2次関数の最大最小クイズ(文字)

1 a は正の定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=x^2-4x+1\quad(0\leqq x\leqq a)$$

解答　$0<a<2$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1
　　　$2\leqq a$ のとき　　$x=2$ で最小値 -3

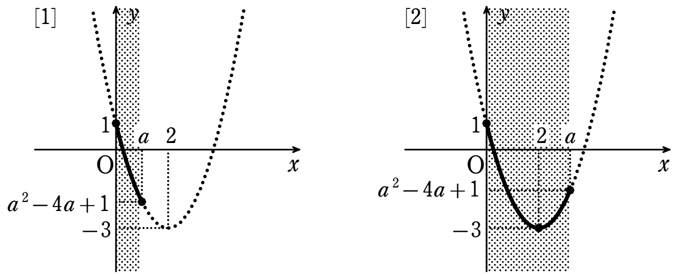
解説

この関数の式を変形すると　$y=(x-2)^2-3\quad(0\leqq x\leqq a)$

[1]　$0<a<2$ のとき
　この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
　よって，$x=a$ で最小値 a^2-4a+1 をとる。

[2]　$2\leqq a$ のとき
　この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
　よって，$x=2$ で最小値 -3 をとる。

答　$0<a<2$ のとき　　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1
　　$2\leqq a$ のとき　　　$x=2$ で最小値 -3



2 a は正の定数とする。関数 $y=-x^2+2x+1\ (0\leqq x\leqq a)$ の最大値を求めよ。

解答　$0<a<1$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+2a+1$
　　　$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 2

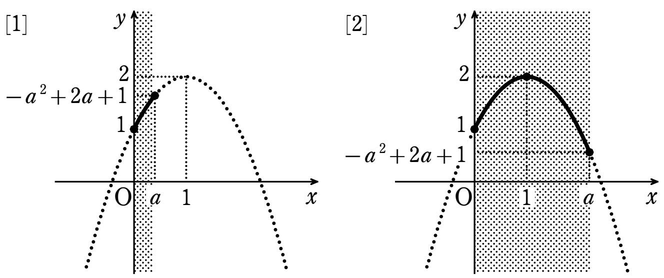
解説

関数の式を変形すると　$y=-(x-1)^2+2\quad(0\leqq x\leqq a)$

[1]　$0<a<1$ のとき
　この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
　よって，$x=a$ で最大値 $-a^2+2a+1$ をとる。

[2]　$1\leqq a$ のとき
　この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
　よって，$x=1$ で最大値 2 をとる。

答　$0<a<1$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+2a+1$
　　$1\leqq a$ のとき　　$x=1$ で最大値 2



3 a は正の定数とする。関数 $y=x^2-4x+1\quad(0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　定義域の両端 $x=0$，$x=a$ における y の値が一致するときの，定数 a の値を求めよ。

(2)　この関数の最大値を求めよ。

解答　(1)　$a=4$
　　　(2)　$0<a<4$ のとき　$x=0$ で最大値 1
　　　　　$a=4$ のとき　$x=0$，4 で最大値 1
　　　　　$4<a$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1

解説

(1)　$1=a^2-4a+1$ から　$a(a-4)=0$
　$a>0$ であるから　$a=4$
　別解　放物線は軸に関して対称であるから，定義域の中央の値が 2 になるとき，定義域の両端における y の値が一致する。よって　$a=4$

(2)　$0<a<4$ のとき　$x=0$ で最大値 1
　　$a=4$ のとき　$x=0$，4 で最大値 1
　　$4<a$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1

4 a は定数とする。次の関数の最小値を求めよ。

$$y=x^2-2ax+a^2+1\quad(0\leqq x\leqq 2)$$

解答　$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 a^2+1
　　　$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 1
　　　$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 a^2-4a+5

解説

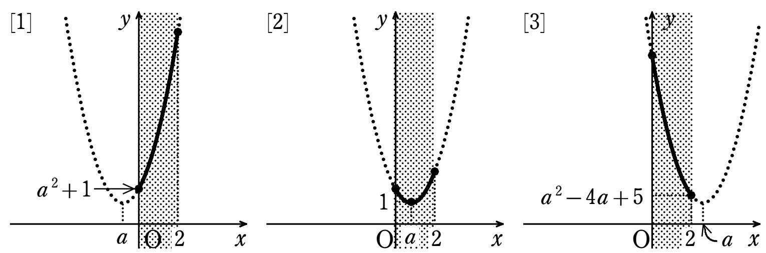
この関数の式を変形すると　$y=(x-a)^2+1\quad(0\leqq x\leqq 2)$

[1]　$a<0$ のとき
　この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
　よって，$x=0$ で最小値 a^2+1 をとる。

[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき
　この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
　よって，$x=a$ で最小値 1 をとる。

[3]　$2<a$ のとき
　この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
　よって，$x=2$ で最小値 a^2-4a+5 をとる。

答　$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 a^2+1
　　$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 1
　　$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 a^2-4a+5



5 a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax+2a^2\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最小値を求めよ。

解答　$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 $2a^2$
　　　$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$x=a$ で最小値 0
　　　$1<a$ のとき　　$x=1$ で最小値 $2a^2-4a+2$

解説

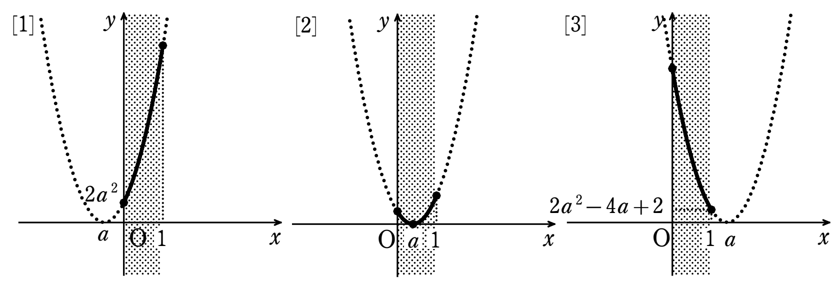
この関数の式を変形すると　$y=2(x-a)^2\ (0\leqq x\leqq 1)$

[1]　$a<0$ のとき
　この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
　よって，$x=0$ で最小値 $2a^2$ をとる。

[2]　$0\leqq a\leqq 1$ のとき
　この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
　よって，$x=a$ で最小値 0 をとる。

[3]　$1<a$ のとき
　この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
　よって，$x=1$ で最小値 $2a^2-4a+2$ をとる。

答　$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 $2a^2$
　　$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$x=a$ で最小値 0
　　$1<a$ のとき　　$x=1$ で最小値 $2a^2-4a+2$



6 a は定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=x^2-2ax+a^2+1\quad(0\leqq x\leqq 2)$$

解答　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 a^2-4a+5
　　　$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 2
　　　$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 a^2+1

解説

定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の中央の値は 1 である。
放物線は軸に関して対称であるから，$a=1$ のとき，定義域の両端における y の値が一致する。
よって，この関数の最大値は次のようになる。

　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 a^2-4a+5
　$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 2
　$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 a^2+1

$\boxed{7}$ a は定数とする。次の関数の最大値を求めよ。

$$y=-x^2+4x \quad (a \leqq x \leqq a+2)$$

解答 $a<0$ のとき　$x=a+2$ で最大値 $-a^2+4$
$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=2$ で最大値 4
$2<a$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$

解説

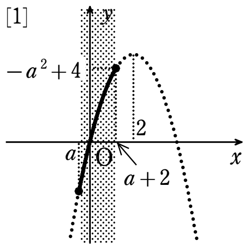
この関数の式を変形すると　$y=-(x-2)^2+4 \quad (a \leqq x \leqq a+2)$

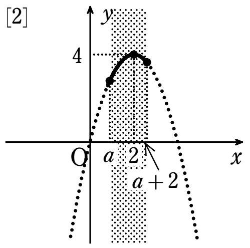
[1]　$a+2<2$ すなわち $a<0$ のとき
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，$x=a+2$ で最大値 $-a^2+4$ をとる。

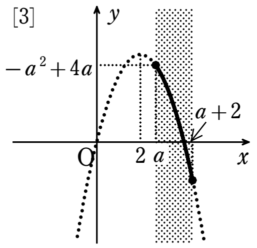
[2]　$a \leqq 2 \leqq a+2$ すなわち $0 \leqq a \leqq 2$ のとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，$x=2$ で最大値 4 をとる。

[3]　$2<a$ のとき
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$ をとる。

答　$a<0$ のとき　$x=a+2$ で最大値 $-a^2+4$
$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=2$ で最大値 4
$2<a$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$

[1]


[2]


[3]


$\boxed{8}$ 関数 $y=-x^2+2ax+1$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。ただし，a は定数とする。

(1)　最大値を求めよ。
(2)　最小値を求めよ。

解答 (1)　$a<0$ のとき　$x=0$ で最大値 1
$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2+1
$2<a$ のとき　$x=2$ で最大値 $4a-3$

(2)　$a<1$ のとき　$x=2$ で最小値 $4a-3$
$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最小値 1
$1<a$ のとき　$x=0$ で最小値 1

解説

この関数の式を変形すると

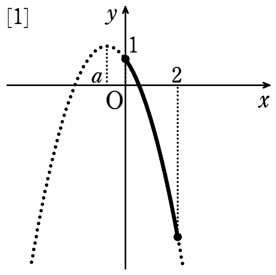
$$y=-(x-a)^2+a^2+1 \quad (0 \leqq x \leqq 2)$$

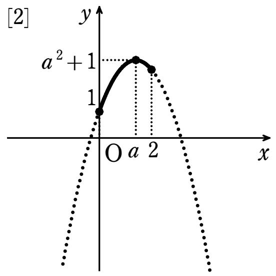
(1)　[1]　$a<0$ のとき
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，$x=0$ で最大値 1 をとる。

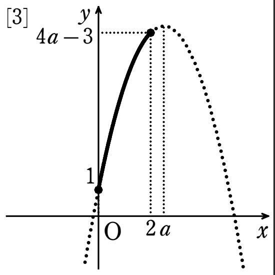
[2]　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，$x=a$ で最大値 a^2+1 をとる。

[3]　$2<a$ のとき
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，$x=2$ で最大値 $4a-3$ をとる。

答　$a<0$ のとき　$x=0$ で最大値 1
$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2+1
$2<a$ のとき　$x=2$ で最大値 $4a-3$

[1]


[2]


[3]


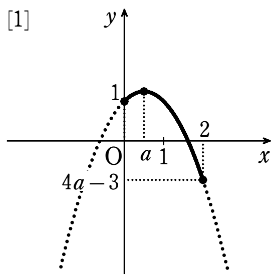
(2)　定義域の中央の値は　1

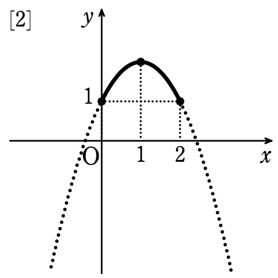
[1]　$a<1$ のとき
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，$x=2$ で最小値 $4a-3$ をとる。

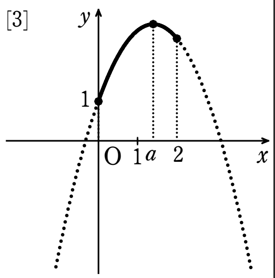
[2]　$a=1$ のとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，$x=0$，2 で最小値 1 をとる。

