等差数列クイズ(数字)

$\boxed{1}$ 初項 10，公差 -4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，その第 10 項を求めよ。

解答　$a_n=-4n+14$，$a_{10}=-26$

解説

初項 10，公差 -4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=10+(n-1)\cdot(-4)$　すなわち　$a_n=-4n+14$

第 10 項は　$a_{10}=-4\cdot10+14=-26$

$\boxed{2}$ 次の等差数列の一般項を求めよ。また，その第 8 項を求めよ。

(1)　-3，3，9，15，……　　(2)　25，18，11，4，……

解答　(1)　一般項 $6n-9$，第 8 項 39　　(2)　一般項 $-7n+32$，第 8 項 -24

解説

与えられた等差数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　初項 -3，公差 6 であるから，一般項は

$a_n=-3+(n-1)\cdot6$　すなわち　$a_n=6n-9$

第 8 項は　$a_8=6\cdot8-9=39$

(2)　初項 25，公差 -7 であるから，一般項は

$a_n=25+(n-1)\cdot(-7)$　すなわち　$a_n=-7n+32$

第 8 項は　$a_8=-7\cdot8+32=-24$

$\boxed{3}$ 公差が -3，第 5 項が 17 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と一般項を求めよ。

解答　初項 29，一般項 $a_n=-3n+32$

解説

この数列の初項を a とすると，公差が-3 であるから　$a_n=a+(n-1)\cdot(-3)$

第 5 項が 17 であるから　$a+(5-1)\cdot(-3)=17$

すなわち　$a-12=17$

よって　$a=29$

ゆえに　$a_n=29+(n-1)\cdot(-3)=-3n+32$

したがって　初項は 29，一般項は $a_n=-3n+32$

$\boxed{4}$ 公差が 2，第 8 項が 4 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と一般項を求めよ。

解答　初項 -10，一般項 $a_n=2n-12$

解説

この数列の初項を a とすると，公差が 2 であるから　$a_n=a+(n-1)\cdot2$

第 8 項が 4 であるから　$a+(8-1)\cdot2=4$

すなわち　$a+14=4$

よって　$a=-10$

ゆえに　$a_n=-10+(n-1)\cdot2=2n-12$

したがって　初項は -10，一般項は $a_n=2n-12$

$\boxed{5}$ (1)　初項 3，末項 27，項数 13 の等差数列の和は

$\frac{1}{2}\cdot13(3+27)=195$

(2)　初項 50，公差 -4，項数 20 の等差数列の和は

$\frac{1}{2}\cdot20\{2\cdot50+(20-1)\cdot(-4)\}=240$

解説

$\boxed{6}$ 次のような等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 6，末項 -39，項数 10　　(2)　初項 -10，公差 2，項数 18

解答　(1)　-165　　(2)　126

解説

(1)　$\frac{1}{2}\cdot10(6-39)=-165$

(2)　$\frac{1}{2}\cdot18\{2\cdot(-10)+(18-1)\cdot2\}=126$

$\boxed{7}$ 次の等差数列の和 S を求めよ。

100，105，110，……，200

解答　3150

解説

この等差数列の初項は 100，公差は 5 であるから，末項 200 が第 n 項であるとすると

$100+(n-1)\cdot5=200$

すなわち　$5n+95=200$

ゆえに　$n=21$

よって，初項 100，末項 200，項数 21 の等差数列の和を求めて

$S=\frac{1}{2}\cdot21(100+200)=3150$

$\boxed{8}$ 次の等差数列の和を求めよ。

(1)　1，4，7，……，100　　(2)　120，113，……，-83

解答　(1)　1717　　(2)　555

解説

(1)　この等差数列の初項は 1，公差は 3 であるから，末項 100 が第 n 項であるとすると

$1+(n-1)\cdot3=100$

すなわち　$3n-2=100$　　ゆえに　$n=34$

よって，初項 1，末項 100，項数 34 の等差数列の和 S を求めて

$S=\frac{1}{2}\cdot34(1+100)=1717$

(2)　この等差数列の初項は 120，公差は -7 であるから，末項 -83 が第 n 項であるとすると　$120+(n-1)\cdot(-7)=-83$

すなわち　$-7n+127=-83$　　ゆえに　$n=30$

よって，初項 120，末項 -83，項数 30 の等差数列の和 S を求めて

$S=\frac{1}{2}\cdot30(120-83)=555$

$\boxed{9}$ 第 3 項が 17，初項から第 6 項までの和が 120 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，$100<a_n<200$ を満たす項の和を求めよ。

解答　一般項 $a_n=6n-1$，和 2533

解説

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とする。

第 3 項が 17 であるから

$a+2d=17$　……①

初項から第 6 項までの和が 120 であるから

$\frac{1}{2}\cdot6(2a+5d)=120$　　すなわち　$2a+5d=40$　……②

①，② を連立させて解くと　$a=5$，$d=6$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=5+(n-1)\cdot6$

すなわち　$a_n=6n-1$

次に，$100<6n-1<200$ とすると

$101<6n<201$　　ゆえに　$16.8\cdots<n<33.5$

n は整数であるから　$17\leqq n\leqq33$

ゆえに，$100<a_n<200$ を満たす項の数は

$33-17+1=17$

また，第 17 項は　$6\cdot17-1=101$

第 33 項は　$6\cdot33-1=197$

したがって，$100<a_n<200$ を満たす項の和を S とすると

$S=\frac{1}{2}\cdot17(101+197)=2533$

$\boxed{10}$ 初項が 79，公差が -2 である等差数列について，次の問いに答えよ。

(1)　第何項が初めて負の数となるか。

(2)　初項から第何項までの和が最大となるか。また，その和を求めよ。

解答　(1)　第 41 項　　(2)　第 40 項までの和が最大，和は 1600

解説

この等差数列を $\{a_n\}$ とすると，初項が 79，公差が -2 であるから

$a_n=79+(n-1)\cdot(-2)=-2n+81$

(1)　$a_n<0$ とすると　$-2n+81<0$

これを解くと　$n>\frac{81}{2}=40.5$ から　$n\geqq41$

したがって，第 41 項が初めて負の数になる。

(2)　$1\leqq n\leqq40$ のとき　$a_n>0$

$n\geqq41$ のとき　$a_n<0$

ゆえに，初項から第 40 項までの和が最大になる。

また，その和は　$\frac{1}{2}\cdot40\{2\cdot79+(40-1)\cdot(-2)\}=1600$

別解　(2)　初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot79+(n-1)\cdot(-2)\}=n(80-n)=-(n-40)^2+1600$$

$n\geqq1$ であるから，$n=40$ のとき S_n は最大になり，そのときの和は 1600

11 次の問いに答えよ。[各 15 点]

(1) 公差が 2，第 10 項が 15 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と一般項を求めよ。

(2) 第 3 項が 9，第 13 項が 49 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項と第 100 項を求めよ。

解答 (1) 初項を a とすると　$a_n=a+(n-1)\cdot2$

第 10 項が 15 であるから　$a+(10-1)\cdot2=15$

すなわち　$a+18=15$

よって　$a=-3$

ゆえに　$a_n=-3+(n-1)\cdot2=2n-5$

したがって　初項は -3，一般項は $a_n=2n-5$

(2) 初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$

第 3 項が 9 であるから　$a+2d=9$　……①

第 13 項が 49 であるから　$a+12d=49$　……②

①，② を解いて　$a=1$，$d=4$

よって，一般項は　$a_n=1+(n-1)\cdot4=4n-3$

また，第 100 項は　$a_{100}=400-3=397$

解説

(1) 初項を a とすると　$a_n=a+(n-1)\cdot2$

第 10 項が 15 であるから　$a+(10-1)\cdot2=15$

すなわち　$a+18=15$

よって　$a=-3$

ゆえに　$a_n=-3+(n-1)\cdot2=2n-5$

したがって　初項は -3，一般項は $a_n=2n-5$

(2) 初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$

第 3 項が 9 であるから　$a+2d=9$　……①

第 13 項が 49 であるから　$a+12d=49$　……②

①，② を解いて　$a=1$，$d=4$

よって，一般項は　$a_n=1+(n-1)\cdot4=4n-3$

また，第 100 項は　$a_{100}=400-3=397$

12 等差数列 $\{a_n\}$ が $a_2+a_3+a_4=186$，$a_5+a_6+a_7=150$ を満たしている。この数列の一般項を求めよ。また，初項から第何項までの和が最大となるか。[20 点]

