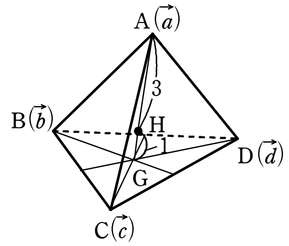
1 4点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，△BCD の重心を G$(\vec{g})$，線分 AG を 3 : 1 に内分する点を H$(\vec{h})$ とする。このとき

$$\vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$

よって，H の位置ベクトル $\vec{h}$ は，次のようになる。

$$\vec{h}=\frac{\vec{a}+3\vec{g}}{3+1}$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$



解説

2 四面体 OABC がある。線分 AB を 3 : 2 に内分する点を P，線分 OP を 5 : 1 に外分する点を Q とする。△AQC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ を用いて表せ。[20 点]

解答　点 P は線分 AB を 3 : 2 に内分するから

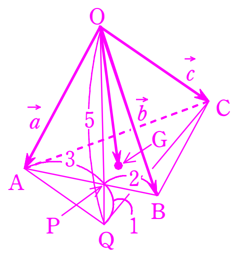
$$\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$$

点 Q は線分 OP を 5 : 1 に外分するから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OP}=\frac{5}{4}\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

点 G は △AQC の重心であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OC}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)+\vec{c}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}+\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$



解説

点 P は線分 AB を 3 : 2 に内分するから

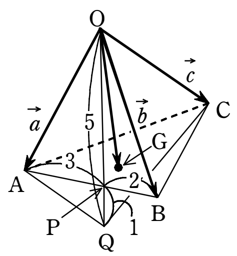
$$\overrightarrow{OP}=\frac{2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$$

点 Q は線分 OP を 5 : 1 に外分するから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OP}=\frac{5}{4}\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

点 G は △AQC の重心であるから

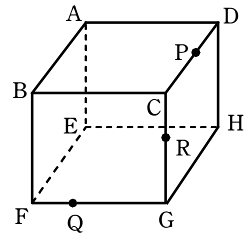
$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OC}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)+\vec{c}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}+\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$



3 右の図のような 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD−EFGH がある。点 P を CD 上で CP : PD = 2 : 1，点 Q を FG 上で FQ : QG = 1 : 2 となる点とする。点 R は平面 APQ と CG の交点とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$，CR $=x$ とするとき，次の問いに答えよ。[(1) (2) 各 5 点　(3) 15 点]

(1)　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，x で表せ。　　(3)　x の値を求めよ。



解答　(1)　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FQ}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}=\vec{a}+\vec{b}+x\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}$ とおくと　$s\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)+t\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+x\vec{c}$

すなわち　$\left(\frac{1}{3}s+t\right)\vec{a}+\left(s+\frac{1}{3}t\right)\vec{b}+t\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+x\vec{c}$

4 点 A，B，D，E は同じ平面上にないので

$\frac{1}{3}s+t=1$ …… ①，$s+\frac{1}{3}t=1$ …… ②，$t=x$ …… ③

①，② を解くと　$s=t=\frac{3}{4}$　　③ より　$x=\frac{3}{4}$

解説

(1)　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FQ}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}=\vec{a}+\vec{b}+x\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}$ とおくと　$s\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}\right)+t\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+x\vec{c}$

すなわち　$\left(\frac{1}{3}s+t\right)\vec{a}+\left(s+\frac{1}{3}t\right)\vec{b}+t\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}+x\vec{c}$

4 点 A，B，D，E は同じ平面上にないので

$\frac{1}{3}s+t=1$ …… ①，$s+\frac{1}{3}t=1$ …… ②，$t=x$ …… ③

①，② を解くと　$s=t=\frac{3}{4}$　　③ より　$x=\frac{3}{4}$

4 4 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。　[6点×3=18点]

(1)　辺 AB を 3 : 1 に内分する点 E$(\vec{e})$

(2)　辺 AC を 4 : 3 に外分する点 F$(\vec{f})$

(3)　辺 AD の中点 M$(\vec{m})$

解答　(1)　$\vec{e}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$　　(2)　$\vec{f}=\frac{-3\vec{a}+4\vec{c}}{4-3}=-3\vec{a}+4\vec{c}$　　(3)　$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$