[3]　$1<a$ のとき
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，$x=0$ で最小値 1 をとる。

答　$a<1$ のとき　$x=2$ で最小値 $4a-3$
$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最小値 1
$1<a$ のとき　$x=0$ で最小値 1

[1]


[2]


[3]


$\boxed{9}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-2x$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

解答 (1)　$a<0$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2-1
$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小値 -1
$1<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a

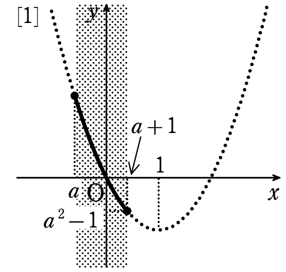
(2)　$a<\frac{1}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a
$a=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-1

解説

この関数の式を変形すると　$y=(x-1)^2-1 \quad (a \leqq x \leqq a+1)$

また　$x=a$ のとき $y=a^2-2a$，　$x=a+1$ のとき $y=a^2-1$，
$x=1$ のとき　$y=-1$

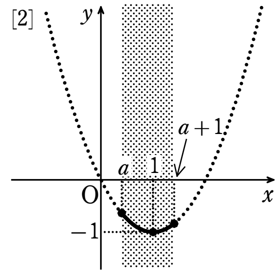
(1)　[1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，$x=a+1$ で最小値 a^2-1 をとる。

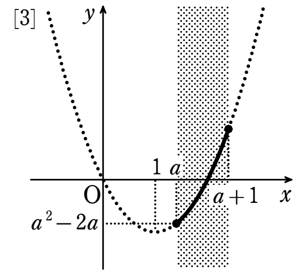
[1]


[2]　$a \leqq 1 \leqq a+1$ すなわち $0 \leqq a \leqq 1$ のとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，$x=1$ で最小値 -1 をとる。

[3]　$1<a$ のとき
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，$x=a$ で最小値 a^2-2a をとる。

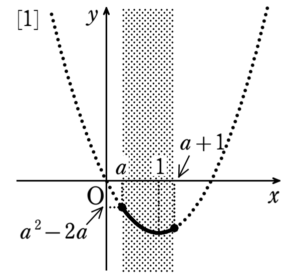
答　$a<0$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2-1
$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小値 -1
$1<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a

[2]


[3]


(2)　定義域の中央の値は　$a+\frac{1}{2}$

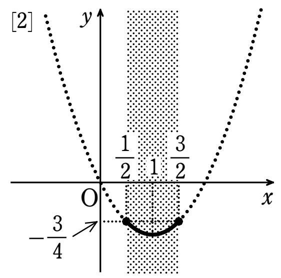
[1]　$a+\frac{1}{2}<1$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，$x=a$ で最大値 a^2-2a をとる。

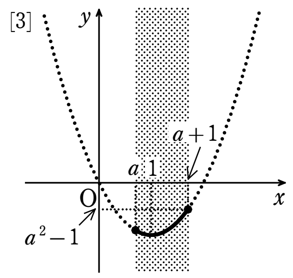
[1]


[2]　$a+\frac{1}{2}=1$ すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$ をとる。

[3]　$1<a+\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2}<a$ のとき
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，$x=a+1$ で最大値 a^2-1 をとる。

答　$a<\frac{1}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a
$a=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $-\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-1

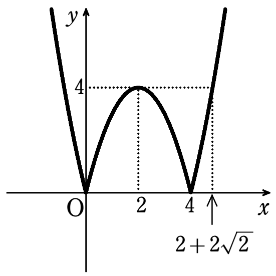




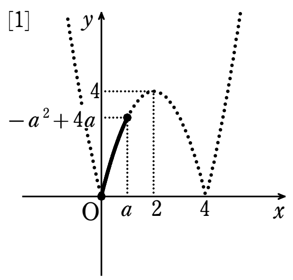
$\boxed{10}$ a は正の定数とする。関数 $y=|x^2-4x|$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最大値を求めよ。

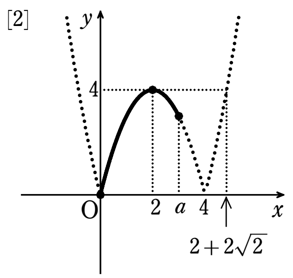
解答 $0<a<2$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$
$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$ のとき　$x=2$ で最大値 4
$a=2+2\sqrt{2}$ のとき　$x=2,\ 2+2\sqrt{2}$ で最大値 4
$2+2\sqrt{2}<a$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a

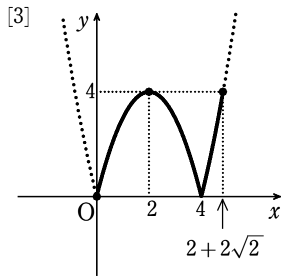
解説
$x^2-4x\geqq 0$ すなわち $x\leqq 0$ または $4\leqq x$ のとき　$|x^2-4x|=x^2-4x$
$x^2-4x<0$ すなわち $0<x<4$ のとき　$|x^2-4x|=-x^2+4x$
また，$x^2-4x=4$ を解くと　$x=2\pm 2\sqrt{2}$
以上から，$y=|x^2-4x|$ のグラフは図のようになる。

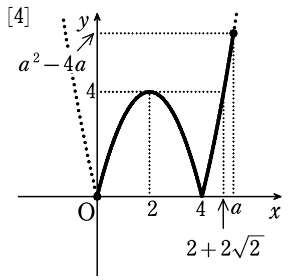


[1]　$0<a<2$ のとき
この関数のグラフは図[1]の実線部分である。
よって，$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$ をとる。
[2]　$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$ のとき
この関数のグラフは図[2]の実線部分である。
よって，$x=2$ で最大値 4 をとる。
[3]　$a=2+2\sqrt{2}$ のとき
この関数のグラフは図[3]の実線部分である。
よって，$x=2,\ 2+2\sqrt{2}$ で最大値 4 をとる。
[4]　$2+2\sqrt{2}<a$ のとき
この関数のグラフは図[4]の実線部分である。
よって，$x=a$ で最大値 a^2-4a をとる。
答　$0<a<2$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+4a$
$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$ のとき　$x=2$ で最大値 4
$a=2+2\sqrt{2}$ のとき　$x=2,\ 2+2\sqrt{2}$ で最大値 4
$2+2\sqrt{2}<a$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a



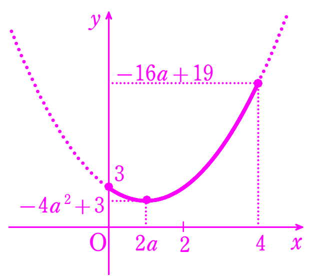




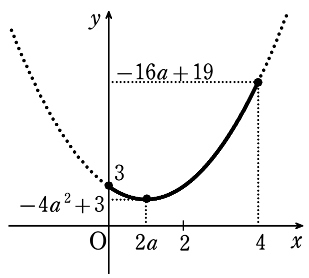


$\boxed{11}$ 関数 $y=x^2-4ax+3$ $(0\leqq x\leqq 4)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。ただし，a は定数で，$0<a<1$ とする。[20 点]

解答　$y=x^2-4ax+3=(x-2a)^2-4a^2+3$
$0<a<1$ であるから　　$0<2a<2$
グラフは右の図の実線の部分のようになる。
よって，$x=4$　で最大値 $-16a+19$
$x=2a$ で最小値 $-4a^2+3$



解説
$y=x^2-4ax+3=(x-2a)^2-4a^2+3$
$0<a<1$ であるから　　$0<2a<2$
グラフは右の図の実線の部分のようになる。
よって，$x=4$　で最大値 $-16a+19$
$x=2a$ で最小値 $-4a^2+3$

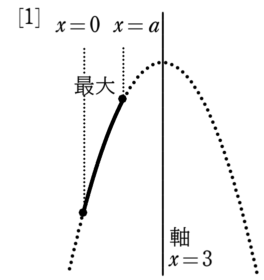


$\boxed{12}$ a は正の定数とする。$0\leqq x\leqq a$ における関数 $f(x)=-x^2+6x$ について，次の問いに答えよ。
(1)　最大値を求めよ。　　　(2)　最小値を求めよ。

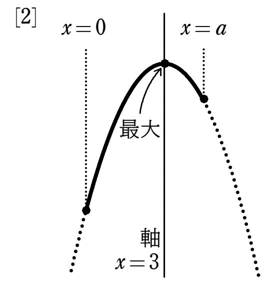
解答　(1)　$0<a<3$ のとき $x=a$ で最大値 $-a^2+6a$，$a\geqq 3$ のとき $x=3$ で最大値 9
(2)　$0<a<6$ のとき $x=0$ で最小値 0；$a=6$ のとき $x=0,\ 6$ で最小値 0；
$a>6$ のとき $x=a$ で最小値 $-a^2+6a$

解説
$f(x)=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$
$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=3$

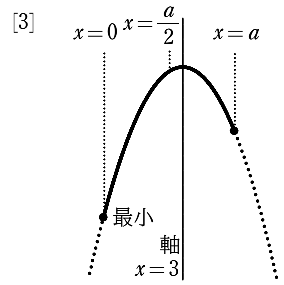
(1)　軸 $x=3$ が $0\leqq x\leqq a$ の範囲に含まれるかどうかを考える。
[1]　$0<a<3$ のとき
右のグラフから，$x=a$ で最大値 $f(a)=-a^2+6a$ をとる。



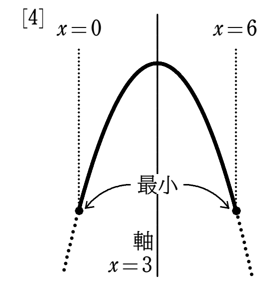
[2]　$a\geqq 3$ のとき
右のグラフから，$x=3$ で最大値 $f(3)=9$ をとる。
[1]，[2] から
$0<a<3$ のとき $x=a$ で最大値 $-a^2+6a$，
$a\geqq 3$ のとき $x=3$ で最大値 9



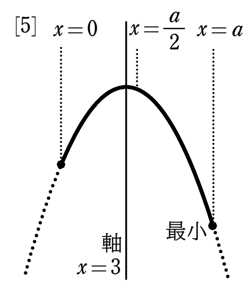
(2)　区間 $0\leqq x\leqq a$ の中央の値は $\frac{a}{2}$ である。
[3]　$0<\frac{a}{2}<3$　すなわち　$0<a<6$ のとき
右のグラフから，$x=0$ で最小値 $f(0)=0$ をとる。



[4]　$\frac{a}{2}=3$　すなわち　$a=6$ のとき
右のグラフから，$x=0,\ 6$ で最小値 $f(0)=f(6)=0$ をとる。



[5]　$3<\frac{a}{2}$　すなわち　$a>6$ のとき
右のグラフから，$x=a$ で最小値
$f(a)=-a^2+6a$ をとる。
[3]〜[5] から
$0<a<6$ のとき $x=0$ で最小値 0；
$a=6$ のとき $x=0,\ 6$ で最小値 0；
$a>6$ のとき $x=a$ で最小値 $-a^2+6a$



$\boxed{13}$ a は定数とする。$0\leqq x\leqq 2$ における関数 $f(x)=x^2-2ax-4a$ について
(1)　最大値を求めよ。　　　(2)　最小値を求めよ。

解答　(1)　$a<1$ のとき $x=2$ で最大値 $-8a+4$；
$a=1$ のとき $x=0,\ 2$ で最大値 -4；$a>1$ のとき $x=0$ で最大値 $-4a$
(2)　$a<0$ のとき $x=0$ で最小値 $-4a$；