解答 初項を a，公差を d とする。

$a_2+a_3+a_4=186$ より　$(a+d)+(a+2d)+(a+3d)=3a+6d=186$

ゆえに　$a+2d=62$　……①

$a_5+a_6+a_7=150$ より　$(a+4d)+(a+5d)+(a+6d)=3a+15d=150$

ゆえに　$a+5d=50$　……②

②－① より　$3d=-12$　ゆえに　$d=-4$

① に代入して　$a=62-2d=70$

よって　$a_n=70-4(n-1)=74-4n$

また，$a_n<0$ となる最初の項は，$74-4n<0$ から　$n>\frac{74}{4}=18.5$

すなわち，第 19 項である。したがって，初項から第 18 項までの和が最大となる。

解説

初項を a，公差を d とする。

$a_2+a_3+a_4=186$ より　$(a+d)+(a+2d)+(a+3d)=3a+6d=186$

ゆえに　$a+2d=62$　……①

$a_5+a_6+a_7=150$ より　$(a+4d)+(a+5d)+(a+6d)=3a+15d=150$

ゆえに　$a+5d=50$　……②

②－① より　$3d=-12$　ゆえに　$d=-4$

① に代入して　$a=62-2d=70$

よって　$a_n=70-4(n-1)=74-4n$

また，$a_n<0$ となる最初の項は，$74-4n<0$ から　$n>\frac{74}{4}=18.5$

すなわち，第 19 項である。したがって，初項から第 18 項までの和が最大となる。

13 (1) 等差数列 100，93，86，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 20 項を求めよ。

(2) 第 6 項が 13，第 15 項が 31 の等差数列 $\{a_n\}$ において

(ア) 一般項を求めよ。　(イ) 71 は第何項か。

(ウ) 初めて 1000 を超えるのは第何項か。

解答 (1) $a_n=-7n+107$，$a_{20}=-33$

(2) (ア) $2n+1$　(イ) 第 35 項　(ウ) 第 500 項

解説

(1) 初項 a は $a=100$，公差 d は $d=93-100=-7$ であるから，一般項は

$a_n=100+(n-1)\cdot(-7)=-7n+107$

また　$a_{20}=-7\cdot20+107=-140+107=-33$

(2) (ア) 初項を a，公差を d とすると，$a_6=13$，$a_{15}=31$ であるから

$$\begin{cases}a+5d=13\\a+14d=31\end{cases}$$

これを解いて　$a=3$，$d=2$

したがって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\cdot2=2n+1$

(イ) $a_n=71$ とすると　$2n+1=71$

これを解いて　$n=35$　したがって　第 35 項

(ウ) $a_n>1000$ とすると　$2n+1>1000$

これを解いて　$n>\frac{999}{2}=499.5$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=500$

したがって，初めて 1000 を超えるのは　第 500 項

14 (1) 等差数列 -13，-8，-3，…… の一般項 a_n を求めよ。また，第 16 項を求めよ。

(2) 第 10 項が 33，第 30 項が -27 である等差数列 $\{a_n\}$ において

(ア) 一般項を求めよ。　(イ) -105 は第何項か。

(ウ) 初めて負になるのは第何項か。

解答 (1) $a_n=5n-18$，$a_{16}=62$

(2) (ア) $a_n=-3n+63$　(イ) 第 56 項　(ウ) 第 22 項

解説

(1) 初項は -13，公差は $-8-(-13)=5$ であるから，一般項は

$a_n=-13+(n-1)\cdot5=5n-18$

また　$a_{16}=5\cdot16-18=62$

(2) (ア) 初項を a，公差を d とすると，$a_{10}=33$，$a_{30}=-27$ であるから

$$\begin{cases}a+9d=33\\a+29d=-27\end{cases}$$

これを解いて　$a=60$，$d=-3$

したがって，一般項は　$a_n=60+(n-1)\cdot(-3)=-3n+63$

(イ) $a_n=-105$ とすると　$-3n+63=-105$

これを解いて　$n=56$　したがって　第 56 項

(ウ) $a_n<0$ とすると　$-3n+63<0$

これを解いて　$n>21$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=22$

したがって，初めて負になるのは　第 22 項

15 次のような和 S を求めよ。

(1) 等差数列 2，8，14，……，98 の和

(2) 初項 100，公差 -8 の等差数列の初項から第 30 項までの和

(3) 第 8 項が 37，第 24 項が 117 の等差数列の第 10 項から第 20 項までの和

解答 (1) $S=850$　(2) $S=-480$　(3) $S=792$

解説

(1) 初項は 2，公差は 6 であるから，末項 98 が第 n 項であるとすると

$2+(n-1)\cdot6=98$　よって　$n=17$

ゆえに，初項 2，末項 98，項数 17 の等差数列の和を求めて

$$S=\frac{1}{2}\cdot17(2+98)=850$$

(2) $S=\frac{1}{2}\cdot30\{2\cdot100+(30-1)\cdot(-8)\}=-480$

(3) 初項を a，公差を d，一般項を a_n とする。

$a_8=37$，$a_{24}=117$ であるから　$\begin{cases}a+7d=37\\a+23d=117\end{cases}$

この連立方程式を解いて　$a=2$，$d=5$

初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_{20}=\frac{1}{2}\cdot20\{2\cdot2+(20-1)\cdot5\}=990$$

$$S_9=\frac{1}{2}\cdot9\{2\cdot2+(9-1)\cdot5\}=198$$

よって　$S=S_{20}-S_9=990-198=792$

別解 $a_{10}=a+9d=2+9\cdot5=47$ を初項と考えると，第 10 項から第 20 項までの項数は

$20-10+1=11$ であるから　$S=\frac{1}{2}\cdot11\{2\cdot47+(11-1)\cdot5\}=792$

16 次のような和 S を求めよ。

(1) 等差数列 2，$\frac{17}{6}$，$\frac{11}{3}$，$\frac{9}{2}$，……，12 の和

(2) 初項 1，公差 -2 の等差数列の初項から第 100 項までの和

(3) 第 10 項が 1，第 16 項が 5 の等差数列の第 15 項から第 30 項までの和

解答 (1) $S=91$　(2) $S=-9800$　(3) $S=\frac{448}{3}$

解説

(1) 初項が 2，公差が $\frac{17}{6}-2=\frac{5}{6}$ であるから，末項 12 が第 n 項であるとすると

$2+(n-1)\cdot\frac{5}{6}=12$ よって $n=13$

ゆえに，初項 2，末項 12，項数 13 の等差数列の和を求めて

$$S=\frac{1}{2}\cdot 13(2+12)=91$$

(2) $S=\frac{1}{2}\cdot 100\{2\cdot 1+(100-1)\cdot(-2)\}=-9800$

(3) 初項を a，公差を d とすると，第 10 項が 1，第 16 項が 5 であるから

$$a+9d=1,\ a+15d=5$$

これを解いて $a=-5$，$d=\frac{2}{3}$

初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_{30}=\frac{1}{2}\cdot 30\left\{2\cdot(-5)+(30-1)\cdot\frac{2}{3}\right\}=140$$

$$S_{14}=\frac{1}{2}\cdot 14\left\{2\cdot(-5)+(14-1)\cdot\frac{2}{3}\right\}=-\frac{28}{3}$$

よって $S=S_{30}-S_{14}=140-\left(-\frac{28}{3}\right)=\frac{448}{3}$

17 初項から第 5 項までの和が 125 で，初項から第 10 項までの和が 500 である等差数列の初項 a と公差 d を求めよ。

解答 $a=5$，$d=10$

解説

初項を a，公差を d とし，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$S_5=125$，$S_{10}=500$ であるから

$\frac{1}{2}\cdot 5\{2a+(5-1)d\}=125$，　$\frac{1}{2}\cdot 10\{2a+(10-1)d\}=500$

よって $a+2d=25$ ……①，　$2a+9d=100$ ……②

①，② を解いて $a=5$，$d=10$

18 初項 40，公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$ において

(1) 初めて負になるのは第何項か。

(2) 初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答 (1) 第 15 項　(2) 第 14 項，和は 287

解説

(1) 初項 40，公差 -3 の等差数列の一般項 a_n は

$$a_n=40+(n-1)\cdot(-3)=-3n+43$$

$a_n<0$ とすると $-3n+43<0$ ゆえに $n>\frac{43}{3}=14.3\cdots$

これを満たす最小の自然数 n は $n=15$

したがって，初めて負になるのは 第 15 項

(2) (1) から $n\leqq 14$ のとき $a_n>0$，　$n\geqq 15$ のとき $a_n<0$

よって，初項から第 14 項までの和が最大で，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot 14\{2\cdot 40+(14-1)\cdot(-3)\}=287$$

別解 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 40+(n-1)\cdot(-3)\}=\frac{1}{2}(-3n^2+83n)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{3\left(n-\frac{83}{6}\right)^2-3\left(\frac{83}{6}\right)^2\right\}=-\frac{3}{2}\left(n-\frac{83}{6}\right)^2+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{83}{6}\right)^2$$