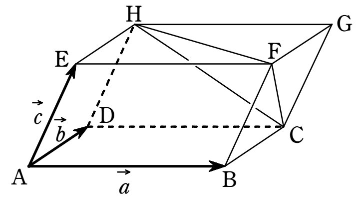
解説

(1)　$\vec{e}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{3+1}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$　　(2)　$\vec{f}=\frac{-3\vec{a}+4\vec{c}}{4-3}=-3\vec{a}+4\vec{c}$　　(3)　$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$

5 右の図の平行六面体 ABCD−EFGH において，

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$

とする。△CFH の重心を P とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　[12点]



解答　$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{AH}=\vec{b}+\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}}{3}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})}{3}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

解説

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{AH}=\vec{b}+\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}}{3}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})}{3}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

6 四面体 OABC がある。線分 AB を 2 : 3 に内分する点を P，線分 OP を 4 : 1 に外分する点を Q とする。△AQC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ で表せ。

解答　$\overrightarrow{OG}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{8}{45}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

解説

点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分するから

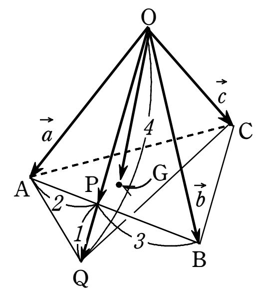
$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

点 Q は線分 OP を 4 : 1 に外分するから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{8}{15}\vec{b}$$

点 G は △AQC の重心であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OC}}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{8}{15}\vec{b}\right)+\frac{1}{3}\vec{c}$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{15}\right)\vec{a}+\frac{8}{45}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{8}{45}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$



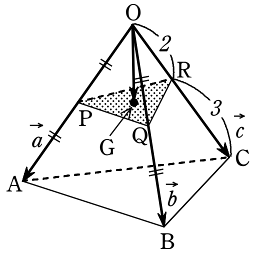
7 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 OA，OB の中点をそれぞれ P，Q とし，辺 OC を 2 : 3 に内分する点を R とする。また，△PQR の重心を G とする。

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{OG}$ の大きさ $|\overrightarrow{OG}|$ を求めよ。

解答　(1)　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{15}\vec{c}$　　(2)　$\frac{\sqrt{131}}{30}$

解説



(1) $\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$$
$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{15}\vec{c}$$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

よって $|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{30^2}(5\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c})\cdot(5\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c})$

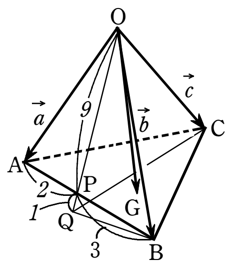
$$=\frac{1}{30^2}(25|\vec{a}|^2+25|\vec{b}|^2+16|\vec{c}|^2+50\vec{a}\cdot\vec{b}+40\vec{b}\cdot\vec{c}+40\vec{c}\cdot\vec{a})$$
$$=\frac{1}{30^2}\left(25+25+16+50\times\frac{1}{2}+40\times\frac{1}{2}+40\times\frac{1}{2}\right)=\frac{131}{30^2}$$

ゆえに $|\overrightarrow{OG}|=\frac{\sqrt{131}}{30}$

8 四面体 OABC がある。線分 AB を 2 : 3 に内分する点を P，線分 OP を 10 : 1 に外分する点を Q とし，△QBC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ で表せ。

解答 $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{13}{27}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

解説



点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分するから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

点 Q は線分 OP を 10 : 1 に外分するから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{10}{9}\overrightarrow{OP}=\frac{10}{9}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$$

点 G は △QBC の重心であるから

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$
$$=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{13}{27}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

9 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$D(\vec{d})$ を頂点とする四面体の辺 CD を 3 : 4 に内分する点を P，線分 BP を 5 : 2 に外分する点を Q，線分 AQ の中点を R とする。次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。

(1) 点 P　(2) 点 Q　(3) 点 R

解答 (1) $\frac{4\vec{c}+3\vec{d}}{7}$　(2) $\frac{-14\vec{b}+20\vec{c}+15\vec{d}}{21}$　(3) $\frac{21\vec{a}-14\vec{b}+20\vec{c}+15\vec{d}}{42}$