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき $x=a$ で最小値 $-a^2-4a$；
$a>2$ のとき $x=2$ で最小値 $-8a+4$

(解説)

$f(x)=x^2-2ax-4a=(x-a)^2-a^2-4a$

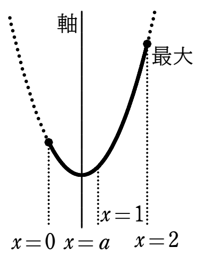
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$

(1)　区間 $0 \leqq x \leqq 2$ の中央の値は　1

[1]　$a<1$ のとき

右のグラフから，$x=2$ で最大となる。最大値は

$f(2)=2^2-2a\cdot 2-4a=-8a+4$

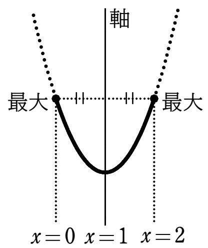


[2]　$a=1$ のとき

右のグラフから，$x=0$，2 で最大となる。

最大値は

$f(0)=f(2)=-4$

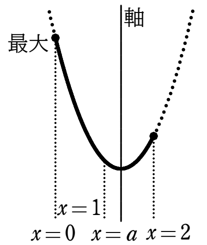


[3]　$a>1$ のとき

右のグラフから，$x=0$ で最大となる。最大値は

$f(0)=-4a$

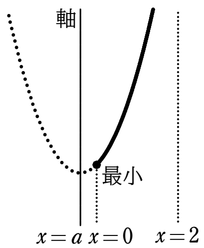
以上から $\begin{cases} a<1 \text{ のとき } x=2 \text{ で最大値 } -8a+4 \\ a=1 \text{ のとき } x=0,\ 2 \text{ で最大値 } -4 \\ a>1 \text{ のとき } x=0 \text{ で最大値 } -4a \end{cases}$



(2)　[4]　軸 $x=a$ が $x<0$ の範囲にあるとき，すなわち，$a<0$ のとき

右のグラフから，$x=0$ で最小となる。最小値は

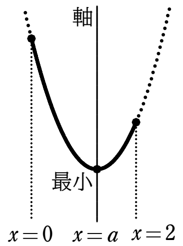
$f(0)=-4a$



[5]　軸 $x=a$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲にあるとき，すなわち，$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

右のグラフから，$x=a$ で最小となる。最小値は

$f(a)=-a^2-4a$

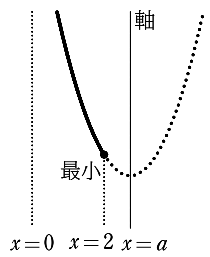


[6]　軸 $x=a$ が $2<x$ の範囲にあるとき，すなわち，$a>2$ のとき

右のグラフから，$x=2$ で最小となる。最小値は

$f(2)=-8a+4$

以上から $\begin{cases} a<0 \text{ のとき}\quad x=0 \text{ で最小値 } -4a \\ 0\leqq a\leqq 2 \text{ のとき } x=a \text{ で最小値 } -a^2-4a \\ a>2 \text{ のとき}\quad x=2 \text{ で最小値 } -8a+4 \end{cases}$



$\boxed{14}$ a は定数とする。$0 \leqq x \leqq 4$ における関数 $f(x)=3x^2-6ax+5$ について

(1)　最大値を求めよ。　　　(2)　最小値を求めよ。

解答　(1)　$a<2$ のとき $x=4$ で最大値 $-24a+53$；
$a=2$ のとき $x=0$，4 で最大値 5；
$a>2$ のとき $x=0$ で最大値 5

(2)　$a<0$ のとき $x=0$ で最小値 5,
$0 \leqq a \leqq 4$ のとき $x=a$ で最小値 $-3a^2+5$,
$a>4$ のとき $x=4$ で最小値 $-24a+53$

(解説)

$f(x)=3x^2-6ax+5=3(x-a)^2-3a^2+5$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$

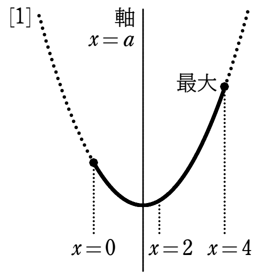
(1)　区間の中央の値は　2

[1]　$a<2$ のとき

右のグラフから，$x=4$ で最大となる。

最大値は

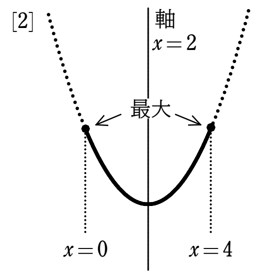
$f(4)=3\cdot 4^2-6a\cdot 4+5$
$\quad =-24a+53$



[2]　$a=2$ のとき

右のグラフから，$x=0$，4 で最大となる。

最大値は　$f(0)=f(4)=5$



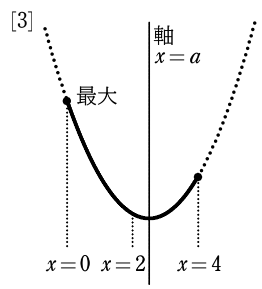
[3]　$a>2$ のとき

右のグラフから，$x=0$ で最大となる。

最大値は　$f(0)=5$

以上から

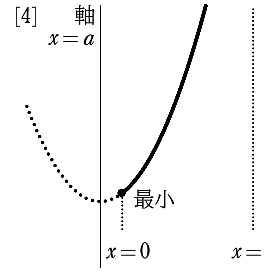
$\begin{cases} a<2 \text{ のとき} \\ \quad x=4 \text{ で最大値 } -24a+53\text{；} \\ a=2 \text{ のとき} \\ \quad x=0,\ 4 \text{ で最大値 } 5\text{；} \\ a>2 \text{ のとき} \\ \quad x=0 \text{ で最大値 } 5 \end{cases}$



(2)　[4]　$a<0$ のとき

右のグラフから，$x=0$ で最小となる。

最小値は　$f(0)=5$



[5]　$0 \leqq a \leqq 4$ のとき

右のグラフから，$x=a$ で最小となる。

最小値は　$f(a)=-3a^2+5$

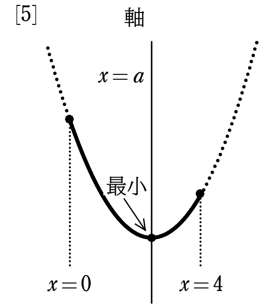
[6]　$a>4$ のとき

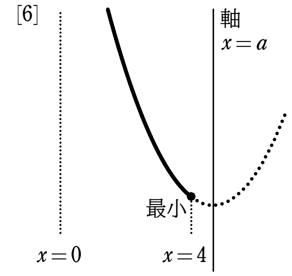
右下のグラフから，$x=4$ で最小となる。

最小値は　$f(4)=-24a+53$

以上から

$\begin{cases} a<0 \text{ のとき}\quad x=0 \text{ で最小値 } 5, \\ 0\leqq a\leqq 4 \text{ のとき}\quad x=a \text{ で最小値 } -3a^2+5, \\ a>4 \text{ のとき}\quad x=4 \text{ で最小値 } -24a+53 \end{cases}$





$\boxed{15}$ a は定数とする。$a \leqq x \leqq a+2$ における関数 $f(x)=x^2-2x+2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最大値を求めよ。　　　(2)　最小値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき $x=a$ で最大値 a^2-2a+2；$a=0$ のとき $x=0$，2 で最大値 2；
$a>0$ のとき $x=a+2$ で最大値 a^2+2a+2

(2)　$a<-1$ のとき $x=a+2$ で最小値 a^2+2a+2；
$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき $x=1$ で最小値 1；$a>1$ のとき $x=a$ で最小値 a^2-2a+2

(解説)

$f(x)=x^2-2x+2$
$\quad =(x-1)^2+1$

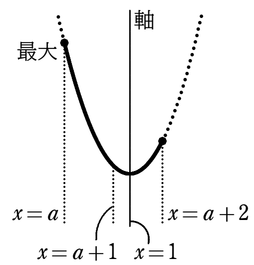
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は　直線 $x=1$

(1)　区間 $a \leqq x \leqq a+2$ の中央の値は　$a+1$

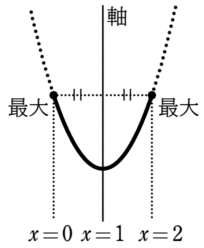
[1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

右のグラフから，$x=a$ で最大となる。

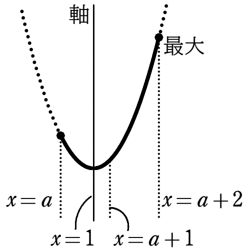
最大値は　$f(a)=a^2-2a+2$



[2]　$a+1=1$ すなわち $a=0$ のとき
右のグラフから，$x=0$，2 で最大となる。
最大値は　$f(0)=f(2)=2$



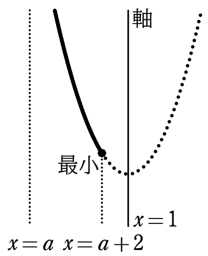
[3]　$a+1>1$ すなわち $a>0$ のとき
右のグラフから，$x=a+2$ で最大となる。
最大値は　$f(a+2)=(a+2)^2-2(a+2)+2$
$\qquad\qquad\qquad\quad =a^2+2a+2$



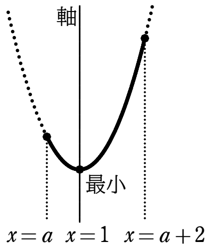
以上から

$$\begin{cases} a<0 \text{ のとき } x=a \text{ で最大値 } a^2-2a+2 \\ a=0 \text{ のとき } x=0,\ 2 \text{ で最大値 } 2 \\ a>0 \text{ のとき } x=a+2 \text{ で最大値 } a^2+2a+2 \end{cases}$$

(2)　[4]　$a+2<1$ すなわち $a<-1$ のとき
右のグラフから，$x=a+2$ で最小となる。
最小値は　$f(a+2)=a^2+2a+2$

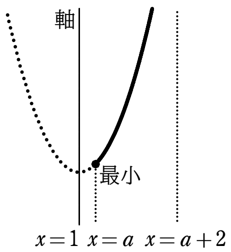


[5]　$a\leqq 1\leqq a+2$ すなわち $-1\leqq a\leqq 1$ のとき
右のグラフから，$x=1$ で最小となる。
最小値は　$f(1)=1$



[6]　$1<a$ すなわち $a>1$ のとき
右のグラフから，$x=a$ で最小となる。
最小値は　$f(a)=a^2-2a+2$
以上から

$$\begin{cases} a<-1 \text{ のとき } x=a+2 \text{ で最小値 } a^2+2a+2 \\ -1\leqq a\leqq 1 \text{ のとき } x=1 \text{ で最小値 } 1 \\ a>1 \text{ のとき } x=a \text{ で最小値 } a^2-2a+2 \end{cases}$$



16　a は定数とする。$a\leqq x\leqq a+1$ における関数 $f(x)=x^2-10x+a$ について，次の問いに答えよ。
(1)　最大値を求めよ。　　　　(2)　最小値を求めよ。