$\frac{83}{6}=13.8\cdots$ であるから，$n=14$ のとき最大値 $\frac{1}{2}\cdot 14\cdot(-3\cdot 14+83)=287$ をとる。

19 初項 -99，公差 5 の等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第何項までの和が最小となるか。また，そのときの和を求めよ。

解答 第 20 項，和は -1030

解説

一般項 a_n は $a_n=-99+(n-1)\cdot 5=5n-104$

$a_n>0$ とすると $5n-104>0$ ゆえに $n>\frac{104}{5}=20.8$

これを満たす最小の自然数 n は $n=21$

よって $n\leqq 20$ のとき $a_n<0$，$n\geqq 21$ のとき $a_n>0$

したがって，初項から第 20 項までの和が最小で，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot(-99)+(20-1)\cdot 5\}=-1030$$

別解 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-99)+(n-1)\cdot 5\}=\frac{1}{2}n(5n-203)$$

$$=\frac{1}{2}(5n^2-203n)=\frac{1}{2}\left\{5\left(n-\frac{203}{10}\right)^2-5\left(\frac{203}{10}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{5}{2}\left(n-\frac{203}{10}\right)^2-\frac{5}{2}\left(\frac{203}{10}\right)^2$$

$\frac{203}{10}=20.3$ であるから，S_n は $n=20$ のとき最小となる。

よって，第 20 項までの和が最小で，そのときの和は

$$\frac{1}{2}\cdot 20(5\cdot 20-203)=-1030$$

20 $a_n=3n-2$，$b_n=4n+1$，$c_n=7n$ ($n=1$，2，……) で定義される 3 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ のどれにも現れる値のうち，1000 以下になるものの個数とその総和を求めよ。

解答 12 個，6132

解説

3 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ のどれにも現れる値を x とする。

x は p，q，r を整数として，次のように表される。

$$x=3p-2,\ x=4q+1,\ x=7r$$

$3p-2=4q+1$ から $3(p-1)=4q$

3 と 4 は互いに素であるから，k を整数として，$p-1=4k$ と表される。

よって $p=4k+1$

$p=4k+1$ を $3p-2=7r$ に代入して $3(4k+1)-2=7r$

ゆえに $7r-12k=1$ ……①

$r=-5$，$k=-3$ は ① の整数解の 1 つであるから

$$7(r+5)-12(k+3)=0$$

すなわち $7(r+5)=12(k+3)$

7 と 12 は互いに素であるから，l を整数として，$r+5=12l$ と表される。

よって $r=12l-5$

これを $x=7r$ に代入すると $x=7(12l-5)=84l-35$

ここで，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq 1$，$b_n\geqq 5$，$c_n\geqq 7$

ゆえに $x\geqq 7$

$7\leqq 84l-35\leqq 1000$ とすると $\frac{1}{2}\leqq l\leqq\frac{345}{28}$

l は整数であるから $1\leqq l\leqq 12$

したがって，求める個数は 12 個

ゆえに，初項 49，公差 84，項数 12 の等差数列の和を求めて

$$\frac{1}{2}\cdot 12\{2\cdot 49+(12-1)\cdot 84\}=6132$$

21 次のような等差数列の一般項を求めよ。また，その第 10 項を求めよ。

(1) 初項 3，公差 2　(2) 初項 13，公差 -3

(3) 初項 1，公差 1　(4) 初項 $\frac{1}{2}$，公差 $-\frac{1}{2}$

解答 一般項，第 10 項の順に

(1) $2n+1$，21　(2) $-3n+16$，-14　(3) n，10　(4) $-\frac{1}{2}n+1$，-4

解説

条件を満たす等差数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 一般項は $a_n=3+(n-1)\cdot 2=2n+1$

第 10 項は $a_{10}=2\cdot 10+1=21$

(2) 一般項は $a_n=13+(n-1)(-3)=-3n+16$

第 10 項は $a_{10}=-3\cdot 10+16=-14$

(3) 一般項は $a_n=1+(n-1)\cdot 1=n$

第 10 項は $a_{10}=10$

(4) 一般項は $a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}n+1$

第 10 項は $a_{10}=-\frac{1}{2}\cdot 10+1=-4$

22 次の等差数列の一般項を求めよ。また，その第 10 項を求めよ。

(1) 1，5，9，13，……　(2) 10，7，4，1，……

解答 一般項，第 10 項の順に

(1) $4n-3$，37　(2) $-3n+13$，-17

解説

与えられた等差数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 初項は 1，　公差は $5-1=4$

よって，一般項は $a_n=1+(n-1)\cdot 4=4n-3$

第 10 項は $a_{10}=4\cdot 10-3=37$

(2) 初項は 10，　公差は $7-10=-3$

よって，一般項は $a_n=10+(n-1)(-3)=-3n+13$

第 10 項は $a_{10}=-3\cdot 10+13=-17$

23 (1) 公差が3，第8項が12である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と一般項を求めよ。
(2) 初項が10，第10項が28である等差数列 $\{a_n\}$ の公差と一般項を求めよ。
(3) 初項が1，公差が5である等差数列 $\{a_n\}$ において，第 l 項が76であるとき，l の値を求めよ。

解答 (1) 初項 -9，一般項 $3n-12$ (2) 公差 2，一般項 $2n+8$ (3) $l=16$

解説
等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると $a_n=a+(n-1)d$
(1) 第8項が12であるから $a+7\cdot 3=12$
よって $a=-9$
また $a_n=-9+(n-1)\cdot 3=3n-12$
ゆえに，初項は -9，一般項は $a_n=3n-12$
(2) 第10項が28であるから $10+9d=28$
よって $d=2$
また $a_n=10+(n-1)\cdot 2=2n+8$
ゆえに，公差は2，一般項は $a_n=2n+8$
(3) 第 l 項が76であるから $1+(l-1)\cdot 5=76$
よって $l=16$

24 第16項が -50，第21項が -80 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。
(1) 初項と公差を求めよ。また，一般項を求めよ。
(2) 4は第何項か。

解答 (1) 初項 40，公差 -6，一般項 $-6n+46$ (2) 第7項

解説
(1) この数列の初項を a，公差を d とすると $a_n=a+(n-1)d$
第16項が -50 であるから $a+15d=-50$ ……①
第21項が -80 であるから $a+20d=-80$ ……②
①，② を解いて $a=40$，$d=-6$
よって 初項 40，公差 -6
また，一般項は $a_n=40+(n-1)(-6)=-6n+46$
(2) $a_n=4$ とすると $-6n+46=4$
よって $n=7$
ゆえに，4は第7項である。

25 次のような等差数列の和を求めよ。
(1) 初項3，末項21，項数10 (2) 初項50，末項0，項数26

解答 (1) 120 (2) 650

解説
(1) 求める和は $\frac{1}{2}\cdot 10(3+21)=120$
(2) 求める和は $\frac{1}{2}\cdot 26(50+0)=650$

26 次のような等差数列の和を求めよ。
(1) 初項2，公差3，項数10 (2) 初項20，公差 -5，項数13

解答 (1) 155 (2) -130

解説
(1) 求める和は $\frac{1}{2}\cdot 10\{2\cdot 2+(10-1)\cdot 3\}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 31=155$
(2) 求める和は $\frac{1}{2}\cdot 13\{2\cdot 20+(13-1)(-5)\}=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot(-20)=-130$

27 次の等差数列の和を求めよ。
(1) 2，6，10，14，……，90 (2) 62，55，48，41，……，-8

解答 (1) 1058 (2) 297

解説
(1) この等差数列の初項は2，公差は4であるから，末項90が第 n 項であるとすると
$2+(n-1)\cdot 4=90$ よって $n=23$
ゆえに，求める和は $\frac{1}{2}\cdot 23(2+90)=1058$
(2) この等差数列の初項は62，公差は -7 であるから，末項 -8 が第 n 項であるとすると $62+(n-1)(-7)=-8$ よって $n=11$
ゆえに，求める和は $\frac{1}{2}\cdot 11\{62+(-8)\}=297$

28 (1) 等差数列100，94，88，…… において，第何項が初めて負の数となるか。
(2) 等差数列5，9，13，…… において，第何項が初めて100より大きくなるか。

解答 (1) 第18項 (2) 第25項

解説
(1) この等差数列の初項は100，公差は -6 であるから，第 n 項は
$100+(n-1)(-6)=-6n+106$
$-6n+106<0$ を解くと $n>\frac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$
これを満たす最小の自然数 n は $n=18$
よって，第18項が初めて負の数となる。
(2) この等差数列の初項は5，公差は4であるから，第 n 項は $5+(n-1)\cdot 4=4n+1$
$4n+1>100$ を解くと $n>\frac{99}{4}=24.75$
これを満たす最小の自然数 n は $n=25$
よって，第25項が初めて100より大きくなる。

