垂直クイズ

1 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 6)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 0)$ の両方に垂直で，大きさが3であるベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

解答　$\vec{p}=(-2,\ -2,\ 1)$，$(2,\ 2,\ -1)$

解説

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{p}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{p}=0$

すなわち　$x+2y+6z=0$ ……①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{p}=0$

すなわち　$-x+y=0$ ……②

$|\vec{p}|^2=3^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=9$ ……③

①，②から x，y を z で表して

$x=-2z$，　$y=-2z$

これを③に代入して　$9z^2=9$　　ゆえに　$z=\pm1$

$z=1$ のとき　$x=y=-2$

$z=-1$ のとき　$x=y=2$

よって　$\vec{p}=(-2,\ -2,\ 1)$，$(2,\ 2,\ -1)$

2 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ -1)$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{14}$ であるベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

解答　$\vec{p}=(-3,\ -2,\ 1)$，$(3,\ 2,\ -1)$

解説

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{p}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{p}=0$　すなわち　$x-y+z=0$ ……①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{p}=0$　すなわち　$x-2y-z=0$ ……②

$|\vec{p}|^2=(\sqrt{14})^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=14$ ……③

①，②から x，y を z で表して　$x=-3z$，$y=-2z$

これらを③に代入して　$(-3z)^2+(-2z)^2+z^2=14$　すなわち　$14z^2=14$

ゆえに　$z=\pm1$

$z=1$ のとき　$x=-3$，$y=-2$

$z=-1$ のとき　$x=3$，$y=2$

よって　$\vec{p}=(-3,\ -2,\ 1)$，$(3,\ 2,\ -1)$

3 $\vec{a}=(1,\ 3,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ -2,\ 0)$ と実数 t に対して，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする。$\vec{b}\perp\vec{p}$ となるような t の値を求めよ。また，このときの $|\vec{p}|$ を求めよ。

解答　$t=1$，$|\vec{p}|=3$

解説

$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3,\ -2)+t(1,\ -2,\ 0)=(1+t,\ 3-2t,\ -2)$

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より　$\vec{b}\cdot\vec{p}=0$

よって　$1\times(1+t)+(-2)\times(3-2t)+0\times(-2)=0$

これを解いて　$t=1$

このとき，$\vec{p}=(2,\ 1,\ -2)$ であるから

$|\vec{p}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$

4 次の2つのベクトルが垂直になるように，x，z の値を定めなさい。

(1)　$\vec{a}=(4,\ 1,\ -2)$，$\vec{b}=(x,\ -6,\ 1)$　　(2)　$\vec{a}=(-3,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 6,\ z)$

解答　(1)　$x=2$　　(2)　$z=-3$

解説

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times x+1\times(-6)+(-2)\times1=4x-8$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ から　$4x-8=0$　　よって　$x=2$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\times1+2\times6+3\times z=3z+9$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ から　$3z+9=0$　　よって　$z=-3$

5 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ -2)$，$\vec{b}=(3,\ 4,\ 0)$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{5}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

解答　$\vec{p}=\left(\frac{8}{5},\ -\frac{6}{5},\ 1\right)$，$\left(-\frac{8}{5},\ \frac{6}{5},\ -1\right)$

解説

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ であるから　$2x+y-2z=0$ ……①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$ であるから　$3x+4y=0$ ……②

$|\vec{p}|^2=(\sqrt{5})^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=5$ ……③

①，②から，y，z を x で表すと　$y=-\frac{3}{4}x$，$z=\frac{5}{8}x$

これらを③に代入すると　$x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2+\left(\frac{5}{8}x\right)^2=5$

整理すると　$\frac{125}{64}x^2=5$　すなわち　$x=\pm\frac{8}{5}$

$x=\frac{8}{5}$ のとき　$y=-\frac{6}{5}$，$z=1$

$x=-\frac{8}{5}$ のとき　$y=\frac{6}{5}$，$z=-1$

したがって　$\vec{p}=\left(\frac{8}{5},\ -\frac{6}{5},\ 1\right)$，$\left(-\frac{8}{5},\ \frac{6}{5},\ -1\right)$

6 2つのベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ \sqrt{3},\ 0)$ の両方に垂直で，大きさが $\sqrt{2}$ のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

解答　$\vec{p}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ -1\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$

解説

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ であるから　$\sqrt{3}x+y+2z=0$ ……①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=0$ であるから　$-x+\sqrt{3}y=0$ ……②

$|\vec{p}|^2=(\sqrt{2})^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=2$ ……③

①，②から，y，z を x で表すと　$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$，$z=-\frac{2}{\sqrt{3}}x$

これらを③に代入すると　$x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2=2$

整理すると　$\frac{8}{3}x^2=2$　すなわち　$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$y=\frac{1}{2}$，$z=-1$

$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき　$y=-\frac{1}{2}$，$z=1$

したがって　$\vec{p}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ -1\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$

7 2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$，$\vec{b}=(x,\ -1,\ -2)$ について，$\vec{a}+k\vec{b}$，$\vec{b}+k\vec{a}$ がともに $\vec{a}$ に垂直であるような正の数 k の値を求めよ。

解答　$k=1$

解説

$\vec{a}+k\vec{b}=(1+kx,\ 2-k,\ 3-2k)$，

$\vec{b}+k\vec{a}=(x+k,\ -1+2k,\ -2+3k)$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=0$ から　$1\times(1+kx)+2\times(2-k)+3\times(3-2k)=0$

すなわち　$kx-8k+14=0$ ……①

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+k\vec{a})=0$ から　$1\times(x+k)+2\times(-1+2k)+3\times(-2+3k)=0$