解答　(1)　$a<\dfrac{9}{2}$ のとき $x=a$ で最大値 a^2-9a；
$a=\dfrac{9}{2}$ のとき $x=\dfrac{9}{2}$，$\dfrac{11}{2}$ で最大値 $-\dfrac{81}{4}$；
$a>\dfrac{9}{2}$ のとき $x=a+1$ で最大値 a^2-7a-9
(2)　$a<4$ のとき $x=a+1$ で最小値 a^2-7a-9，
$4\leqq a\leqq 5$ のとき $x=5$ で最小値 $a-25$，
$a>5$ のとき $x=a$ で最小値 a^2-9a

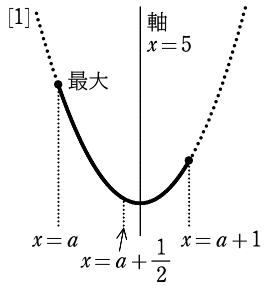
解説

$$f(x)=x^2-10x+a=(x-5)^2+a-25$$

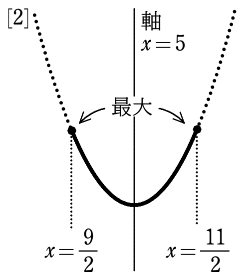
$y=f(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は直線 $x=5$

(1)　区間 $a\leqq x\leqq a+1$ の中央の値は　$a+\dfrac{1}{2}$

[1]　$a+\dfrac{1}{2}<5$　すなわち　$a<\dfrac{9}{2}$ のとき
右のグラフから，$x=a$ で最大となる。
最大値は　$f(a)=a^2-9a$

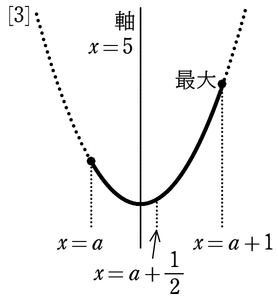


[2]　$a+\dfrac{1}{2}=5$　すなわち　$a=\dfrac{9}{2}$ のとき
右のグラフから，$x=\dfrac{9}{2}$，$\dfrac{11}{2}$ のとき最大となる。
最大値は　$f\left(\dfrac{9}{2}\right)=f\left(\dfrac{11}{2}\right)=-\dfrac{81}{4}$

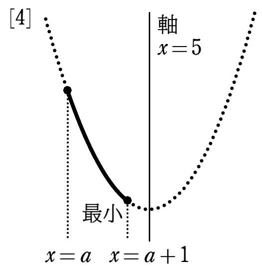


[3]　$a+\dfrac{1}{2}>5$　すなわち　$a>\dfrac{9}{2}$ のとき
右のグラフから，$x=a+1$ で最大となる。
最大値は　$f(a+1)=(a+1)^2-10(a+1)+a$
$\qquad\qquad\qquad\quad =a^2-7a-9$
以上から

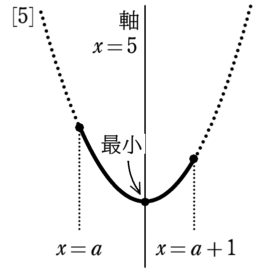
$$\begin{cases} a<\dfrac{9}{2} \text{ のとき}\quad x=a \text{ で最大値 } a^2-9a\text{；} \\ a=\dfrac{9}{2} \text{ のとき}\quad x=\dfrac{9}{2},\ \dfrac{11}{2} \text{ で最大値 } -\dfrac{81}{4}\text{；} \\ a>\dfrac{9}{2} \text{ のとき}\quad x=a+1 \text{ で最大値 } a^2-7a-9 \end{cases}$$



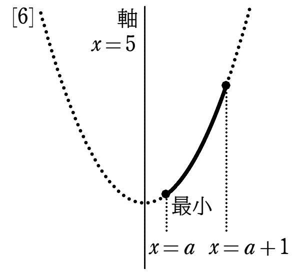
(2)　[4]　$a+1<5$　すなわち　$a<4$ のとき
右のグラフから，$x=a+1$ で最小となる。
最小値は　$f(a+1)=a^2-7a-9$



[5]　$a\leqq 5\leqq a+1$　すなわち　$4\leqq a\leqq 5$ のとき
右のグラフから，$x=5$ で最小となる。
最小値は　$f(5)=a-25$



[6]　$5<a$　すなわち　$a>5$ のとき
右のグラフから，$x=a$ で最小となる。
最小値は　$f(a)=a^2-9a$



以上から

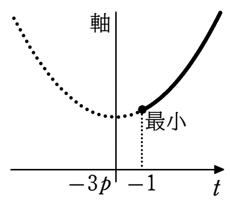
$$\begin{cases} a<4 \text{ のとき}\quad x=a+1 \text{ で最小値 } a^2-7a-9, \\ 4\leqq a\leqq 5 \text{ のとき}\quad x=5 \text{ で最小値 } a-25, \\ a>5 \text{ のとき}\quad x=a \text{ で最小値 } a^2-9a \end{cases}$$

17　p を定数とする。関数 $y=(x^2-2x)^2+6p(x^2-2x)+3p+1$ の最小値を m とする。
(1)　最小値 m を p の式で表せ。　　　　(2)　m の最大値を求めよ。

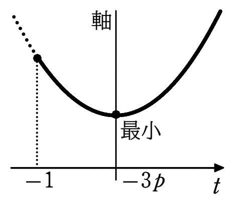
解答　(1)　$p<\dfrac{1}{3}$ のとき $m=-9p^2+3p+1$，$p\geqq\dfrac{1}{3}$ のとき $m=-3p+2$
(2)　$p=\dfrac{1}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$

解説
(1)　$t=x^2-2x$ とおくと　　$t=(x-1)^2-1$
t のとりうる値の範囲は　　$t\geqq -1$
また　　$y=(x^2-2x)^2+6p(x^2-2x)+3p+1$
$\qquad\qquad =t^2+6pt+3p+1$
$\qquad\qquad =(t+3p)^2-9p^2+3p+1$
ゆえに，$y=t^2+6pt+3p+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $t=-3p$ である。

[1]　$-3p\leqq -1$　すなわち　$p\geqq\dfrac{1}{3}$ のとき
y は $t=-1$ で最小値をとる。
よって　　$m=(-1)^2+6p\cdot(-1)+3p+1$
$\qquad\qquad\quad =-3p+2$

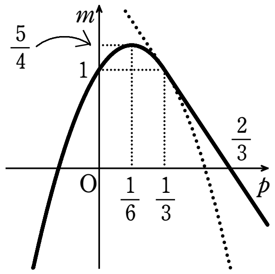


[2]　$-3p>-1$　すなわち　$p<\dfrac{1}{3}$ のとき
y は $t=-3p$ で最小値をとる。
よって　　$m=-9p^2+3p+1$



[1]，[2] から　　$m=\begin{cases} -9p^2+3p+1 & \left(p<\dfrac{1}{3}\right) \\ -3p+2 & \left(p\geqq\dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$

(2) $p<\frac{1}{3}$ のとき



$$m=-9p^2+3p+1=-9\left(p-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{4}$$

よって，p の関数 m のグラフは，右の図のようになるから，m は $p=\frac{1}{6}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。

$\boxed{18}$ a は実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\frac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

解答 $a\geqq -4$ のとき最小値 $-2a$，$a<-4$ のとき最小値 $\frac{a^2}{4}+4$

解説

$x\geqq 2$ のとき

$$f(x)=x^2-a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2a \quad \cdots\cdots ①$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}\geqq 2$ すなわち $a\geqq 4$ のとき，軸は $x\geqq 2$ の範囲にあり，

$\frac{a}{2}<2$ すなわち $a<4$ のとき，軸は $x\geqq 2$ の範囲にない。

$x\leqq 2$ のとき

$$f(x)=x^2+a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-2a \quad \cdots\cdots ②$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-\frac{a}{2}$

$-\frac{a}{2}\leqq 2$ すなわち $a\geqq -4$ のとき，軸は $x\leqq 2$ の範囲にあり，

$-\frac{a}{2}>2$ すなわち $a<-4$ のとき，軸は $x\leqq 2$ の範囲にない。

ここで，① と ② の軸の位置に応じ，次の 3 つの場合を考える。

[1] $a\geqq 4$　　[2] $-4\leqq a<4$　　[3] $a<-4$

[1] $a\geqq 4$ のとき

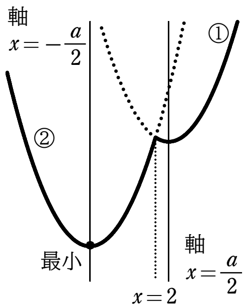
① の軸は $x\geqq 2$ の範囲，② の軸は $x\leqq 2$ の範囲にある。

①，② は軸のところで最小となる。

また，頂点の y 座標について $a\geqq 4$ では

$$2a>-2a$$

よって，$f(x)$ は $x=-\frac{a}{2}$ で最小値 $-2a$ をとる。



[2] $-4\leqq a<4$ のとき

① の軸は $x<2$ の範囲，② の軸は $x\leqq 2$ の範囲にある。

したがって，① は $x=2$ で最小値 $\frac{a^2}{4}+4$ をとり，

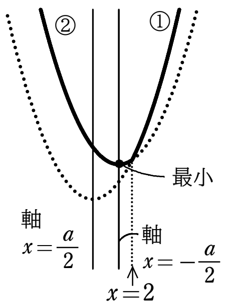
② は $x=-\frac{a}{2}$ で最小値 $-2a$ をとる。

それぞれの最小値を比較すると

$$\frac{a^2}{4}+4-(-2a)=\frac{a^2+8a+16}{4}=\frac{(a+4)^2}{4}$$

$-4\leqq a<4$ では，$(a+4)^2\geqq 0$　すなわち　$\frac{a^2}{4}+4\geqq -2a$

よって，$f(x)$ は $x=-\frac{a}{2}$ で最小値 $-2a$ をとる。



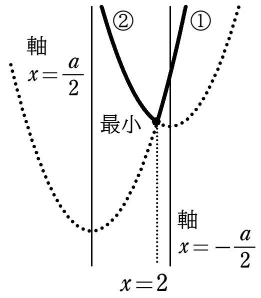
[3] $a<-4$ のとき

① の軸は $x<2$ の範囲，② の軸は $x>2$ の範囲にある。

よって，①，② はともに

$$x=2 \text{ で最小値 } \frac{a^2}{4}+4$$

をとり，このとき $f(x)$も最小となる。



[1]～[3] から　　$a\geqq -4$ のとき最小値 $-2a$，

$a<-4$ のとき最小値 $\frac{a^2}{4}+4$

$\boxed{19}$ a は実数とする。関数 $f(x)=(x-a)^2-|x|$ の最小値を a の式で表せ。

解答 $a\geqq 0$ のとき $-a-\frac{1}{4}$，$a<0$ のとき $a-\frac{1}{4}$

解説

$x\geqq 0$ のとき　　$f(x)=(x-a)^2-x=x^2-(2a+1)x+a^2$

$$=\left(x-\frac{2a+1}{2}\right)^2-a-\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，