29 ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_{10}=100$，$S_{20}=400$ である。この数列の初項から第30項までの和を求めよ。

解答 900

解説
この数列の初項を a，公差を d とすると $S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$
$S_{10}=100$ であるから $\frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=100$
よって $2a+9d=20$ ……①
$S_{20}=400$ であるから $\frac{1}{2}\cdot 20(2a+19d)=400$
よって $2a+19d=40$ ……②
①，② を解いて $a=1$，$d=2$
したがって，求める和は $S_{30}=\frac{1}{2}\cdot 30\{2\cdot 1+(30-1)\cdot 2\}=900$

30 等差数列32，49，66，83，…… の300と500の間にある項の和を求めよ。

解答 4770

解説
初項が32，公差が17であるから，第 n 項 a_n は $a_n=32+(n-1)\cdot 17=17n+15$
$300<17n+15<500$ を解くと $\frac{285}{17}<n<\frac{485}{17}$
よって $16.7\cdots\cdots<n<28.5\cdots\cdots$
ゆえに $17\leqq n\leqq 28$
よって，この数列の第17項から第28項までが，300と500の間にある。
第17項は $a_{17}=17\cdot 17+15=304$
第28項は $a_{28}=17\cdot 28+15=491$
第17項から第28項までの項数が12であるから，求める和は
$\frac{1}{2}\cdot 12(304+491)=4770$

31 初項が50，公差が -3 である等差数列について，次の問いに答えよ。
(1) 第何項が初めて負の数となるか。
(2) 初項から第何項までの和が最大となるか。また，その和を求めよ。

解答 (1) 第18項 (2) 第17項，和442

解説
(1) この数列の第 n 項は $50+(n-1)(-3)=-3n+53$
$-3n+53<0$ を解くと $n>\frac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$
これを満たす最小の自然数 n は $n=18$
よって，第18項が初めて負の数となる。
(2) (1)より，初項から第17項までは正の数，第18項からは負の数となるので，初項から第17項までの和が最大となる。
また，その和は $\frac{1}{2}\cdot 17\{2\cdot 50+(17-1)\cdot(-3)\}=442$
別解 初項から第 n 項までの和を S_n とすると
$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 50+(n-1)(-3)\}=\frac{1}{2}n(-3n+103)=-\frac{3}{2}n^2+\frac{103}{2}n$$
$$=-\frac{3}{2}\left(n-\frac{103}{6}\right)^2+\frac{103^2}{24}$$
$\frac{103}{6}=17.1\cdots\cdots$ で n は自然数であるから，$n=17$ のとき S_n は最大となる。(以下同じ)

$\boxed{32}$ 第 10 項が 168，第 25 項が 408 である等差数列について，次の問いに答えよ。
(1) 1000 は第何項か。
(2) 初項から第何項までの和が初めて 1000 より大きくなるか。

解答 (1) 第 62 項 (2) 第 11 項

解説
この数列の初項を a，公差を d とすると，第 n 項 a_n は $a_n=a+(n-1)d$
第 10 項が 168 であるから $a+9d=168$ ……①
第 25 項が 408 であるから $a+24d=408$ ……②
①，② を解いて $a=24$，$d=16$
よって $a_n=24+(n-1)\cdot16=16n+8$
(1) $a_n=1000$ とすると $16n+8=1000$
よって $n=62$
ゆえに，1000 は第 62 項である。
(2) 初項から第 n 項までの和は $\frac{1}{2}n\{2\cdot24+(n-1)\cdot16\}=8n(n+2)$
$8n(n+2)>1000$ から $n(n+2)>125$ ……③
n は自然数であるから，n が増加すると $n(n+2)$ も増加し，$10\cdot12=120$，$11\cdot13=143$ であるから，初項から第 11 項までの和が初めて 1000 より大きくなる。

$\boxed{33}$ 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 8 項を求めよ。
(1) 初項 3，公差 2　(2) 初項 7，公差 -4
(3) -5，-2，1，4，……　(4) 2，-3，-8，-13，……

解答 (1) $a_n=2n+1$，$a_8=17$ (2) $a_n=-4n+11$，$a_8=-21$
(3) $a_n=3n-8$，$a_8=16$ (4) $a_n=-5n+7$，$a_8=-33$

解説
(1) 一般項は $a_n=3+(n-1)\cdot2$
すなわち $a_n=2n+1$
第 8 項は $a_8=2\cdot8+1=17$
(2) 一般項は $a_n=7+(n-1)\cdot(-4)$
すなわち $a_n=-4n+11$
第 8 項は $a_8=-4\cdot8+11=-21$
(3) 公差は 第 2 項 − 初項 $=-2-(-5)=3$
よって，この等差数列の初項は -5，公差は 3 であるから，その一般項は
$a_n=-5+(n-1)\cdot3$
すなわち $a_n=3n-8$
第 8 項は $a_8=3\cdot8-8=16$
(4) 公差は 第 2 項 − 初項 $=-3-2=-5$
よって，この等差数列の初項は 2，公差は -5 であるから，その一般項は
$a_n=2+(n-1)\cdot(-5)$
すなわち $a_n=-5n+7$
第 8 項は $a_8=-5\cdot8+7=-33$

$\boxed{34}$ 初項 10，公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。
(1) -53 は第何項か。
(2) 初めて -100 より小さくなるのは第何項か。

解答 (1) 第 22 項 (2) 第 38 項

解説
数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=10+(n-1)\cdot(-3)$
すなわち $a_n=-3n+13$
(1) $a_n=-53$ とすると $-3n+13=-53$　よって $n=22$
したがって，-53 は第 22 項である。
(2) $a_n<-100$ とすると $-3n+13<-100$
よって，$-3n<-113$ であるから $n>\frac{113}{3}=37.6$……
これを満たす最小の自然数 n は $n=38$
したがって，初めて -100 より小さくなるのは第 38 項である。

$\boxed{35}$ 第 6 項が 33，第 11 項が 63 である等差数列 $\{a_n\}$ において，初めて 200 より大きくなるのは第何項か。

解答 第 34 項

解説
初項を a，公差を d とすると $a_n=a+(n-1)d$
$a_6=33$ であるから $a+5d=33$ ……①
$a_{11}=63$ であるから $a+10d=63$ ……②
①，② を解くと $a=3$，$d=6$
よって，一般項は $a_n=3+(n-1)\cdot6$
すなわち $a_n=6n-3$
$a_n>200$ とすると $6n-3>200$
よって，$6n>203$ であるから $n>\frac{203}{6}=33.8$ ……
これを満たす最小の自然数 n は $n=34$
したがって，初めて 200 より大きくなるのは第 34 項である。

$\boxed{36}$ 次のような等差数列の和 S を求めよ。
(1) 初項 8，末項 84，項数 20　(2) 初項 80，末項 0，項数 17
(3) 初項 5，公差 2，項数 16　(4) 初項 10，公差 -3，項数 41

解答 (1) 920 (2) 680 (3) 320 (4) -2050

解説
(1) $S=\frac{1}{2}\cdot20(8+84)=920$
(2) $S=\frac{1}{2}\cdot17(80+0)=680$
(3) $S=\frac{1}{2}\cdot16\{2\cdot5+(16-1)\cdot2\}=320$
(4) $S=\frac{1}{2}\cdot41\{2\cdot10+(41-1)\cdot(-3)\}=-2050$

$\boxed{37}$ 次の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，初項から第 10 項までの和 S_{10} を求めよ。
(1) 初項 1，公差 4　(2) 初項 100，公差 -2
(3) 2，7，12，……　(4) 50，46，42，……

解答 (1) $S_n=n(2n-1)$，$S_{10}=190$ (2) $S_n=-n(n-101)$，$S_{10}=910$
(3) $S_n=\frac{n(5n-1)}{2}$，$S_{10}=245$ (4) $S_n=-2n(n-26)$，$S_{10}=320$

解説
(1) $S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot4\}=\frac{1}{2}n(4n-2)=n(2n-1)$
よって $S_{10}=10(2\cdot10-1)=190$
(2) $S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot100+(n-1)\cdot(-2)\}=\frac{1}{2}n(-2n+202)=-n(n-101)$
よって $S_{10}=-10(10-101)=910$
(3) この等差数列の初項は 2，公差は 5 であるから
$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot2+(n-1)\cdot5\}=\frac{n(5n-1)}{2}$
よって $S_{10}=\frac{10(5\cdot10-1)}{2}=245$
(4) この等差数列の初項は 50，公差は -4 であるから
$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot50+(n-1)\cdot(-4)\}=\frac{1}{2}n(-4n+104)=-2n(n-26)$
よって $S_{10}=-2\cdot10(10-26)=320$

