平均変化率•微分係数クイズ

1 真空中で，静止していた物体が，落下し始めてから x 秒間に落ちる距離を y m とすると，y は x の関数で，次の式で与えられる。

$$y=4.9x^2$$

この落下運動において，2 秒後における瞬間の速さを求めよ。

解答　19.6 m/s

解説

a 秒後から b 秒後までの間の平均の速さは

$$\frac{4.9b^2-4.9a^2}{b-a}=4.9(b+a)$$

であるから，2 秒後から b 秒後までの間の平均の速さは

$4.9(b+2)$ m/s　…… ①

2 秒後における瞬間の速さは，① において b を限りなく 2 に近づけたもので

$4.9(2+2)=19.6$　すなわち　19.6 m/s

2 関数 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数 $f'(2)$

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{4h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(4+h)=4$$

解説

3 関数 $f(x)=x^3+2$ の $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ。

解答　3

解説

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\{(1+h)^3+2\}-(1^3+2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(3+3h+h^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(3+3h+h^2)=3$$

4 関数 $f(x)=-x^3+2x^2$ について，次の微分係数を求めよ。

(1)　$f'(0)$　　(2)　$f'(1)$　　(3)　$f'(-3)$

解答　(1)　0　　(2)　1　　(3)　-39

解説

$f'(x)=-3x^2+4x$

(1)　$f'(0)=-3\cdot0^2+4\cdot0=0$

(2)　$f'(1)=-3\cdot1^2+4\cdot1=1$

(3)　$f'(-3)=-3\cdot(-3)^2+4\cdot(-3)=-39$

5 $f(x)=2x^2+3x+1$ について，次の微分係数を求めよ。[各 7 点]

(1)　$f'(1)$　　(2)　$f'(-1)$

解答　$f'(x)=2\cdot2x+3=4x+3$

(1)　$f'(1)=4\cdot1+3=7$

(2)　$f'(-1)=4\cdot(-1)+3=-1$

解説

$f'(x)=2\cdot2x+3=4x+3$

(1)　$f'(1)=4\cdot1+3=7$

(2)　$f'(-1)=4\cdot(-1)+3=-1$

6 (1)　$x=1$ から $x=3$ まで変化するとき，$f(x)=x^3-2x$ の平均変化率を求めよ。

(2)　(1) の $f(x)$ について，微分係数 $f'(1)$ を定義に従って求めよ。

解答　(1)　11　　(2)　1

解説

(1)　$\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(3^3-2\cdot3)-(1^3-2\cdot1)}{2}=\dfrac{21-(-1)}{2}=11$

(2)　$f(1+h)-f(1)=\{(1+h)^3-2(1+h)\}-(1^3-2\cdot1)$

$=1+3h+3h^2+h^3-2-2h-(-1)$

$=h^3+3h^2+h$

よって　$f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^3+3h^2+h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}(h^2+3h+1)=1$

7 (1)　関数 $f(x)=2x^3+3x^2-8x$ について，$x=-2$ における微分係数を求めよ。

(2)　2 次関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$f(1)=-3$，　$f'(1)=-1$，　$f'(0)=3$

(3)　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が $2f(x)=(x+1)f'(x)+6$ を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答　(1)　$f'(-2)=4$　　(2)　$f(x)=-2x^2+3x-4$　　(3)　$a=2$，$b=4$

解説

(1)　$f'(x)=6x^2+6x-8$

したがって　$f'(-2)=6\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)-8=4$

(2)　$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\fallingdotseq0)$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

$f(1)=-3$ から　$a+b+c=-3$

$f'(1)=-1$ から　$2a+b=-1$

$f'(0)=3$ から　$b=3$

これを解いて　$a=-2$，$b=3$，$c=-4$

したがって　$f(x)=-2x^2+3x-4$

(3)　$f(x)=x^2+ax+b$ から　$f'(x)=2x+a$

与えられた等式に代入すると

$$2(x^2+ax+b)=(x+1)(2x+a)+6$$

整理して　$2x^2+2ax+2b=2x^2+(a+2)x+a+6$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較すると

$2a=a+2$，　$2b=a+6$

これを解いて　$a=2$，$b=4$

8 (1)　関数 $f(x)=-x^3+4x^2-2$ について，$x=2$ における微分係数を求めよ。

(2)　2 次関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$f(0)=8$，　$f'(0)=-4$，　$f'(2)=0$

(3)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ について，$3f(x)-xf'(x)=2x+3$ がすべての x の値について成り立つとき，a，b の値を求めよ。ただし a，b は実数の定数とする。

解答　(1)　4　　(2)　$f(x)=x^2-4x+8$　　(3)　$a=0$，$b=1$

解説

(1)　$f'(x)=-3x^2+8x$

したがって　$f'(2)=-3\cdot2^2+8\cdot2=4$

別解　微分係数の定義により　$f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$f(2+h)-f(2)=-(2+h)^3+4(2+h)^2-2-(-2^3+4\cdot2^2-2)$

$=-h^3-2h^2+4h$

よって　$f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-h^3-2h^2+4h}{h}=\lim\limits_{h\to0}(-h^2-2h+4)=4$

(2)　$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\fallingdotseq0)$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

$f(0)=8$ から　$c=8$　$f'(0)=-4$ から　$b=-4$

$f'(2)=0$ から　$4a+b=0$

これを解いて　$a=1$，$b=-4$，$c=8$

したがって　$f(x)=x^2-4x+8$

(3)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ から　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