軸は直線 $x=\frac{2a+1}{2}$，頂点は点 $\left(\frac{2a+1}{2},\ -a-\frac{1}{4}\right)$

$x<0$ のとき　　$f(x)=(x-a)^2+x=x^2-(2a-1)x+a^2$

$$=\left(x-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，

軸は直線 $x=\frac{2a-1}{2}$，頂点は点 $\left(\frac{2a-1}{2},\ a-\frac{1}{4}\right)$

① と ② の軸について，$\frac{2a-1}{2}<\frac{2a+1}{2}$ が常に成り立つから，① の軸は常に ② の軸より右側にある。次に

① の軸が $x\geqq 0$ の範囲にあるのは，$\frac{2a+1}{2}\geqq 0$ から　　$a\geqq -\frac{1}{2}$

② の軸が $x<0$ の範囲にあるのは，$\frac{2a-1}{2}<0$ から　　$a<\frac{1}{2}$

のときである。

以上から，軸の位置に応じ，次の 3 つの場合に分けて考える。

[1] $a\geqq\frac{1}{2}$　　[2] $-\frac{1}{2}\leqq a<\frac{1}{2}$　　[3] $a<-\frac{1}{2}$

また，①，② の頂点の y 座標について　　$a-\frac{1}{4}-\left(-a-\frac{1}{4}\right)=2a$

したがって，

$a>0$ のとき，② の頂点が ① の頂点より上にあり，

$a<0$ のとき，② の頂点が ① の頂点より下にある。　$\cdots\cdots(*)$

[1] $a\geqq\frac{1}{2}$ のとき

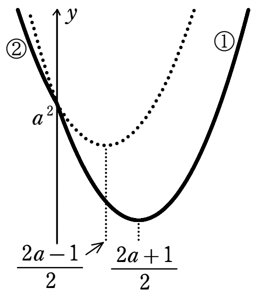
①，② の軸はともに $x\geqq 0$ の範囲にあり，① の軸は常に ② の軸より右側にある。

更に，$(*)$ から，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図の実線部分のようになる。

よって，$f(x)$ は

$x=\frac{2a+1}{2}$ で最小値 $-a-\frac{1}{4}$

をとる。



[2] $-\frac{1}{2}\leqq a<\frac{1}{2}$ のとき

① の軸は $x\geqq 0$ の範囲にあり，② の軸は $x<0$ の範囲にあるから，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図の実線部分のようになる。

ここで，$(*)$ に注意すると

(i) $a>0$ のとき，① の頂点が ② の頂点より下にある。

(ii) $a=0$ のとき，① と ② の頂点の y 座標は一致する。

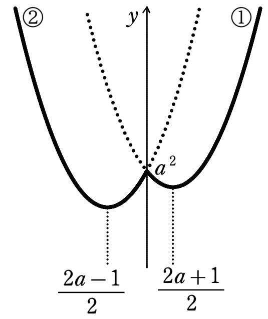
(iii) $a<0$ のとき，② の頂点が ① の頂点より下にある。

したがって，$f(x)$ は

$0\leqq a<\frac{1}{2}$　のとき　$x=\frac{2a+1}{2}$ で最小値 $-a-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}\leqq a<0$　のとき　$x=\frac{2a-1}{2}$ で最小値 $a-\frac{1}{4}$

をとる。



[3] $a<-\frac{1}{2}$ のとき

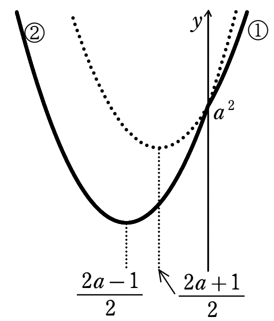
①，② の軸はともに $x<0$ の範囲にあり，① の軸は常に ② の軸より右側にある。

更に，$(*)$ から，$y=f(x)$ のグラフの概形は右の図の実線部分のようになる。

よって，$f(x)$ は

$x=\frac{2a-1}{2}$ で最小値 $a-\frac{1}{4}$

をとる。



以上から，求める最小値は

$a\geqq 0$ のとき $-a-\frac{1}{4}$，　$a<0$ のとき $a-\frac{1}{4}$

$\boxed{20}$ a は正の定数とする。関数 $y=x^2-2x-1$ $(0\leqq x\leqq a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。　　(2) 最大値を求めよ。

解答 (1) $0<a<1$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a-1，

$1\leqq a$ のとき　$x=1$ で最小値 -2

(2) $0<a<2$ のとき　$x=0$ で最大値 -1，

$a=2$ のとき　$x=0$，2 で最大値 -1，

$2<a$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a-1

解説

$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2\quad(0\leqq x\leqq a)$

$x=0$ のとき　$y=-1$,

$x=a$ のとき　$y=a^2-2a-1$,

$x=1$ のとき　$y=-2$

(1)　[1]　$0<a<1$ のとき

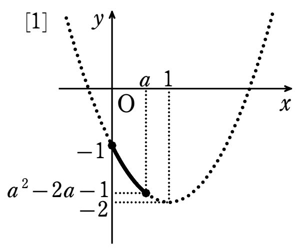
グラフは図の実線部分のようになる。

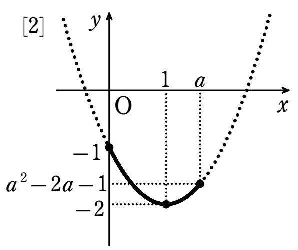
よって，$x=a$ で最小値 a^2-2a-1 をとる。

[2]　$1\leqq a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=1$ で最小値 -2 をとる。



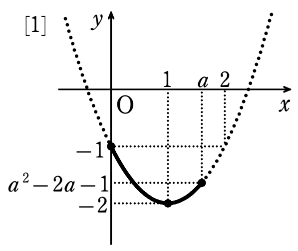


(2)　定義域の中央の値は　$\frac{a}{2}$

[1]　$0<\frac{a}{2}<1$ すなわち $0<a<2$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最大値 -1 をとる。



[2]　$\frac{a}{2}=1$ すなわち $a=2$ のとき

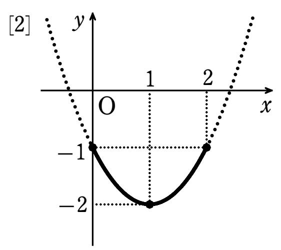
グラフは図の実線部分のようになる。

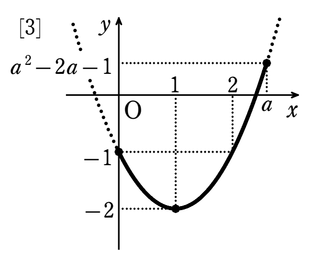
よって，$x=0$，2 で最大値 -1 をとる。

[3]　$1<\frac{a}{2}$ すなわち $2<a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-2a-1 をとる。





21　a は定数とする。関数 $y=3x^2-6ax+2\ (0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　　(2)　最大値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 2,

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$,

$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $14-12a$

(2)　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $14-12a$,

$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 2,

$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 2

解説

$y=3x^2-6ax+2=3(x-a)^2-3a^2+2\ (0\leqq x\leqq 2)$

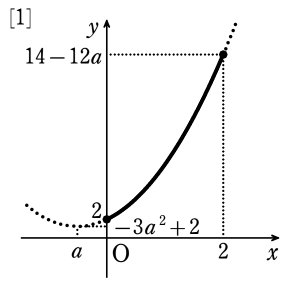
$x=0$ のとき $y=2$,　$x=2$ のとき $y=14-12a$,

$x=a$ のとき $y=-3a^2+2$

(1)　[1]　$a<0$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最小値 2　をとる。



[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき

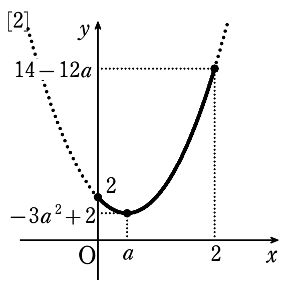
グラフは図の実線部分のようになる。

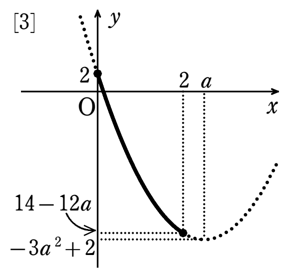
よって，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$　をとる。

[3]　$2<a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $14-12a$　をとる。





(2)　定義域の中央の値は 1

[1]　$a<1$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最大値 $14-12a$　をとる。

[2]　$a=1$ のとき

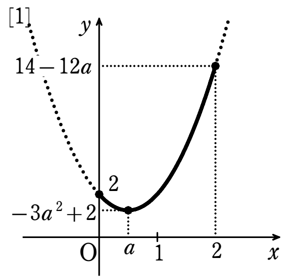
グラフは図の実線部分のようになる。

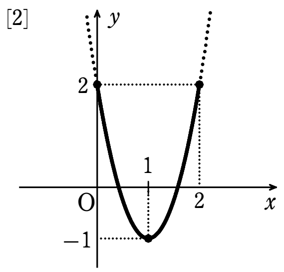
よって，$x=0$，2 で最大値 2　をとる。

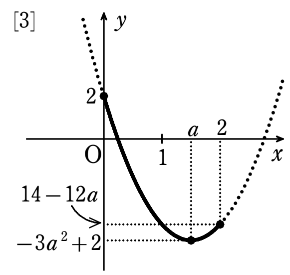
[3]　$1<a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最大値 2　をとる。







22　a は定数とする。関数 $y=-x^2+4ax-a\ (0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最大値を求めよ。　　　(2)　最小値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$,

$0\leqq a\leqq 1$ のとき $x=2a$ で最大値 $4a^2-a$,

$1<a$ のとき $x=2$ で最大値 $7a-4$

(2)　$a<\frac{1}{2}$ のとき $x=2$ で最小値 $7a-4$,

$a=\frac{1}{2}$ のとき $x=0$，2 で最小値 $-\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2}<a$ のとき $x=0$ で最小値 $-a$

解説

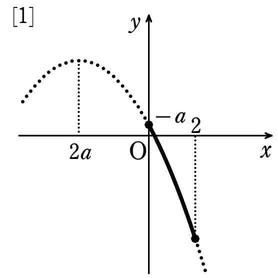
$y=-x^2+4ax-a=-(x-2a)^2+4a^2-a\quad(0\leqq x\leqq 2)$

$x=0$ のとき　$y=-a$,　$x=2$ のとき　$y=7a-4$,　$x=2a$ のとき $y=4a^2-a$

(1)　[1]　$2a<0$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最大値 $-a$　をとる。



[2]　$0\leqq 2a\leqq 2$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

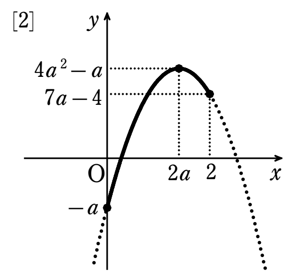
グラフは図の実線部分のようになる。

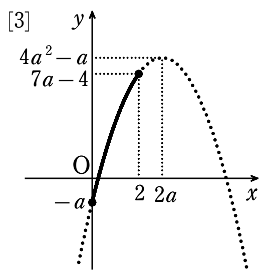
よって，$x=2a$ で最大値 $4a^2-a$　をとる。

[3]　$2<2a$　すなわち　$1<a$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最大値 $7a-4$　をとる。



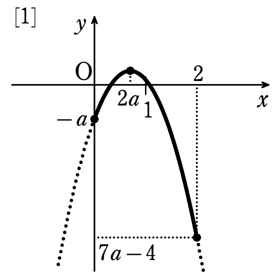


(2)　定義域の中央の値は 1

[1]　$2a<1$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $7a-4$　をとる。



[2]　$2a=1$ すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき

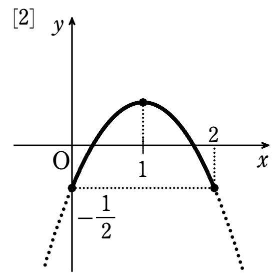
グラフは図の実線部分のようになる。

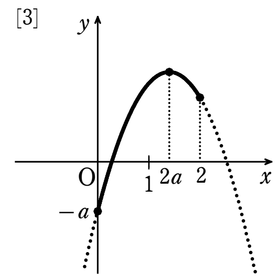
よって，$x=0$，2 で最小値 $-\frac{1}{2}$　をとる。

[3]　$2a>1$ すなわち $a>\frac{1}{2}$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最小値 $-a$　をとる。