$\boxed{38}$ 次の等差数列の和 S を求めよ。
(1) 2，5，8，……，50　(2) 93，86，79，……，-40

解答 (1) 442 (2) 530

解説
(1) この等差数列の初項は 2，公差は 3 である。
項数を n とすると $2+(n-1)\cdot3=50$
すなわち $3n-1=50$　よって $n=17$
したがって，S は初項 2，末項 50，項数 17 の等差数列の和であるから
$S=\frac{1}{2}\cdot17(2+50)=442$
(2) この等差数列の初項は 93，公差は -7 である。
項数を n とすると $93+(n-1)\cdot(-7)=-40$
すなわち $-7n+100=-40$　よって $n=20$
したがって，S は初項 93，末項 -40，項数 20 の等差数列の和であるから
$S=\frac{1}{2}\cdot20\{93+(-40)\}=530$

$\boxed{39}$ 次の和を求めよ。
(1) $1+2+3+\cdots\cdots+50$　(2) $1+3+5+\cdots\cdots+37$
(3) $4+5+6+\cdots\cdots+60$　(4) $2+4+6+\cdots\cdots+80$
(5) $3+9+15+\cdots\cdots+117$

解答 (1) 1275 (2) 361 (3) 1824 (4) 1640 (5) 1200

解説
(1) $1+2+3+\cdots\cdots+50=\frac{1}{2}\cdot50(50+1)=1275$
(2) $1+3+5+\cdots\cdots+37=1+3+5+\cdots\cdots+(2\cdot19-1)=19^2=361$

(3)　$4+5+6+\cdots\cdots+60=(1+2+3+\cdots\cdots+60)-(1+2+3)=\frac{1}{2}\cdot60(60+1)-6=1824$

(4)　$2+4+6+\cdots\cdots+80=2(1+2+3+\cdots\cdots+40)=2\times\frac{1}{2}\cdot40(40+1)=1640$

(5)　$3+9+15+\cdots\cdots+117=3(1+3+5+\cdots\cdots+39)$
$=3\{1+3+5+\cdots\cdots+(2\cdot20-1)\}=3\times20^2=1200$

40 次の等差数列の和 S を求めよ。

(1)　123，120，117，……，-24　　(2)　$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，……，$\frac{99}{5}$

解答　(1)　2475　　(2)　990

解説

(1)　この等差数列の初項は 123，公差は -3 である。
項数を n とすると　$123+(n-1)\cdot(-3)=-24$
すなわち　$-3n+126=-24$　　よって　$n=50$
したがって，S は初項 123，末項 -24，項数 50 の等差数列の和であるから
$S=\frac{1}{2}\cdot50\{123+(-24)\}=2475$

(2)　$S=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\cdots\cdots+\frac{99}{5}=\frac{1}{5}(1+2+3+\cdots\cdots+99)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\cdot99(99+1)=990$

41 等差数列 1，5，9，…… の第 31 項から第 100 項までの和 S を求めよ。

解答　18130

解説

この等差数列の初項は 1，公差は 4 であるから，初項から第 n 項までの和を S_n とすると
$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot4\}=n(2n-1)$
求める和 S は $S_{100}-S_{30}$ と等しいから
$S=S_{100}-S_{30}=100(2\cdot100-1)-30(2\cdot30-1)=19900-1770=18130$

別解　この等差数列の初項は 1，公差は 4 であるから，
第 31 項は　$1+(31-1)\cdot4=121$
第 100 項は　$1+(100-1)\cdot4=397$
第 31 項から第 100 項までの項の個数は 70 個である。
よって，求める和 S は初項 121，末項 397，項数 70 の等差数列の和であるから
$S=\frac{1}{2}\cdot70(121+397)=18130$

42 初項が 70，公差が -4 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。
(1)　第何項が初めて負の数になるか。
(2)　初項から第何項までの和が最大であるか。また，その和を求めよ。

解答　(1)　第 19 項　　(2)　第 18 項，和 648

解説

この等差数列の一般項は　$a_n=70+(n-1)\cdot(-4)$
すなわち　$a_n=74-4n$

(1)　$a_n<0$ とすると　$74-4n<0$
よって　$n>\frac{37}{2}=18.5$
これを満たす最小の自然数 n は　$n=19$
したがって，第 19 項が初めて負の数になる。

(2)　(1) の結果から
$a_1>0$，$a_2>0$，……，$a_{18}>0$，$a_{19}<0$，$a_{20}<0$，……
よって，初項から第 18 項までの和が最大である。
また，その和は　$\frac{1}{2}\cdot18\{2\cdot70+(18-1)\cdot(-4)\}=648$

43 等差数列 111，117，123，129，…… について，400 と 600 の間にある項の個数を求めよ。また，それらの項の和を求めよ。

解答　33個，和 16533

解説

この等差数列を $\{a_n\}$ とする。
初項は 111，公差は 6 であるから，一般項は　$a_n=111+(n-1)\cdot6$
すなわち　$a_n=6n+105$
$a_n>400$ とすると　$6n+105>400$　　よって　$n>\frac{295}{6}=49.1\cdots\cdots$
これを満たす最小の自然数 n は　$n=50$
ゆえに，第 50 項が初めて 400 より大きくなる。
$a_n<600$ とすると　$6n+105<600$　　よって　$n<\frac{165}{2}=82.5$
これを満たす最大の自然数 n は　$n=82$
ゆえに，第 82 項までは 600 より小さい。
したがって，求める項の個数は　$(82-50)+1=33$（個）
また　$a_{50}=6\cdot50+105=405$
$a_{82}=6\cdot82+105=597$
よって，求める和は，初項 405，末項 597，項数 33 の等差数列の和であるから
$\frac{1}{2}\cdot33(405+597)=16533$

44 初項が -29，公差が 3 である等差数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。次のような n の値を求めよ。
(1)　S_n が最小となる n の値
(2)　S_n が正の数となる最小の n の値

解答　(1)　$n=10$　　(2)　$n=21$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項は
$a_n=-29+(n-1)\cdot3$　すなわち　$a_n=3n-32$
$a_n>0$ とすると　$3n-32>0$
よって　$n>\frac{32}{3}=10.6\cdots\cdots$
これを満たす最小の自然数 n は　$n=11$
したがって　$a_1<0$，$a_2<0$，……，$a_{10}<0$，$a_{11}>0$，$a_{12}>0$，……
ゆえに，初項から第 10 項までの和 S_{10} が最小である。
よって，求める n の値は　$n=10$

(2)　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-29)+(n-1)\cdot3\}=\frac{1}{2}n(3n-61)$
$S_n>0$ とすると　$\frac{1}{2}n(3n-61)>0$
$n>0$ であるから　$3n-61>0$
よって　$n>\frac{61}{3}=20.3\cdots\cdots$
これを満たす最小の自然数 n は　$n=21$
よって，求める n の値は　$n=21$

45 次の等差数列の一般項を求めよ。
(1)　2，6，10，14，18，……　　(2)　23，20，17，14，11，……

解答　(1)　$4n-2$　　(2)　$-3n+26$

解説

与えられた等差数列を $\{a_n\}$ とする。
(1)　初項 2，公差 4 であるから，一般項は
$a_n=2+(n-1)\cdot4$　すなわち　$a_n=4n-2$
(2)　初項 23，公差 -3 であるから，一般項は
$a_n=23+(n-1)\cdot(-3)$　すなわち　$a_n=-3n+26$

46 第 5 項が -5，第 10 項が 15 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の一般項を求めよ。

解答　$a_n=4n-25$

解説

この数列の初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$
第 5 項が -5 であるから　$a+4d=-5$　……①
第 10 項が 15 であるから　$a+9d=15$　……②
①，② を解いて　$a=-21$，$d=4$
よって，一般項は　$a_n=-21+(n-1)\cdot4=4n-25$

47 第 10 項が 30，第 20 項が 0 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。
(1)　初項と公差を求めよ。また，一般項を求めよ。
(2)　-48 は第何項か。

解答　(1)　初項 57，公差 -3，一般項 $a_n=-3n+60$　　(2)　第 36 項

解説

(1)　この等差数列の初項を a，公差を d とすると　$a_n=a+(n-1)d$
第 10 項が 30 であるから　$a+9d=30$
第 20 項が 0 であるから　$a+19d=0$
これを解いて　$a=57$，$d=-3$
よって　初項は 57，公差は -3
また，一般項は
$a_n=57+(n-1)\cdot(-3)=-3n+60$
(2)　第 n 項が -48 であるとすると
$-3n+60=-48$　　これを解いて　$n=36$
よって，-48 は第 36 項である。