解説

点 P，Q，R の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ とする。

(1) $\vec{p}=\frac{4\vec{c}+3\vec{d}}{3+4}=\frac{4\vec{c}+3\vec{d}}{7}$

(2) $\vec{q}=\frac{-2\vec{b}+5\vec{p}}{5-2}=\frac{-2\vec{b}+5\vec{p}}{3}=\frac{1}{3}\left(-2\vec{b}+5\times\frac{4\vec{c}+3\vec{d}}{7}\right)=\frac{-14\vec{b}+20\vec{c}+15\vec{d}}{21}$

(3) $\vec{r}=\frac{\vec{a}+\vec{q}}{2}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{-14\vec{b}+20\vec{c}+15\vec{d}}{21}\right)=\frac{21\vec{a}-14\vec{b}+20\vec{c}+15\vec{d}}{42}$

10 空間における 3 点 A，B，C の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1) 線分 AB を 3 : 4 に内分する点 D

(2) 線分 BC を 2 : 3 に外分する点 E

(3) 線分 AC の中点 M

(4) △ABM の重心 G

解答 (1) $\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}$　(2) $3\vec{b}-2\vec{c}$　(3) $\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$　(4) $\frac{3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{6}$

解説

点 D，E，M，G の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{m}$，$\vec{g}$ とする。

(1) $\vec{d}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{3+4}=\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7}$

(2) $\vec{e}=\frac{-3\vec{b}+2\vec{c}}{2-3}=3\vec{b}-2\vec{c}$

(3) $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$

(4) $\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{m}}{3}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}\right)=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{6}$

11 四面体 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺 BC の中点を M，辺 CD を 3 : 1 に内分する点を N，△ABC の重心を G とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{MN}$　(2) $\overrightarrow{GN}$

解答 (1) $\frac{-2\vec{b}-\vec{c}+3\vec{d}}{4}$　(2) $\frac{-4\vec{b}-\vec{c}+9\vec{d}}{12}$

解説

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$
$$\overrightarrow{AN}=\frac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}}{3+1}=\frac{\vec{c}+3\vec{d}}{4}$$
$$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

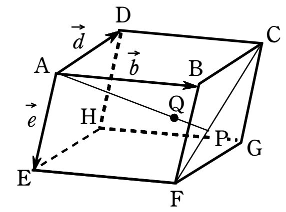
(1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{c}+3\vec{d}}{4}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{-2\vec{b}-\vec{c}+3\vec{d}}{4}$

(2) $\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{c}+3\vec{d}}{4}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{-4\vec{b}-\vec{c}+9\vec{d}}{12}$

12 平行六面体 ABCD−EFGH において，線分 CF を 2 : 1 に内分する点を P，線分 AP を 3 : 1 に内分する点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ とするとき，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{CQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ で表せ。

解答 $\overrightarrow{AP}=\frac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{3}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{4}$，$\overrightarrow{CQ}=\frac{-\vec{b}-3\vec{d}+2\vec{e}}{4}$

解説



$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AF}}{2+1}=\frac{(\vec{b}+\vec{d})+2(\vec{b}+\vec{e})}{3}$$
$$=\frac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{3}$$

よって $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\times\frac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{3}$

$$=\frac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{4}$$

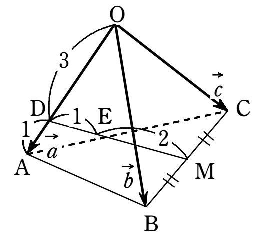
また $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=\frac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{4}-(\vec{b}+\vec{d})=\frac{-\vec{b}-3\vec{d}+2\vec{e}}{4}$

13 四面体 OABC において，辺 OA を 3 : 1 に内分する点を D，辺 BC の中点を M，線分 DM を 1 : 2 に内分する点を E とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{OM}$　(2) $\overrightarrow{OE}$　(3) $\overrightarrow{DM}$

解答 (1) $\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　(2) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$　(3) $-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

解説



(1) $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{OE}=\frac{2\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OM}}{1+2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

(3) $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\frac{3}{4}\vec{a}$

$$=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

14 四面体 OABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，線分 DC を 2 : 3 に内分する点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{OD}$　(2) $\overrightarrow{OP}$　(3) $\overrightarrow{PB}$

解答 (1) $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{PB}=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{c}$

解説

(1) $\overrightarrow{OD}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{3\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{OC}}{2+3}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OD}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OC}$

$=\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+\dfrac{2}{5}\vec{c}=\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\vec{b}-\left(\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}\right)$

$=-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}-\dfrac{2}{5}\vec{c}$