23　a は定数とする。関数 $y=-x^2+2ax\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。

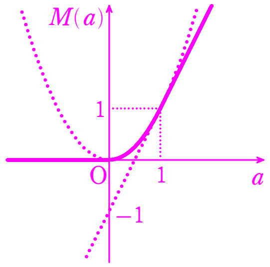
(1)　$M(a)$ を求めよ。　　　(2)　$M(a)$ のグラフをかけ。

解答　(1)　$a<0$ のとき　$M(a)=0$,

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$M(a)=a^2$,

$1<a$ のとき　$M(a)=2a-1$

(2)　[図]



解説

(1)　$y=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2$　$(0\leqq x\leqq 1)$

$x=0$ のとき　$y=0$,　　$x=1$ のとき　$y=2a-1$,　　$x=a$ のとき　$y=a^2$

[1]　$a<0$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最大値をとるから　$M(a)=0$

[2]　$0\leqq a\leqq 1$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

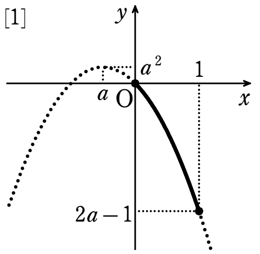
よって，$x=a$ で最大値をとるから　$M(a)=a^2$

[3]　$1<a$ のとき

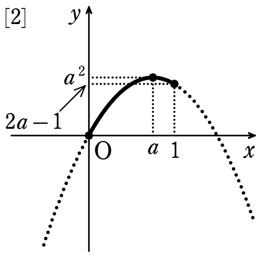
グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=1$ で最大値をとるから　$M(a)=2a-1$

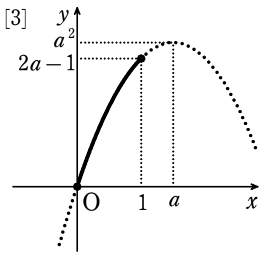
[1]



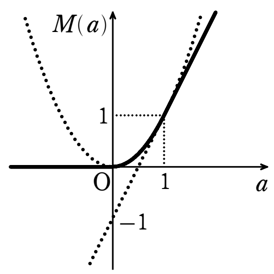
[2]



[3]



(2)　(1) より，$M(a)$ のグラフは図の実線部分である。



$\boxed{24}$ a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　　　(2)　最大値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2,

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小値 0,

$1<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a+1

(2)　$a<\frac{1}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a+1,

$a=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2

解説

$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

$x=a$ のとき　$y=a^2-2a+1$,　　$x=a+1$ のとき　$y=a^2$,　　$x=1$ のとき　$y=0$

(1)　[1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=a+1$ で最小値 a^2　をとる。

[2]　$a\leqq 1\leqq a+1$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

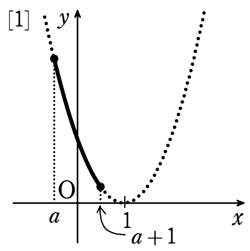
よって，$x=1$ で最小値 0　をとる。

[3]　$1<a$ のとき

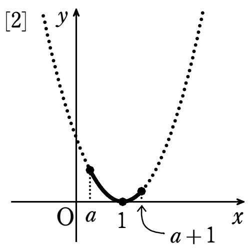
グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-2a+1　をとる。

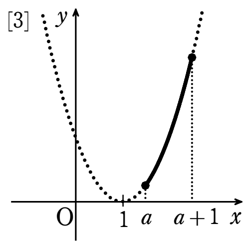
[1]



[2]



[3]



(2)　定義域の中央の値は　$a+\frac{1}{2}$

[1]　$a+\frac{1}{2}<1$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-2a+1　をとる。

[2]　$a+\frac{1}{2}=1$ すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき

グラフは図の実線部分のようになる。

このとき，軸は定義域の中央にあり，$x=a$，$x=a+1$ における y の値が一致する。

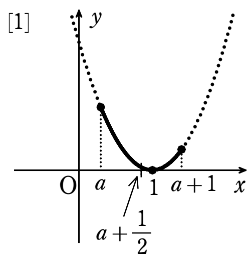
よって，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$　をとる。

[3]　$1<a+\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2}<a$ のとき

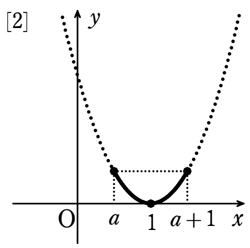
グラフは図の実線部分のようになる。

よって，$x=a+1$ で最大値 a^2　をとる。

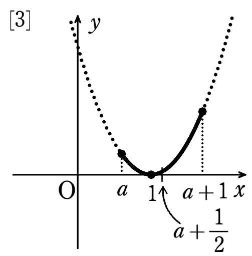
[1]



[2]



[3]



$\boxed{25}$ 関数 $f(x)=-x^2+2x+2$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$M(a)$ を求め，そのグラフをかけ。

(2)　$m(a)$ を求め，そのグラフをかけ。

解答　(1)　$a<0$ のとき　$M(a)=-a^2+3$,

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$M(a)=3$,

$1<a$ のとき　$M(a)=-a^2+2a+2$

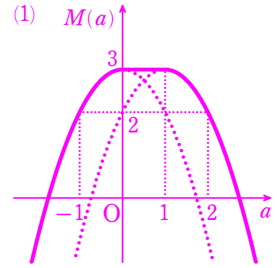
グラフは[図]

(2)　$a<\frac{1}{2}$ のとき　$m(a)=-a^2+2a+2$,

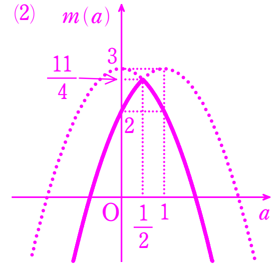
$\frac{1}{2}\leqq a$ のとき　$m(a)=-a^2+3$

グラフは[図]

(1)



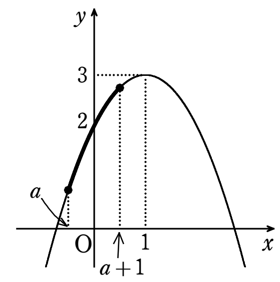
(2)



解説

$f(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



(1)　[1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

$f(x)$ は $x=a+1$ で最大となるから

$M(a)=f(a+1)=-a^2+3$

[2]　$a\leqq 1\leqq a+1$　すなわち　$0\leqq a\leqq 1$ のとき

$f(x)$ は $x=1$ で最大となるから

$M(a)=f(1)=3$

[3]　$1<a$ のとき

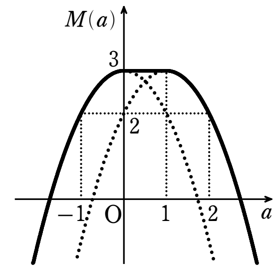
$f(x)$ は $x=a$ で最大となるから

$M(a)=f(a)=-a^2+2a+2$

したがって

$$\begin{cases} a<0 & \text{のとき}\quad M(a)=-a^2+3 \\ 0\leqq a\leqq 1 & \text{のとき}\quad M(a)=3 \\ 1<a & \text{のとき}\quad M(a)=-a^2+2a+2 \end{cases}$$

よって，$M(a)$ のグラフは[図]の実線部分である。



(2)　定義域の中央の値は　$a+\frac{1}{2}$

[1]　$a+\frac{1}{2}<1$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ は $x=a$ で最小となるから

$m(a)=f(a)=-a^2+2a+2$

[2]　$1\leqq a+\frac{1}{2}$　すなわち　$\frac{1}{2}\leqq a$ のとき

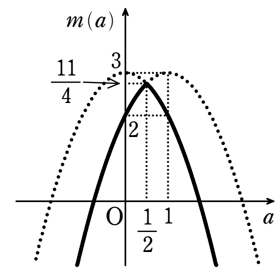
$f(x)$ は $x=a+1$ で最小となるから

$m(a)=f(a+1)=-a^2+3$

したがって

$$\begin{cases} a<\frac{1}{2} \text{ のとき}\quad m(a)=-a^2+2a+2 \\ \frac{1}{2}\leqq a \text{ のとき}\quad m(a)=-a^2+3 \end{cases}$$

よって，$m(a)$ のグラフは[図]の実線部分である。

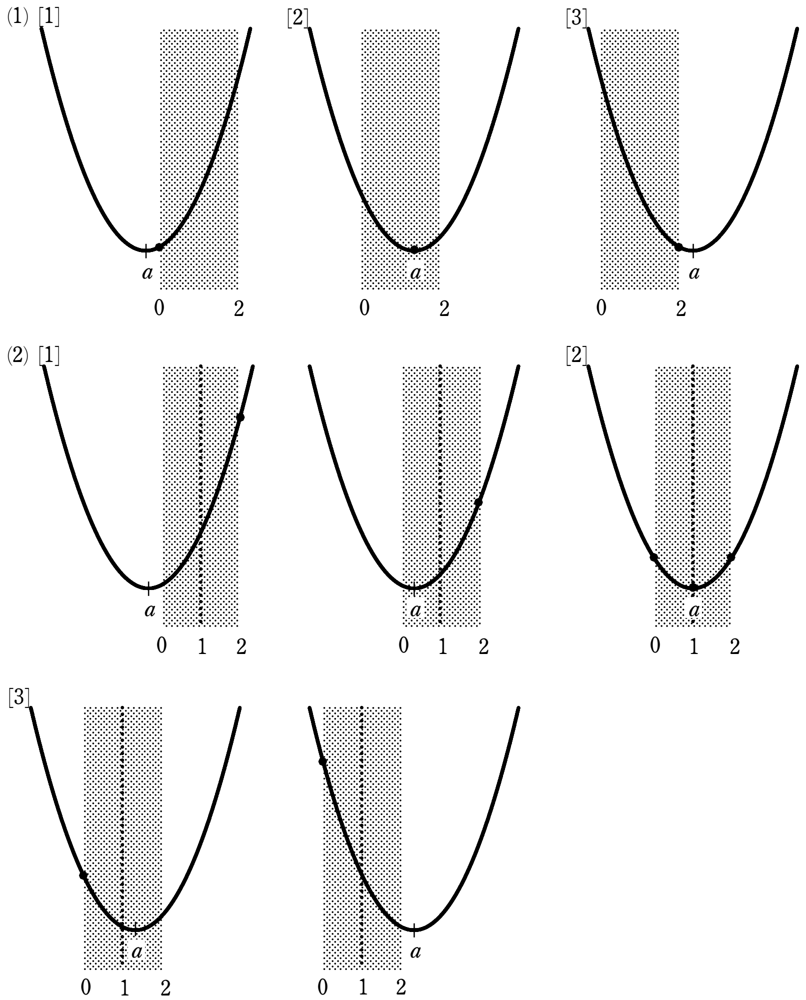


$\boxed{26}$ a は定数とする。関数 $y=2x^2-4ax$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　　　(2)　最大値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 0，$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2$，
$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $8-8a$
(2)　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $8-8a$，$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 0，
$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 0