48 数列 3，b，$3b$ が等差数列であるとき，b の値を求めよ。

解答 $b=-3$

解説
数列 3，b，$3b$ が等差数列であるから
$2b=3+3b$ よって $b=-3$

49 数列 a，6，$2a$ が等差数列であるとき，a の値を求めよ。

解答 $a=4$

解説
数列 a，6，$2a$ が等差数列であるから
$2\cdot6=a+2a$ よって $a=4$

50 10 から 100 までの自然数のうち，3 で割って 2 余る数の和 S を求めよ。

解答 1635

解説
10 から 100 までの自然数のうち，3 で割って 2 余る数を順に並べると
$3\cdot3+2,\ 3\cdot4+2,\ 3\cdot5+2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot32+2$
となる。これは初項 11，末項 98，項数 30 の等差数列であるから，その和 S は
$$S=\frac{1}{2}\cdot30(11+98)=1635$$

51 1 から 100 までの自然数のうち，次のような数の和を求めよ。
(1) 3 の倍数　(2) 3 で割り切れない数

解答 (1) 1683　(2) 3367

解説
(1) 1 から 100 までの自然数のうち，3 の倍数を順に並べると
$3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33$
となる。これは，初項 3，末項 99，項数 33 の等差数列であるから，その和 S は
$$S=\frac{1}{2}\cdot33(3+99)=1683$$
(2) 1 から 100 までの自然数のうち，3 で割り切れない数は，1 から 100 までの自然数から 3 の倍数を取り除いた数である。
1 から 100 までの自然数の和は
$$\frac{1}{2}\cdot100(1+100)=5050$$
1 から 100 までの自然数のうち，3 の倍数の和は，(1) から 1683 である。
したがって，求める和 S は
$$S=5050-1683=3367$$

52 10 から 100 までの自然数のうち，次のような数の和を求めよ。
(1) 4 で割って 3 余る数　(2) 4 の倍数
(3) 4 で割り切れない数

解答 (1) 1265　(2) 1288　(3) 3717

解説
(1) 10 から 100 までの自然数のうち，4 で割って 3 余る数を順に並べると
$4\cdot2+3,\ 4\cdot3+3,\ 4\cdot4+3,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot24+3$
となる。これは，初項 11，末項 99，項数 23 の等差数列であるから，その和 S は
$$S=\frac{1}{2}\cdot23(11+99)=1265$$
(2) 10 から 100 までの自然数のうち，4 の倍数を順に並べると
$4\cdot3,\ 4\cdot4,\ 4\cdot5,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25$
となる。これは，初項 12，末項 100，項数 23 の等差数列であるから，その和 S は
$$S=\frac{1}{2}\cdot23(12+100)=1288$$
(3) 10 から 100 までの自然数のうち，4 で割り切れない数は，10 から 100 までの自然数から 4 の倍数を取り除いた数である。
10 から 100 までの自然数の和は
$$\frac{1}{2}\cdot91(10+100)=5005$$
10 から 100 までの自然数のうち，4 の倍数の和は，(2) から 1288 である。
したがって，求める和 S は
$$S=5005-1288=3717$$

53 100 以下の自然数のうち，4 で割ると 2 余る数は何個あるか。また，それらすべての和を求めよ。[20 点]

解答 4 で割ると 2 余る自然数は $4n+2$（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$）と表すことができる。
$4n+2\leqq100$ とすると　$n\leqq24.5$
したがって，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 24$ であるから，全部で 25 個ある。
また，和は　$2+6+10+14+\cdots\cdots+98=\frac{1}{2}\cdot25(2+98)=1250$

解説
4 で割ると 2 余る自然数は $4n+2$（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$）と表すことができる。
$4n+2\leqq100$ とすると　$n\leqq24.5$
したがって，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 24$ であるから，全部で 25 個ある。
また，和は　$2+6+10+14+\cdots\cdots+98=\frac{1}{2}\cdot25(2+98)=1250$

54 4 つの数 2，a，b，c が等差数列をなし，また，$2a$，$b+1$，$c-b$ が等差数列をなしているとき，a，b，c の値を求めよ。[25 点]

解答 2，a，b が等差数列であるから　$2a=2+b$　すなわち　$b=2a-2$ ……①
また，a，b，c が等差数列であるから　$2b=a+c$ ……②
更に，$2a$，$b+1$，$c-b$ が等差数列であるから　$2(b+1)=2a+c-b$
すなわち　$3b=2a+c-2$ ……③
① を ②，③ に代入して　$3a=c+4$，$4a=c+4$　これより　$a=0$，$c=-4$
① に代入して　$b=-2$
したがって　$a=0$，$b=-2$，$c=-4$

解説
2，a，b が等差数列であるから　$2a=2+b$　すなわち　$b=2a-2$ ……①
また，a，b，c が等差数列であるから　$2b=a+c$ ……②
更に，$2a$，$b+1$，$c-b$ が等差数列であるから　$2(b+1)=2a+c-b$
すなわち　$3b=2a+c-2$ ……③
① を ②，③ に代入して　$3a=c+4$，$4a=c+4$　これより　$a=0$，$c=-4$
① に代入して　$b=-2$
したがって　$a=0$，$b=-2$，$c=-4$

55 初項も公差も自然数である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 10 項までの和が 120 であるとき，この等差数列の一般項を求めよ。ただし，公差は 1 より大きいとする。[25 点]

解答 初項を a，公差を d とする。
初項から第 10 項までの和が 120 であるから　$\frac{1}{2}\cdot10(2a+9d)=120$
よって　$2a+9d=24$ ……①
$a\geqq1$ より　$9d=24-2a\leqq22$
d は 1 より大きい自然数であるから　$d=2$
これを ① に代入して　$2a+18=24$
ゆえに　$a=3$
したがって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\cdot2=2n+1$

解説
初項を a，公差を d とする。
初項から第 10 項までの和が 120 であるから　$\frac{1}{2}\cdot10(2a+9d)=120$
よって　$2a+9d=24$ ……①
$a\geqq1$ より　$9d=24-2a\leqq22$
d は 1 より大きい自然数であるから　$d=2$
これを ① に代入して　$2a+18=24$
ゆえに　$a=3$
したがって，一般項は　$a_n=3+(n-1)\cdot2=2n+1$

56 等差数列をなす 3 数があって，その和は 18，積は 162 である。この 3 数を求めよ。

解答 3，6，9

解説
この数列の中央の項を b，公差を d とすると，3 数は $b-d$，b，$b+d$ と表される。
和が 18，積が 162 であるから
$(b-d)+b+(b+d)=18$ ……①，
$(b-d)b(b+d)=162$ ……②
① を整理すると　$3b=18$　ゆえに　$b=6$
これを ② に代入すると　$6(6^2-d^2)=162$　よって　$6^2-d^2=27$
ゆえに　$d^2=9$　したがって　$d=\pm3$
ゆえに，求める 3 数は　3，6，9　または　9，6，3
すなわち　3，6，9

別解 等差数列をなす 3 数の数列を a，b，c とすると　$2b=a+c$ ……①
条件から　$a+b+c=18$ ……②，$abc=162$ ……③
① を ② に代入して　$3b=18$　ゆえに　$b=6$
このとき，①，③ から　$a+c=12$，$ac=27$
よって，a，c は 2 次方程式 $x^2-12x+27=0$ の 2 つの解である。
$(x-3)(x-9)=0$ を解いて　$x=3,\ 9$
すなわち　$(a,\ c)=(3,\ 9),\ (9,\ 3)$
したがって，求める 3 数は　3，6，9

57 (1) 等差数列をなす3数があって，その和が15，2乗の和が173である。この3数を求めよ。

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ において，$a_1+a_3+a_5=-12$，$a_1a_3a_5=80$ が成り立つとする。この数列の初項と公差を求めよ。

解答 (1) -2，5，12　(2) 初項 -10，公差3 または 初項2，公差 -3

解説

(1) この数列の中央の項を b，公差を d とすると，3数は $b-d$，b，$b+d$ と表される。和が15，2乗の和が173であるから

$$(b-d)+b+(b+d)=15 \quad \cdots\cdots ①,$$
$$(b-d)^2+b^2+(b+d)^2=173 \quad \cdots\cdots ②$$

① を整理すると　$3b=15$　ゆえに　$b=5$

② を整理すると　$3b^2+2d^2=173$

$b=5$ を代入して　$3\cdot5^2+2d^2=173$

よって　$d^2=49$　したがって　$d=\pm7$

ゆえに，求める3数は　-2，5，12　または　12，5，-2

すなわち　-2，5，12

別解 等差数列をなす3数の数列を a，b，c とすると

$$2b=a+c \quad \cdots\cdots ①$$

条件から　$a+b+c=15$　……②，$a^2+b^2+c^2=173$　……③

① を ② に代入して　$3b=15$　ゆえに　$b=5$

このとき，①，③ から　$a+c=10$，$a^2+c^2=148$

よって　$(a+c)^2-2ac=148$

ゆえに　$10^2-2ac=148$

したがって　$ac=-24$

よって，a，c は2次方程式 $x^2-10x-24=0$ の2つの解である。

$(x+2)(x-12)=0$ を解いて　$x=-2$，12

すなわち　$(a,\ c)=(-2,\ 12)$，$(12,\ -2)$

したがって，求める3数は　-2，5，12

(2) a_3 を b，公差を d とすると

$$a_1=b-2d,\quad a_3=b,\ a_5=b+2d$$

これらを条件式に代入して

$$(b-2d)+b+(b+2d)=-12 \quad \cdots\cdots ①,$$
$$(b-2d)b(b+2d)=80 \quad \cdots\cdots ②$$