与えられた等式に代入すると

$$3(x^3+ax^2+bx+1)-x(3x^2+2ax+b)=2x+3$$

整理して　$ax^2+2bx+3=2x+3$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較すると

$a=0$，　$2b=2$　　よって　$a=0$，$b=1$

9 次の関数の与えられた範囲における平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x)=-3x+5$ $(1\leqq x\leqq2)$　　(2)　$f(x)=x^2+3x$ $(-1\leqq x\leqq3)$

(3)　$f(x)=-2x^3$ $(-3\leqq x\leqq1)$　　(4)　$f(x)=x^2-3$ $(a\leqq x\leqq a+1)$

解答　(1)　-3　　(2)　5　　(3)　-14　　(4)　$2a+1$

解説

(1)　$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=-1-2=-3$

(2)　$\dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\dfrac{18-(-2)}{4}=5$

(3)　$\dfrac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=\dfrac{-2-54}{4}=-14$

(4)　$\dfrac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=\{(a+1)^2-3\}-(a^2-3)=2a+1$

$\boxed{10}$ 次の関数の与えられた x の値における微分係数を求めよ。

(1) $f(x)=-x^2+3x-4$，$x=-2$　　(2) $f(x)=2x^3-x^2$，$x=1$

解答 (1) 7　(2) 4

解説

(1) $f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{-(-2+h)^2+3(-2+h)-4\}-(-14)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{7h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(7-h)=7$

(2) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(1+h)^3-(1+h)^2\}-1}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+5h^2+2h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(4+5h+2h^2)=4$

$\boxed{11}$ 次の関数について，与えられた微分係数を求めよ。

(1) $f(x)=-3x^2+2x+4$，$f'(0)$　　(2) $f(x)=x^3-4x+3$，$f'(1)$

解答 (1) 2　(2) -1

解説

(1) $f'(x)=-3\cdot 2x+2=-6x+2$

よって　$f'(0)=-6\cdot 0+2=2$

(2) $f'(x)=3x^2-4$

よって　$f'(1)=3\cdot 1^2-4=-1$

$\boxed{12}$ 次の関数 $f(x)$ について，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めよ。また，$f'(a)$ が，$1\leqq x\leqq 2$ における平均変化率に一致するとき，a の値を求めよ。

(1) $f(x)=x^2-x$　　(2) $f(x)=x^3-x^2+1$

解答 (1) $f'(a)=2a-1$，$a=\frac{3}{2}$　(2) $f'(a)=3a^2-2a$，$a=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$

解説

(1) $f(x)=x^2-x$ から　$f'(x)=2x-1$

よって　$f'(a)=2a-1$

また，$1\leqq x\leqq 2$ における平均変化率は　$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2-0}{1}=2$

よって　$2a-1=2$　ゆえに　$a=\frac{3}{2}$

(2) $f(x)=x^3-x^2+1$ から　$f'(x)=3x^2-2x$

よって　$f'(a)=3a^2-2a$

また，$1\leqq x\leqq 2$ における平均変化率は　$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{5-1}{1}=4$

よって　$3a^2-2a=4$

これを解いて　$a=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$

$\boxed{13}$ x が 1 から 2 まで変化するとき，次の関数の平均変化率を求めよ。

(1) $f(x)=2x^2+x$　　(2) $f(x)=x^3$

解答 (1) 7　(2) 7

解説

(1) 求める平均変化率は　$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=(2\cdot 2^2+2)-(2\cdot 1^2+1)=7$

(2) 求める平均変化率は　$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=2^3-1^3=7$

$\boxed{14}$ 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ が $f(1)=1$，$f'(1)=0$ を満たすとき，定数 a，b の値を求めよ。

解答 $a=-2$，$b=1$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(1)=1$ から　$1+a+b+1=1$　よって　$a+b=-1$ ……①

$f'(1)=0$ から　$3+2a+b=0$　よって　$2a+b=-3$ ……②

①，② を解いて　$a=-2$，$b=1$

$\boxed{15}$ 関数 $f(x)=2x^3+5x^2-3x+7$ について，次の値を求めよ。

(1) $f'(0)$　　(2) $f'(3)$　　(3) $f'(-2)$

解答 (1) -3　(2) 81　(3) 1

解説

$f'(x)=2\cdot 3x^2+5\cdot 2x-3=6x^2+10x-3$

(1) $f'(0)=6\cdot 0^2+10\cdot 0-3=-3$

(2) $f'(3)=6\cdot 3^2+10\cdot 3-3=81$

(3) $f'(-2)=6\cdot(-2)^2+10\cdot(-2)-3=1$

$\boxed{16}$ 次の関数の与えられた x の値の範囲における平均変化率を求めよ。[各 10 点]

(1) $y=3x+1$　$(0\leqq x\leqq 2)$　　(2) $y=x^2-2x+3$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

解答 (1) $f(x)=3x+1$ とおく。

求める平均変化率は　$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{7-1}{2}=3$

(2) $f(x)=x^2-2x+3$ とおく。

求める平均変化率は　$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{3-6}{3}=-1$

解説

(1) $f(x)=3x+1$ とおく。

求める平均変化率は　$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{7-1}{2}=3$

(2) $f(x)=x^2-2x+3$ とおく。

求める平均変化率は　$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{3-6}{3}=-1$

$\boxed{17}$ 定義に従って，次の関数の与えられた x の値における微分係数を求めよ。[各 15 点]

(1) $f(x)=2x+1$　$(x=1)$　　(2) $f(x)=2x^2-x+3$　$(x=2)$

解答 (1) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(1+h)+1\}-3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$

(2) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(2+h)^2-(2+h)+3\}-9}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{7h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(7+2h)=7$

解説

(1) $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(1+h)+1\}-3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$

(2) $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(2+h)^2-(2+h)+3\}-9}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{7h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(7+2h)=7$