なす角クイズ（空間）

1 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(-2,\ 2,\ 4)$ について，その内積を求めよ。また，そのなす角 θ を求めよ。

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$，$\theta=60°$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-2)+2\times2+1\times4=6$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=60°$

2 次の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-1,\ 0,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 2,\ 2)$

(2)　$\vec{a}=(2,\ -3,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 1,\ 2)$

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，$\theta=45°$　　(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-7$，$\theta=120°$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times(-1)+0\times2+1\times2=3$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=45°$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+(-3)\times1+1\times2=-7$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-7}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}$$

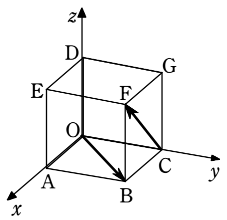
$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=120°$

3 右の図の立方体 OABC-DEFG は，1辺の長さが2である。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{CF}$ を成分表示せよ。

(2)　内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CF}$ を求めよ。

(3)　ベクトル $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{CF}$ のなす角を求めよ。



解答　(1)　$\overrightarrow{OB}=(2,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{CF}=(2,\ 0,\ 2)$　　(2)　4　　(3)　60°

解説

(1)　$\overrightarrow{OB}=(2,\ 2,\ 0)$

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OC}=(2,\ 2,\ 2)-(0,\ 2,\ 0)=(2,\ 0,\ 2)$

(2)　(1) より

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CF}=2\times2+2\times0+0\times2=4$

(3)　$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2^2+2^2+0^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{CF}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(2) より $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CF}=4$ であるから，$\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{CF}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{CF}|}=\frac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=60°$

4 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ を，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸に関する基本ベクトルとし，ベクトル $\vec{a}=(-1,\ \sqrt{2},\ 1)$ と $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$ のなす角を，それぞれ α，β，γ とする。

(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ の値を求めよ。　　(2)　α，β，γ を求めよ。

解答　(1)　$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$　　(2)　$\alpha=120°$，$\beta=45°$，$\gamma=60°$

解説

(1)　$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$

$|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=|\vec{e_3}|=1$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

よって　　$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e_1}}{|\vec{a}||\vec{e_1}|}=\frac{-1}{2\times1}=-\frac{1}{2}$

$$\cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e_2}}{|\vec{a}||\vec{e_2}|}=\frac{\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e_3}}{|\vec{a}||\vec{e_3}|}=\frac{1}{2\times1}=\frac{1}{2}$$

(2)　$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\frac{1}{2}$ より

$\alpha=120°$，$\beta=45°$，$\gamma=60°$

5 次の2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積とそのなす角 θ を求めよ。　[8点×2=16点]

(1)　$\vec{a}=(2,\ -2,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -4,\ -1)$　　(2)　$\vec{a}=(3,\ 5,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,\ 1,\ 2)$

解答　(1)　内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+(-2)\times(-4)+1\times(-1)=9$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{9}{3\times3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=45°$

(2)　内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-3)+5\times1+2\times2=0$　　また　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$

よって　$\theta=90°$

解説

(1)　内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+(-2)\times(-4)+1\times(-1)=9$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{9}{3\times3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=45°$

(2)　内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-3)+5\times1+2\times2=0$　　また　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$

よって　$\theta=90°$

6 (1)　$\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ \sqrt{6},\ -1)$ の内積とそのなす角 θ を求めよ。

(2)　A $(-2,\ 1,\ 3)$，B $(-3,\ 1,\ 4)$，C $(-3,\ 3,\ 5)$ とする。

（ア）　2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ。

（イ）　3点 A，B，C で定まる △ABC の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{6}$，$\theta=120°$　　(2)　（ア）　45°　　（イ）　$S=\frac{3}{2}$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+(-1)\times\sqrt{6}+1\times(-1)=-\sqrt{6}$

また，$|\vec{a}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1+6+1}=2\sqrt{2}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=120°$

(2)　（ア）　$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 2,\ 2)$ であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-1)+0\times2+1\times2=3$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1+4+4}=3$