① を整理すると　$3b=-12$　よって　$b=-4$

$b=-4$ を ② に代入すると　$-4(16-4d^2)=80$

よって　$16-4d^2=-20$　ゆえに　$d^2=9$

したがって　$d=\pm3$

$d=3$ のとき　$a_1=b-2d=-4-2\cdot3=-10$

$d=-3$ のとき　$a_1=b-2d=-4-2\cdot(-3)=2$

よって　初項 -10，公差3 または 初項2，公差 -3

別解 数列 a_1，a_3，a_5 も等差数列をなすから　$2a_3=a_1+a_5$　……①

条件から　$a_1+a_3+a_5=-12$　……②，$a_1a_3a_5=80$　……③

① を ② に代入して　$3a_3=-12$　よって　$a_3=-4$

ゆえに，①，③ から　$a_1+a_5=-8$，$a_1a_5=-20$

よって，a_1，a_5 は2次方程式 $x^2+8x-20=0$ の2つの解である。

$(x-2)(x+10)=0$ を解いて　$x=2$，-10

すなわち　$(a_1,\ a_5)=(2,\ -10)$，$(-10,\ 2)$

$(a_1,\ a_3,\ a_5)=(2,\ -4,\ -10)$ のとき　初項2，公差 $\dfrac{-4-2}{2}=-3$

$(a_1,\ a_3,\ a_5)=(-10,\ -4,\ 2)$ のとき　初項 -10，公差 $\dfrac{-4-(-10)}{2}=3$

58 100から200までの整数のうち，次の数の和を求めよ。

(1) 7で割って2余る数　(2) 4または6の倍数

解答 (1) 2235　(2) 5250

解説

(1) 100から200までで，7で割って2余る数は

$$7\cdot14+2,\ 7\cdot15+2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot28+2$$

これは，初項が $7\cdot14+2=100$，末項が $7\cdot28+2=198$，項数が $28-14+1=15$ の等差数列であるから，その和は　$\dfrac{1}{2}\cdot15(100+198)=2235$

別解 $S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$ を利用すると　$\dfrac{1}{2}\cdot15\{2\cdot100+(15-1)\cdot7\}=2235$

(2) 100から200までの4の倍数は

$$4\cdot25,\ 4\cdot26,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot50$$

これは，初項100，末項200，項数26の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot26(100+200)=3900 \quad \cdots\cdots ①$$

100から200までの6の倍数は　$6\cdot17$，$6\cdot18$，……，$6\cdot33$

これは，初項102，末項198，項数17の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot17(102+198)=2550 \quad \cdots\cdots ②$$

100から200までの12の倍数は　$12\cdot9$，$12\cdot10$，……，$12\cdot16$

これは，初項108，末項192，項数8の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot8(108+192)=1200 \quad \cdots\cdots ③$$

よって，①，②，③ から，求める和は　$3900+2550-1200=5250$

59 2桁の自然数のうち，次の数の和を求めよ。

(1) 5で割って3余る数　(2) 奇数または3の倍数

解答 (1) 999　(2) 3285

解説

(1) 2桁の自然数のうち，5で割って3余る数は　$5\cdot2+3$，$5\cdot3+3$，……，$5\cdot19+3$

これは初項13，末項98，項数18の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot18(13+98)=999$$

(2) 2桁の奇数は　$2\cdot5+1$，$2\cdot6+1$，……，$2\cdot49+1$

これは初項11，末項99，項数45の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot45(11+99)=2475 \quad \cdots\cdots ①$$

2桁の3の倍数は　$3\cdot4$，$3\cdot5$，……，$3\cdot33$

これは初項12，末項99，項数30の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot30(12+99)=1665 \quad \cdots\cdots ②$$

また，2桁の自然数のうち奇数かつ3の倍数は　$3\cdot5$，$3\cdot7$，……，$3\cdot33$

これは初項15，末項99の等差数列である。

また，その項数は等差数列5，7，……，33の項数に等しい。

ゆえに，項数を n とすると $5+(n-1)\cdot2=33$ から　$n=15$

よって，奇数かつ3の倍数の和は　$\dfrac{1}{2}\cdot15(15+99)=855$　……③

①，②，③ から，求める和は　$2475+1665-855=3285$

60 200以下の自然数のうち，3の倍数であるが，4の倍数でも5の倍数でもない数の総和を求めよ。

解答 3996

解説

求める和は，3の倍数の和から，3の倍数のうち4または5の倍数である数の和を引いたものである。

200以下の自然数のうち，3の倍数は　3×1，3×2，……，3×66

3かつ4の倍数，すなわち12の倍数は　12×1，12×2，……，12×16

3かつ5の倍数，すなわち15の倍数は　15×1，15×2，……，15×13

3かつ4かつ5の倍数，すなわち60の倍数は　60，120，180

1から200までの自然数のうち，n の倍数の和を S_n とすると

$$S_3=3(1+2+\cdots\cdots+66)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot66(1+66)=6633$$

同様に　$S_{12}=12\cdot\dfrac{1}{2}\cdot16(1+16)=1632$

$$S_{15}=15\cdot\frac{1}{2}\cdot13(1+13)=1365$$

$$S_{60}=60+120+180=360$$

よって，3の倍数のうち4または5の倍数である数の和は

$$S_{12}+S_{15}-S_{60}=1632+1365-360=2637$$

したがって，求める和は　$S_3-2637=6633-2637=3996$

61 等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項がそれぞれ $a_n=4n-3$，$b_n=7n-5$ であるとき，この2つの数列に共通に含まれる数を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 $c_n=28n-19$

解説

$a_l=b_m$ とすると　$4l-3=7m-5$

よって　$4l-7m=-2$　……①

$l=-4$，$m=-2$ は ① の整数解の1つであるから，① は $4(l+4)-7(m+2)=0$ と変形できる。ゆえに　$4(l+4)=7(m+2)$

4と7は互いに素であるから，k を整数として

$$l+4=7k,\ m+2=4k$$

すなわち　$l=7k-4$，$m=4k-2$　と表される。

ここで，l，m は自然数であるから，$7k-4\geqq1$ かつ $4k-2\geqq1$ より，k は自然数である。

よって，数列 $\{c_n\}$ の第 k 項は，数列 $\{a_n\}$ の第 l 項すなわち第 $(7k-4)$ 項で

$$4(7k-4)-3=28k-19$$

求める一般項は，k を n におき換えて　$c_n=28n-19$

別解 4と7の最小公倍数は　28

$\{a_n\}$：1，5，9，13，17，21，25，29，……であり，

$\{b_n\}$：2，9，16，23，30，…… であるから　　$c_1=9$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 9，公差 28 の等差数列であるから，その一般項は

$$c_n=9+(n-1)\cdot 28=28n-19$$

62 等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項がそれぞれ $a_n=3n-1$，$b_n=4n+1$ であるとき，この 2 つの数列に共通に含まれる数を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$c_n=12n-7$

解説

$a_l=b_m$ とすると　　$3l-1=4m+1$

よって　　$3l-4m=2$　……①

$l=-2$，$m=-2$ は ① の整数解の 1 つであるから，① は

$3(l+2)-4(m+2)=0$　　と変形できる。

ゆえに　　$3(l+2)=4(m+2)$

3 と 4 は互いに素であるから，k を整数として

$l+2=4k$，$m+2=3k$

すなわち　$l=4k-2$，$m=3k-2$ と表される。

ここで，l，m は自然数であるから，$4k-2\geqq 1$ かつ $3k-2\geqq 1$ より，k は自然数である。

よって，数列 $\{c_n\}$ の第 k 項は，数列 $\{a_n\}$ の第 l 項すなわち第 $(4k-2)$ 項であり

$3(4k-2)-1=12k-7$

求める一般項は，k を n におき換えて　　$c_n=12n-7$

別解　3 と 4 の最小公倍数は　　12

$\{a_n\}$：2，5，8，11，14，…… であり，$\{b_n\}$：5，9，13，…… であるから　　$c_1=5$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 5，公差 12 の等差数列であるから，その一般項は

$$c_n=5+(n-1)\cdot 12=12n-7$$

63 数列 a，3，a^2 が等差数列であるとき，a の値を求めよ。

解答　$a=2$，-3

解説

数列 a，3，a^2 が等差数列であるから　　$2\cdot 3=a+a^2$

整理すると　　$a^2+a-6=0$

左辺を因数分解すると　　$(a-2)(a+3)=0$

したがって　　$a=2$，-3

64 10 から 100 までの自然数のうち，次のような数の和を求めよ。

(1)　6 で割って 1 余る数　　(2)　6 の倍数

(3)　6 で割り切れない数

解答　(1)　825　　(2)　810　　(3)　4195

解説

(1)　10 から 100 までの自然数のうち，6 で割って 1 余る数を順に並べると

$6\cdot 2+1$，$6\cdot 3+1$，……，$6\cdot 16+1$

これは，初項 13，末項 97，項数 15 の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot 15(13+97)=825$$