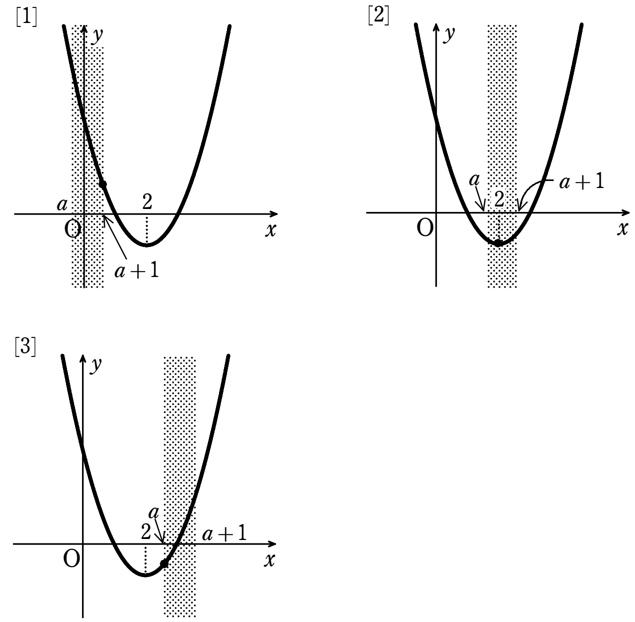
解説
$y=2x^2-4ax=2(x-a)^2-2a^2$
$x=0$ のとき　$y=0$，　$x=2$ のとき　$y=8-8a$，　$x=a$ のとき　$y=-2a^2$
(1)　[1]　$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 0
[2]　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2$
[3]　$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $8-8a$
(2)　定義域の中央の値は 1
[1]　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $8-8a$
[2]　$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 0
[3]　$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 0



27　a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最小値を求めよ。

解答　$a<1$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2-2a，$1 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=2$ で最小値 -1，
$2<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-4a+3

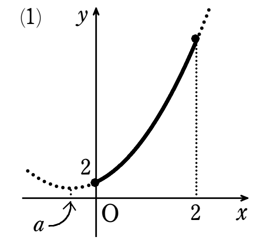
解説
$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$
$x=a$ のとき　$y=a^2-4a+3$，　$x=a+1$ のとき　$y=(a-1)^2-1=a^2-2a$，
$x=2$ のとき　$y=-1$
[1]　$a+1<2$　すなわち　$a<1$ のとき
$x=a+1$ で最小値 a^2-2a
[2]　$a \leqq 2 \leqq a+1$　すなわち　$1 \leqq a \leqq 2$ のとき
$x=2$ で最小値 -1
[3]　$2<a$ のとき
$x=a$ で最小値 a^2-4a+3



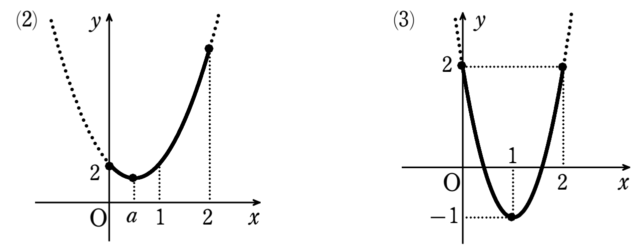
28　関数 $y=3x^2-6ax+2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ の最大値および最小値を，次の (1) ～ (5) の場合について求めよ。
(1)　$a<0$　　(2)　$0 \leqq a<1$　　(3)　$a=1$　　(4)　$1<a \leqq 2$　　(5)　$a>2$

解答　(1)　$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=0$ で最小値 2
(2)　$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$
(3)　$x=0$，2 で最大値 2，$x=1$ で最小値 -1
(4)　$x=0$ で最大値 2，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$
(5)　$x=0$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 $14-12a$

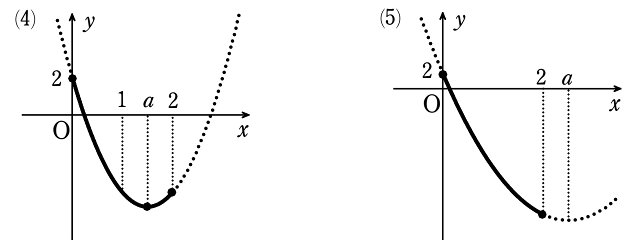
解説
$y=3x^2-6ax+2$ を変形すると　　$y=3(x-a)^2-3a^2+2$
この関数のグラフの軸は　直線 $x=a$
また，$x=0$ のとき　　$y=2$
$x=2$ のとき　　$y=14-12a$
$x=a$ のとき　　$y=-3a^2+2$
(1)　$a<0$ のとき
$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=0$ で最小値 2 をとる。



(2)　$0 \leqq a<1$ のとき
$x=2$ で最大値 $14-12a$，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。
(3)　$a=1$ のとき
$x=0$，2 で最大値 2，$x=1$ で最小値 -1 をとる。



(4)　$1<a \leqq 2$ のとき
$x=0$ で最大値 2，$x=a$ で最小値 $-3a^2+2$ をとる。
(5)　$a>2$ のとき
$x=0$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 $14-12a$ をとる。

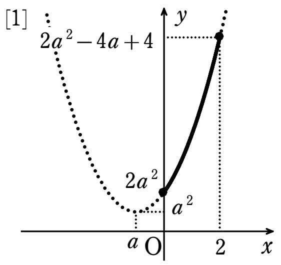


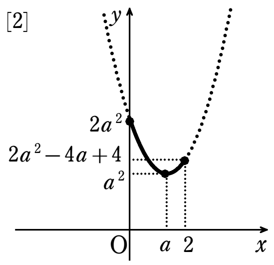
29　a は定数とする。関数 $y=x^2-2ax+2a^2$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。
(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

解答　(1)　$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 $2a^2$，
$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2，
$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$
(2)　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$
$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 2
$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 $2a^2$

解説
関数の式を変形すると　　$y=(x-a)^2+a^2$　$(0 \leqq x \leqq 2)$
この関数のグラフの軸は　直線 $x=a$
(1)　[1]　$a<0$ のとき
関数のグラフは図 [1] の実線部分である。
よって，y は $x=0$ で最小値 $2a^2$ をとる。
[2]　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき
関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，y は $x=a$ で最小値 a^2 をとる。





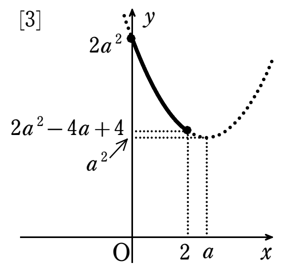
[3]　$2<a$ のとき

関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって，y は

　$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$

をとる。



[1]～[3] から

$a<0$ のとき　　$x=0$ で最小値 $2a^2$

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　　$x=a$ で最小値 a^2

$2<a$ のとき　　$x=2$ で最小値 $2a^2-4a+4$

(2)　[1]　$a<1$ のとき

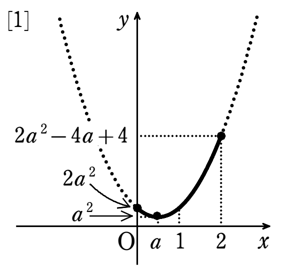
関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

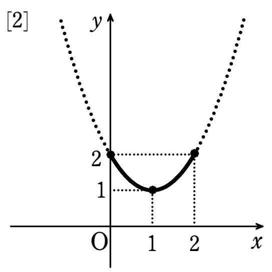
よって，y は $x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$ をとる。

[2]　$a=1$ のとき

関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，y は $x=0$，2 で最大値 2 をとる。





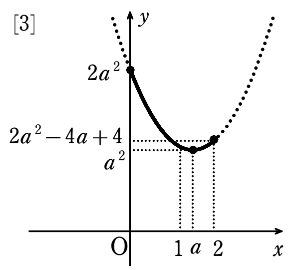
[3]　$1<a$ のとき

関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって，y は

　$x=0$ で最大値 $2a^2$

をとる。



[1]～[3] から

$a<1$ のとき　　$x=2$ で最大値 $2a^2-4a+4$

$a=1$ のとき　　$x=0$，2 で最大値 2

$1<a$ のとき　　$x=0$ で最大値 $2a^2$

30　a は定数とする。関数 $y=x^2+6x+5$ $(a\leqq x\leqq a+2)$ の最小値を求めよ。

解答　$a<-5$ のとき　$x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$

　$-5\leqq a\leqq -3$ のとき　$x=-3$ で最小値 -4

　$-3<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2+6a+5

解説

$y=x^2+6x+5$ を変形すると　$y=(x+3)^2-4$

よって，この放物線の軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ -4)$ である。

また，$x=a$ のとき　　$y=a^2+6a+5$

　$x=a+2$ のとき　　$y=a^2+10a+21$

[1]　$a+2<-3$ すなわち $a<-5$ のとき

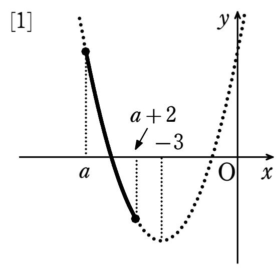
この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

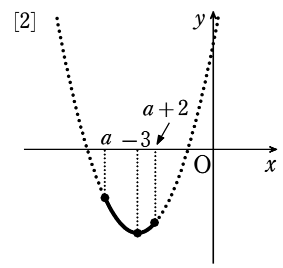
よって，y は $x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$ をとる。

[2]　$a\leqq -3\leqq a+2$ すなわち $-5\leqq a\leqq -3$ のとき

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，y は $x=-3$ で最小値 -4 をとる。





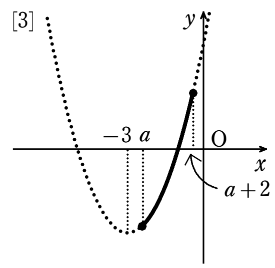
[3]　$-3<a$ のとき

この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって，y は

　$x=a$ で最小値 a^2+6a+5

をとる。



[1]～[3] から

$a<-5$ のとき　　$x=a+2$ で最小値 $a^2+10a+21$

$-5\leqq a\leqq -3$ のとき　　$x=-3$ で最小値 -4

$-3<a$ のとき　　$x=a$ で最小値 a^2+6a+5

31　a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+3$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最大値を求めよ。

解答　$a<\dfrac{3}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+3，

　$a=\dfrac{3}{2}$ のとき　$x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ で最大値 $-\dfrac{3}{4}$，

　$\dfrac{3}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

解説

$y=x^2-4x+3$ を変形すると　$y=(x-2)^2-1$

よって，この放物線の軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ -1)$ である。

また，$x=a$ のとき　　$y=a^2-4a+3$

　$x=a+1$ のとき　　$y=a^2-2a$

定義域の中央の値は　$a+\dfrac{1}{2}$

[1]　$a+\dfrac{1}{2}<2$ すなわち $a<\dfrac{3}{2}$ のとき

この関数のグラフは図 [1] の実線部分である。

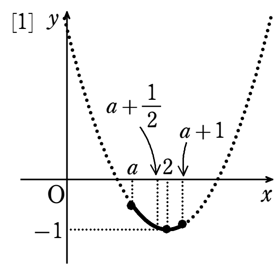
よって，y は $x=a$ で最大値 a^2-4a+3 をとる。

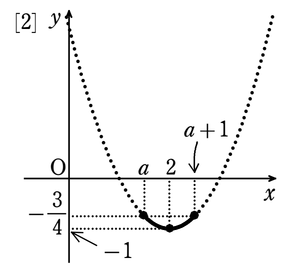
[2]　$a+\dfrac{1}{2}=2$ すなわち $a=\dfrac{3}{2}$ のとき

