1}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}\sin^2\frac{n\pi}{6}=0$

51 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+2}-n)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}$

解答　(1)　1　　(2)　$\dfrac{3}{2}$　　(3)　$\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\sqrt{n^2+2}-n=\frac{(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n}$

$\displaystyle=\frac{(n^2+2)-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}=\frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+2}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}$

$\displaystyle=\frac{2}{1+1}=1$

(2) $\displaystyle\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}=\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\frac{(n+4)-(n+1)}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\frac{3}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

$\displaystyle=\frac{3\cdot 1}{1+1}=\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}$

$\displaystyle=\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}\times\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}}$

$\displaystyle=\frac{\{(n+5)-(n+2)\}(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{\{(n+3)-(n+1)\}(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2})}$

$\displaystyle=\frac{3(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{2(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2})}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1})}{2(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}$

$\displaystyle=\frac{3(1+1)}{2(1+1)}=\frac{3}{2}$

52 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{n-\frac{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)}{n+1}\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 5+2\cdot 8+3\cdot 11+\cdots\cdots+n(3n+2)}{2^2+4^2+6^2+\cdots\cdots+(2n)^2}$

解答　(1)　1　　(2)　$\dfrac{3}{4}$

解説

(1) 奇数の和の公式から

$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$

よって　与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n^2}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-n^2}{n+1}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

参考　$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$ は次のように計算してもよい。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$\displaystyle=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n^2$

(2) 分子$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}k(3k+2)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+2\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)$

分母$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

よって　与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)}{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2n+3)}{4(2n+1)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(2+\frac{3}{n}\right)}{4\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{4}$

53 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n-5}-n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+5+9+\cdots\cdots+(4n-3)}{3+5+7+\cdots\cdots+(2n+1)}$

解答　(1)　$\dfrac{2}{3}$　(2)　2

解説

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n-5}-n}=\dfrac{\sqrt{n^2+3n-5}+n}{(\sqrt{n^2+3n-5}-n)(\sqrt{n^2+3n-5}+n)}$

$=\dfrac{\sqrt{n^2+3n-5}+n}{(n^2+3n-5)-n^2}=\dfrac{\sqrt{n^2+3n-5}+n}{3n-5}$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n-5}-n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n-5}+n}{3n-5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}+1}{3-\dfrac{5}{n}}=\dfrac{1+1}{3}=\dfrac{2}{3}$

(2)　分子$=\sum\limits_{k=1}^{n}(4k-3)=4\sum\limits_{k=1}^{n}k-3\sum\limits_{k=1}^{n}1$

$=4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-3n=n(2n-1)$

分母$=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum\limits_{k=1}^{n}k+\sum\limits_{k=1}^{n}1$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+n=n(n+2)$

よって　与式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n-1)}{n(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=2$

54　第 n 項が次の式で表される数列の極限を調べよ。

(1)　$\left(\dfrac{6}{5}\right)^n$　(2)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　(3)　$\left(-\dfrac{5}{4}\right)^n$　(4)　$4\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

解答　(1)　∞　(2)　0　(3)　極限はない　(4)　0

解説

(1)　$\dfrac{6}{5}>1$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6}{5}\right)^n=\infty$

よって，∞ に発散する。

(2)　$\left|\dfrac{1}{3}\right|<1$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$

よって，0 に収束する。

(3)　$-\dfrac{5}{4}\leqq-1$ であるから，振動する。

すなわち，極限はない。

(4)　$\left|-\dfrac{3}{5}\right|<1$ であるから　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}=0$

ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{4\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=4\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}=0$

よって，0 に収束する。

55　次の無限等比数列の極限を調べよ。

(1)　2，4，8，16，……　(2)　1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$，$\dfrac{1}{27}$，……

(3)　4，-3，$\dfrac{9}{4}$，$-\dfrac{27}{16}$，……　(4)　$\sqrt{3}$，-3，$3\sqrt{3}$，-9，……

解答　(1)　∞　(2)　0　(3)　0　(4)　極限はない

解説

等比数列の公比を r とする。

(1)　$r=2$，$r>1$ であるから，∞ に発散する。

(2)　$r=\dfrac{1}{3}$，$|r|<1$ であるから，0 に収束する。

(3)　$r=-\dfrac{3}{4}$，$|r|<1$ であるから，0 に収束する。

(4)　$r=-\sqrt{3}$，$r\leqq-1$ であるから，振動する。

すなわち，極限はない。

56　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{3^n+2^n}$　(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-3^n}{4^n}$　(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{4^n+2^n}$

(4)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n}{4^n-(-3)^n}$　(5)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}$

(6)　$\lim\limits_{n\to\infty}(8^n-9^n)$　(7)　$\lim\limits_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}$

解答　(1)　-1　(2)　∞　(3)　∞　(4)　0　(5)　1　(6)　$-\infty$　(7)　∞

解説

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{3^n+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{0-1}{1+0}=-1$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-3^n}{4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^n-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}=\infty$

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{4^n+2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{5}{4}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=\infty$

(4)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n}{4^n-(-3)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n}=\dfrac{0}{1-0}=0$

(5)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+(-3)^n}{(-3)^n+2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{1+2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}=\dfrac{0+1}{1+0}=1$

(6)　$\lim\limits_{n\to\infty}(8^n-9^n)=\lim\limits_{n\to\infty}9^n\left\{\left(\dfrac{8}{9}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(7)　$\lim\limits_{n\to\infty}\{(-2)^n+2^{2n}\}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{2n}\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+1\right\}=\infty$

57　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot2^n+5}{2^n+3}$　(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}(5^n-3^n)$

解答　(1)　3　(2)　∞

解説

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot2^n+5}{2^n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{5}{2^n}}{1+\dfrac{3}{2^n}}=\dfrac{3+0}{1+0}=3$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}(5^n-3^n)=\lim\limits_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right\}=\infty$

58　次の極限を求めよ。

(1)　$S_n=2+4+6+\cdots\cdots+2n$ とおくとき　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots\cdots+n\cdot1}{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}$

解答　(1)　1　(2)　$\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$S_n=2+4+6+\cdots\cdots+2n=2\sum\limits_{k=1}^{n}k$

$=2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

したがって

$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{n(n+1)}$

$=\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

$=\dfrac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=1$

(2)　分子$=\sum\limits_{k=1}^{n}k(n-k+1)=(n+1)\sum\limits_{k=1}^{n}k-\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$

$=(n+1)\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

分母$=\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

よって　与式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$

59　次の極限を求めよ。

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}(n^3-2n^2-3n)$　(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+5}{3n^2-7n}$

解答　(1)　∞　　(2)　2

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3-2n^2-3n)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=\infty$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5}{3n^2-7n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{5}{n^2}}{3-\frac{7}{n}}=\frac{6+0}{3-0}=2$

60 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}$

解答　(1)　0　　(2)　0

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-(n-3)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}}=0$

(2)　$\displaystyle -1\leqq\cos\frac{n\pi}{3}\leqq 1$ であるから

$$-\frac{1}{n^2}\leqq\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\leqq\frac{1}{n^2}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}=0$$

61 次の極限を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2}{1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)}$

解答　(1)　2　　(2)　1

解説

(1)　$\displaystyle\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})}$

$\displaystyle=\frac{\{(n+4)-(n+2)\}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\{(n+1)-n\}(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})}$

$\displaystyle=\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}$

であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=2$

(2)　分母は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$\displaystyle=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって　与式$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=1$