$\angle BAC=\theta$ とすると　　$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0°<\theta<180°$ であるから　　$\theta=45°$

（イ）　$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}$

別解　$S=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2\cdot3^2-3^2}=\frac{3}{2}$

7 (1)　次の2つのベクトルの内積とそのなす角 θ を，それぞれ求めよ。

（ア）　$(-2,\ 1,\ 2)$，$(-1,\ 1,\ 0)$　　（イ）　$(1,\ -\sqrt{6},\ 3)$，$(0,\ \sqrt{3},\ \sqrt{2})$

(2)　3点 A $(0,\ 1,\ 1)$，B $(0,\ 4,\ -3)$，C $(-1,\ 2,\ -2)$ で定まる △ABC の面積 S を求めよ。

解答　(1)　（ア）　3，$\theta=45°$　　（イ）　0，$\theta=90°$　　(2)　$S=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

解説

(1)　（ア）　内積は　　$(-2)\times(-1)+1\times1+2\times0=3$

また　　$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=45°$

（イ）　内積は　　$1\times0+(-\sqrt{6})\times\sqrt{3}+3\times\sqrt{2}=0$

2つのベクトルはともに $\vec{0}$ ではないから，垂直である。

したがって　　$\theta=90°$

(2)　$\overrightarrow{AB}=(0-0,\ 4-1,\ -3-1)=(0,\ 3,\ -4)$

$\overrightarrow{AC}=(-1-0,\ 2-1,\ -2-1)=(-1,\ 1,\ -3)$

よって　　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\times(-1)+3\times1+(-4)\times(-3)=15$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+3^2+(-4)^2}=5$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{11}$

$\angle BAC=\theta$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{15}{5\times\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{11}}$$

ゆえに　$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta=\frac{1}{2}\times5\times\sqrt{11}\times\sqrt{\frac{2}{11}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

別解　$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5^2(\sqrt{11})^2-15^2}$

$=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

8 (1)　次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積となす角 θ を求めよ。

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 1)$,　$\vec{b}=(2,\ 2,\ 1)$

(2)　3点 A(1, 1, 0), B(0, 2, 2), C(1, 2, 1) を頂点とする △ABC において，$\angle BAC$ の大きさ θ を求めよ。

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$, $\theta=45^\circ$　　(2)　$\theta=30^\circ$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+0\times2+1\times1=3$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=45^\circ$

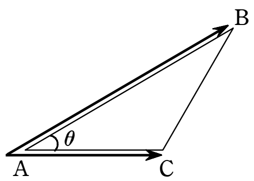
(2)　$\overrightarrow{AB}=(0-1,\ 2-1,\ 2-0)=(-1,\ 1,\ 2)$

$\overrightarrow{AC}=(1-1,\ 2-1,\ 1-0)=(0,\ 1,\ 1)$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1\times0+1\times1+2\times1=3$

また　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$,

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$



よって　$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=30^\circ$

9 次の2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，内積とそのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ 2,\ 1)$, $\vec{b}=(4,\ 4,\ 2)$　　(2)　$\vec{a}=(3,\ 5,\ 2)$, $\vec{b}=(-3,\ 1,\ 2)$

(3)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 3)$, $\vec{b}=(-4,\ -2,\ -6)$　　(4)　$\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ \sqrt{6},\ -1)$

解答　順に

(1)　18, 0°　　(2)　0, 90°　　(3)　-28, 180°　　(4)　$-\sqrt{6}$, 120°

解説

(1)　内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times4+2\times4+1\times2=18$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$

$|\vec{b}|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{18}{3\times6}=1$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=0^\circ$

(2)　内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times(-3)+5\times1+2\times2=0$

よって　$\vec{a}\perp\vec{b}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=90^\circ$

(3)　内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-4)+1\times(-2)+3\times(-6)=-28$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-6)^2}=2\sqrt{14}$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-28}{\sqrt{14}\times2\sqrt{14}}=-1$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=180^\circ$

(4)　内積は　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+(-1)\times\sqrt{6}+1\times(-1)=-\sqrt{6}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{6})^2+(-1)^2}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$