軸は定義域の中央にあり，$x=a$ と $x=a+1$ における y の値が一致する。

この関数のグラフは図 [2] の実線部分である。

よって，y は $x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ で最大値 $-\dfrac{3}{4}$ をとる。





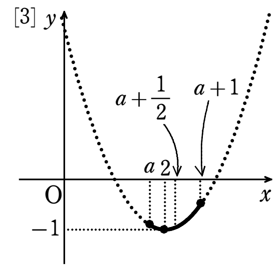
[3]　$2<a+\dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{3}{2}<a$ のとき

この関数のグラフは図 [3] の実線部分である。

よって，y は

　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

をとる。



[1]～[3] から

$a<\dfrac{3}{2}$ のとき　　$x=a$ で最大値 a^2-4a+3

$a=\dfrac{3}{2}$ のとき　　$x=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$ で最大値 $-\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{3}{2}<a$ のとき　　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a

32　a は定数とし，関数 $y=x^2+2(a-1)x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ について次のものを求めよ。

(1)　最大値　　　　(2)　最小値

解答　(1)　$a>1$ のとき $x=1$ で最大値 $2a-1$；$a=1$ のとき $x=-1$，1 で最大値 1；

　$a<1$ のとき $x=-1$ で最大値 $-2a+3$

(2)　$a>2$ のとき $x=-1$ で最小値 $-2a+3$，

　$0\leqq a\leqq 2$ のとき $x=1-a$ で最小値 $-(a-1)^2$，

　$a<0$ のとき $x=1$ で最小値 $2a-1$

解説

関数の式を変形すると　$y=x^2+2(a-1)x=\{x+(a-1)\}^2-(a-1)^2$

$f(x)=x^2+2(a-1)x$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線

$x=1-a$ である。

(1)　区間の中央の値は　0

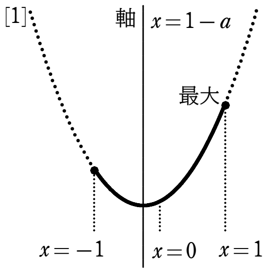
[1]　$1-a<0$　すなわち　$a>1$ のとき

図 [1] から，$x=1$ で最大となる。

最大値は

$f(1)=1^2+2(a-1)\cdot 1$

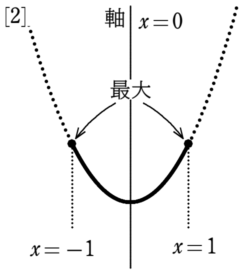
$=2a-1$



[2]　$1-a=0$　すなわち　$a=1$ のとき

図 [2] から，$x=-1,\ 1$ で最大となる。

最大値は　　$f(-1)=f(1)=1$



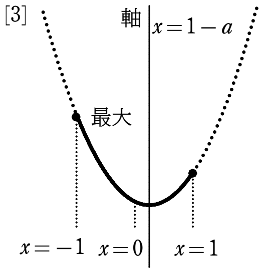
[3]　$1-a>0$　すなわち　$a<1$ のとき

図 [3] から，$x=-1$ で最大となる。

最大値は

$f(-1)=(-1)^2+2(a-1)\cdot(-1)$

$=-2a+3$



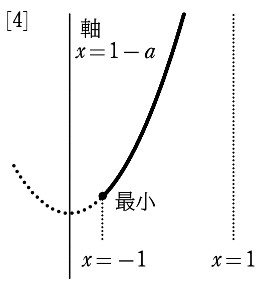
以上から

$$\begin{cases} a>1 \text{ のとき} \\ \quad x=1 \quad \text{で最大値 } 2a-1\text{；} \\ a=1 \text{ のとき} \\ \quad x=-1,\ 1 \text{ で最大値 } 1\text{；} \\ a<1 \text{ のとき} \\ \quad x=-1 \quad \text{で最大値 } -2a+3 \end{cases}$$

(2)　[4]　$1-a<-1$　すなわち　$a>2$ のとき

図 [4] から，$x=-1$ で最小となる。

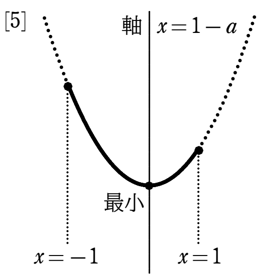
最小値は　　$f(-1)=-2a+3$



[5]　$-1\leqq 1-a\leqq 1$　すなわち　$0\leqq a\leqq 2$ のとき

図 [5] から，$x=1-a$ で最小となる。

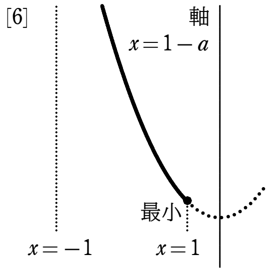
最小値は　　$f(1-a)=-(a-1)^2$



[6]　$1-a>1$　すなわち　$a<0$ のとき

図 [6] から，$x=1$ で最小となる。

最小値は　　$f(1)=2a-1$



以上から

$$\begin{cases} a>2 \text{ のとき} \quad x=-1 \text{ で最小値 } -2a+3, \\ 0\leqq a\leqq 2 \text{ のとき } x=1-a \text{ で最小値 } -(a-1)^2, \\ a<0 \text{ のとき} \quad x=1 \quad \text{で最小値 } 2a-1 \end{cases}$$

33 定義域を $0\leqq x\leqq 3$ とする関数 $f(x)=ax^2-2ax$ の最大値，最小値を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

解答　$a>0$のとき，最大値 $3a\ (x=3)$，最小値 $-a\ (x=1)$

$a<0$のとき，最大値 $-a\ (x=1)$，最小値 $3a\ (x=3)$

解説

関数の式を変形して　　$f(x)=a(x-1)^2-a$

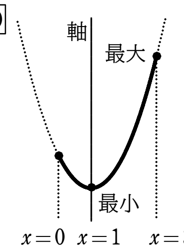
[1]　$a>0$ のとき，$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線となり，$0\leqq x\leqq 3$ の範囲で $f(x)$ は

$x=3$ で最大値 $f(3)=3a$，

$x=1$ で最小値 $f(1)=-a$

をとる。

$a>0$



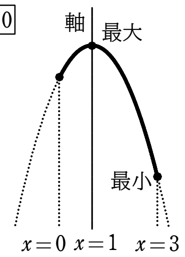
[2]　$a<0$ のとき，$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線となり，$0\leqq x\leqq 3$ の範囲で $f(x)$ は

$x=1$ で最大値 $f(1)=-a$，

$x=3$ で最小値 $f(3)=3a$

をとる。

$a<0$



以上より　$a>0$のとき，最大値 $3a\ (x=3)$，最小値 $-a\ (x=1)$

$a<0$のとき，最大値 $-a\ (x=1)$，最小値 $3a\ (x=3)$

34 定義域を $-1\leqq x\leqq 2$ とする関数 $f(x)=ax^2+4ax+1$ の最大値，最小値を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

解答　$a>0$のとき，最大値 $12a+1\ (x=2)$，最小値 $-3a+1\ (x=-1)$

$a<0$のとき，最大値 $-3a+1\ (x=-1)$，最小値 $12a+1\ (x=2)$

解説

関数の式を変形して

$f(x)=a(x+2)^2-4a+1$

[1]　$a>0$ のとき，グラフは下に凸の放物線となるから，$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲で $f(x)$ は

$x=2$ で最大値 $f(2)=12a+1$，$x=-1$ で最小値 $f(-1)=-3a+1$

[2]　$a<0$ のとき，グラフは上に凸の放物線となるから，$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲で $f(x)$ は

$x=-1$ で最大値 $f(-1)=-3a+1$，$x=2$ で最小値 $f(2)=12a+1$　　をとる。

以上より　$a>0$のとき，最大値 $12a+1\ (x=2)$，最小値 $-3a+1\ (x=-1)$

$a<0$のとき，最大値 $-3a+1\ (x=-1)$，最小値 $12a+1\ (x=2)$

35 2次関数 $y=ax^2+4ax+2$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最大値，最小値求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

解答　$a>0$のとき，最大値 $12a+2\ (x=2)$，最小値 $-3a+2\ (x=-1)$

$a<0$のとき，最大値 $-3a+2\ (x=-1)$，最小値 $12a+2\ (x=2)$

解説

$y=ax^2+4ax+2=a(x^2+4x)+2$

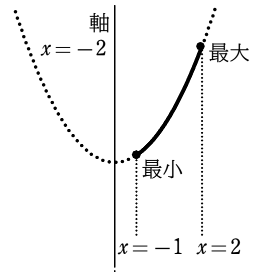
$=a(x^2+4x+2^2-2^2)+2=a(x+2)^2-4a+2$

[1]　$a>0$ のとき，グラフは下に凸の放物線となるから，$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲で y は

$x=2$ で最大値 $12a+2$，

$x=-1$ で最小値 $-3a+2$

をとる。

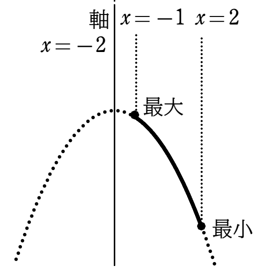


[2]　$a<0$ のとき，グラフは上に凸の放物線となるから，$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲で y は

$x=-1$ で最大値 $-3a+2$，

$x=2$ で最小値 $12a+2$

をとる。



以上より　$a>0$のとき，最大値 $12a+2\ (x=2)$，最小値 $-3a+2\ (x=-1)$

$a<0$のとき，最大値 $-3a+2\ (x=-1)$，最小値 $12a+2\ (x=2)$

36 定義域を $0\leqq x\leqq 3$ とする関数 $f(x)=ax^2-2ax+3$ の最大値，最小値を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

解答　$a>0$のとき，最大値 $3a+3\ (x=3)$，最小値 $-a+3\ (x=1)$

$a<0$のとき，最大値 $-a+3\ (x=1)$，最小値 $3a+3\ (x=3)$

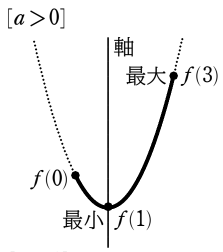
解説

$f(x)=ax^2-2ax+3=a(x^2-2x)+3$

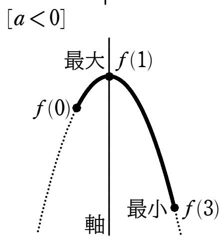
$=a(x^2-2x+1^2-1^2)+3$

$=a(x-1)^2-a+3$

[1]　$a>0$ のとき，$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線となり，
$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で $f(x)$ は
$x=3$ で最大値 $f(3)=3a+3$,
$x=1$ で最小値 $f(1)=-a+3$
をとる。



[2]　$a<0$ のとき，$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線となり，
$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で $f(x)$ は
$x=1$ で最大値 $f(1)=-a+3$,
$x=3$ で最小値 $f(3)=3a+3$
をとる。



以上より　$a>0$のとき , 最大値 $3a+3\,(x=3)$, 最小値 $-a+3\,(x=1)$
$a<0$のとき , 最大値 $-a+3\,(x=1)$, 最小値 $3a+3\,(x=3)$