(2)　10 から 100 までの自然数のうち，6 の倍数を順に並べると

$6\cdot 2$，$6\cdot 3$，$6\cdot 4$，……，$6\cdot 16$

これは，初項 12，末項 96，項数 15 の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}\cdot 15(12+96)=810$$

(3)　10 から 100 までの自然数の和は　　$\dfrac{1}{2}\cdot 91(10+100)=5005$

(2) から，求める和は　　$5005-810=4195$

65 次のような 3 つの数，5 つの数を求めよ。

(1)　3 つの数は等差数列をなし，和は 15，2 乗の和は 83

(2)　5 つの数は等差数列をなし，和は 5，2 乗の和は 45

解答　(1)　3，5，7　　(2)　-3，-1，1，3，5

解説

(1)　等差数列を a，b，c とすると　　$2b=a+c$　……①

また　　$a+b+c=15$　……②

$a^2+b^2+c^2=83$　……③

①，② から　　$b=5$，$c=10-a$

③ に代入して整理すると　　$a^2-10a+21=0$

ゆえに　　$(a-3)(a-7)=0$　　　よって　　$a=3$，7

ゆえに　　$a=3$，$b=5$，$c=7$　または　$a=7$，$b=5$，$c=3$

したがって，求める 3 つの数は　　3，5，7

別解　等差数列を $a-d$，a，$a+d$ とすると

$(a-d)+a+(a+d)=15$

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=83$

よって　　$3a=15$　……①

$3a^2+2d^2=83$　……②

① から　　$a=5$

このとき，② から　　$d^2=4$

ゆえに　　$d=\pm 2$

したがって，求める 3 つの数は　　3，5，7

(2)　等差数列を $a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$ とすると

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=5$

$(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=45$

ゆえに　　$5a=5$　……①

$a^2+2d^2=9$　……②

① から　　$a=1$

② に代入して　　$d=\pm 2$

よって，求める 5 つの数は　　-3，-1，1，3，5

66 1 から 300 までの自然数について，次のような数の和を求めよ。

(1)　3 または 7 で割り切れる数　　(2)　3 でも 7 でも割り切れない数

解答　(1)　19266　　(2)　25884

解説

(1)　3 で割り切れる数の和は，初項 3，末項 300，項数 100 の等差数列の和に等しいから

$$\frac{1}{2}\cdot 100(3+300)=15150$$

7 で割り切れる数の和は，初項 7，末項 294，項数 42 の等差数列の和に等しいから

$$\frac{1}{2}\cdot 42(7+294)=6321$$

3 と 7 の両方で割り切れる数，すなわち 21 で割り切れる数の和は，初項 21，末項 294，項数 14 の等差数列の和に等しいから　　$\dfrac{1}{2}\cdot 14(21+294)=2205$

よって，3 または 7 で割り切れる数の和は　　$15150+6321-2205=19266$

(2)　1 から 300 までの自然数の和は　　$\dfrac{1}{2}\cdot 300(1+300)=45150$

(1) から，3 でも 7 でも割り切れない数の和は　　$45150-19266=25884$

67 初項 4，公差 5 の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 8，公差 7 の等差数列 $\{b_n\}$ について，これら 2 つの数列に共通に含まれる項を，順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$c_n=35n-6$

解説

$a_n=4+(n-1)\cdot 5=5n-1$

$b_n=8+(n-1)\cdot 7=7n+1$

共通な項を $a_p=b_q$ とすると　　$5p-1=7q+1$　……①

よって　　$5(p+1)=7(q+1)$　……②

5 と 7 は互いに素であるから，$p+1$ は 7 の倍数である。

ゆえに，$p+1=7k$（$k=1$，2，3，……）と表される。

よって　　$p=7k-1$

したがって，数列 $\{c_n\}$ の第 n 項は数列 $\{a_n\}$ の第 $(7n-1)$ 項で

$$c_n=a_{7n-1}=5\cdot(7n-1)-1=35n-6$$

参考　[① を ② のように変形する方法]

① から　　$5p-7q=2$　……③

$p=-1$，$q=-1$ は ③ を満たす整数であり　　$5\cdot(-1)-7\cdot(-1)=2$　……④

③－④ から　　$5(p+1)-7(q+1)=0$

すなわち　　$5(p+1)=7(q+1)$

（この方法は，数学 A の「整数の性質」で 1 次不定方程式を解く際に学ぶ方法である。）

別解　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の項を書き出すと

$\{a_n\}$：4，9，14，19，24，<u>29</u>，34，39，44，49，54，59，<u>64</u>，……

$\{b_n\}$：8，15，22，<u>29</u>，36，43，50，57，<u>64</u>，……

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項を書き出すと

$\{c_n\}$：29，64，……

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項が 29 で，数列 $\{a_n\}$ の公差 5 と数列 $\{b_n\}$ の公差 7 の最小公倍数 35 を公差とする等差数列である。

したがって，数列 $\{c_n\}$ の一般項は　　$c_n=29+(n-1)\cdot 35=35n-6$

68 等差数列をなす 3 つの数がある。その和は 3 で，2 乗の和は 35 である。この 3 つの数を求めよ。

解答　$-3,\ 1,\ 5$

解説

この等差数列を a，b，c とすると　$2b=a+c$　…… ①

また　$a+b+c=3$　…… ②,

$a^2+b^2+c^2=35$　…… ③

①，② から　$b=1$，$c=2-a$

これを ③ に代入して　$a^2-2a-15=0$

ゆえに　$(a+3)(a-5)=0$　　よって　$a=-3,\ 5$

$c=2-a$ から　$a=-3$，$c=5$　または　$a=5$，$c=-3$

したがって，求める 3 つの数は　$-3,\ 1,\ 5$

別解　この等差数列を $a-d$，a，$a+d$ とすると

$(a-d)+a+(a+d)=3$　…… ④,

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=35$　…… ⑤

④ から　$a=1$

これを ⑤ に代入して　$d=\pm4$

ゆえに　$-3,\ 1,\ 5$

69 第 10 項が 24，第 30 項が 64 である等差数列について，初項から第何項までの和が初めて 200 より大きくなるか。

解答　第 12 項

解説

この等差数列の初項を a，公差を d とすると，第 n 項は　$a+(n-1)d$

第 10 項が 24 であるから　$a+9d=24$　…… ①

第 30 項が 64 であるから　$a+29d=64$　…… ②

①，② を解いて　$a=6$，$d=2$

よって，初項 6，公差 2，項数 n の等差数列の和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot6+(n-1)\cdot2\}=n(n+5)$$

n は自然数であるから，n が増加すると S_n も増加し，

$S_{11}=11\cdot16=176$，$S_{12}=12\cdot17=204$

である。

したがって，初項から第 12 項までの和が初めて 200 より大きくなる。

70 $a_n=3n-2$，$b_n=4n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる 2 つの等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とする。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

解答　$c_n=12n+1$

解説

共通な項を $a_p=b_q$ とすると　$3p-2=4q+1$

よって　$3(p-1)=4q$

3 と 4 は互いに素であるから，q は 3 の倍数である。

ゆえに，$q=3k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と表される。

よって，数列 $\{c_n\}$ の第 n 項は数列 $\{b_n\}$ の第 $3n$ 項で

$c_n=b_{3n}=4\cdot3n+1=12n+1$

別解　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の項を書き出すと

$\{a_n\}$：1，4，7，10，13，16，19，22，25，28，31，34，37，……

$\{b_n\}$：5，9，13，17，21，25，29，33，37，……

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に共通に含まれる項を書き出すと

$\{c_n\}$：13，25，37，……

よって，数列 $\{c_n\}$ は，初項が 13 で，数列 $\{a_n\}$ の公差 3 と数列 $\{b_n\}$ の公差 4 の最小公倍数 12 を公差とする等差数列である。

したがって，数列 $\{c_n\}$ の一般項は　$c_n=13+(n-1)\cdot12=12n+1$