すなわち　$x+14k-8=0$ ……②

①，②から x を消去すると　$k^2=1$

$k>0$ であるから　$k=1$

これを②に代入して　$x=-6$

$k=1$，$x=-6$ のとき，$\vec{a}+k\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{b}+k\vec{a}\neq\vec{0}$ であるから，条件を満たす。

8 2点 A(4，0，5)，B(0，4，1) を通る直線に，原点Oから垂線OHを下ろす。点Hの座標を求めよ。

解答　(1，3，2)

解説

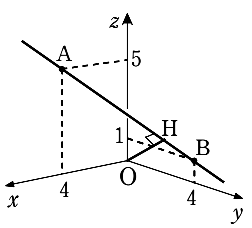
点Hは直線AB上にあるから

$\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB}$

となる実数 t がある。よって

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$

$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$



ここで

$\overrightarrow{OA}=(4,\ 0,\ 5)$

$\overrightarrow{AB}=(-4,\ 4,\ -4)$

であるから

$\overrightarrow{OH}=(4-4t,\ 4t,\ 5-4t)$ ……①

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ であるから

$-4(4-4t)+4\times4t-4(5-4t)=0$

これを解いて　$t=\dfrac{3}{4}$

よって，① から　$\overrightarrow{OH}=(1,\ 3,\ 2)$

したがって，H の座標は　$(1,\ 3,\ 2)$

9 2 点 A$(0,\ 2,\ 5)$，B$(3,\ 5,\ 2)$ を通る直線に，原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

解答　$(1,\ 3,\ 4)$

解説

点 H は直線 AB 上にあるから $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB}$ となる実数 t がある。

よって　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

ここで，$\overrightarrow{OA}=(0,\ 2,\ 5)$，$\overrightarrow{AB}=(3,\ 3,\ -3)$ であるから

$\overrightarrow{OH}=(3t,\ 2+3t,\ 5-3t)$ ……①

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ であるから　$3\times3t+3(2+3t)-3(5-3t)=0$

これを解いて　$t=\dfrac{1}{3}$

よって，① から　$\overrightarrow{OH}=(1,\ 3,\ 4)$

したがって，H の座標は　$(1,\ 3,\ 4)$

10 3 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ -2)$ が定める平面 α に原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。　[25点]

解答　H は平面 α 上の点であるから，$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおくと

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$=(2-2s-2t,\ s,\ -2t)$

$\overrightarrow{OH}\perp\alpha$ であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より　$-2(2-2s-2t)+s=0$

すなわち　$5s+4t-4=0$ ……①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より　$-2(2-2s-2t)+4t=0$

すなわち　$s+2t-1=0$ ……②

①，②から　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

解説

H は平面 α 上の点であるから，$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とおくと

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=(1-s-t)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$=(2-2s-2t,\ s,\ -2t)$

$\overrightarrow{OH}\perp\alpha$ であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より　$-2(2-2s-2t)+s=0$

すなわち　$5s+4t-4=0$ ……①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より　$-2(2-2s-2t)+4t=0$

すなわち　$s+2t-1=0$ ……②

①，②から　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{6}$

したがって　$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

11 2 点 A$(-1,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ 3,\ 5)$ を通る直線を ℓ とする。

(1)　点 C$(4,\ 8,\ 7)$ から直線 ℓ に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(2)　直線 ℓ に関して，C と対称な点 D の座標を求めよ。

解答　(1)　H$(3,\ 6,\ 9)$　(2)　D$(2,\ 4,\ 11)$

解説

(1)　点 H は直線 ℓ 上にあるから，$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CA}+k\overrightarrow{AB}$

$=(-5,\ -8,\ -6)+k(2,\ 3,\ 4)$

$=(2k-5,\ 3k-8,\ 4k-6)$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CH}$ より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$ であるから

$2\times(2k-5)+3\times(3k-8)+4\times(4k-6)=0$

ゆえに　$k=2$

このとき，O を原点とすると

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=(4,\ 8,\ 7)+(-1,\ -2,\ 2)=(3,\ 6,\ 9)$

したがって　H$(3,\ 6,\ 9)$

別解　正射影ベクトルを用いて，次のように解くこともできる。

$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3,\ 4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,\ 8,\ 6)$ であるから

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{58}{29}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}$

$=(-1,\ 0,\ 1)+2(2,\ 3,\ 4)=(3,\ 6,\ 9)$

よって　H$(3,\ 6,\ 9)$

(2)　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CH}$

$=(4,\ 8,\ 7)+2(-1,\ -2,\ 2)=(2,\ 4,\ 11)$

したがって　D$(2,\ 4,\ 11)$

12 2 点 A$(-5,\ -2,\ 2)$，B$(-3,\ -1,\ 1)$ を通る直線を ℓ とする。

(1)　点 P$(4,\ 4,\ 2)$ から直線 ℓ に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(2)　直線 ℓ に関して，P と対称な点 Q の座標を求めよ。

解答　(1)　H$(3,\ 2,\ -2)$　(2)　Q$(2,\ 0,\ -6)$

解説

(1)　点 H は直線 ℓ 上にあるから，$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

よって　$\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{PA}+k\overrightarrow{AB}$

$=(-9,\ -6,\ 0)+k(2,\ 1,\ -1)$

$=(2k-9,\ k-6,\ -k)$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{PH}$ より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PH}=0$ であるから

$2(2k-9)+1\times(k-6)-1\times(-k)=0$　ゆえに　$k=4$

このとき，O を原点とすると

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PH}=(4,\ 4,\ 2)+(-1,\ -2,\ -4)=(3,\ 2,\ -2)$

したがって　H$(3,\ 2,\ -2)$

別解　$\overrightarrow{AP}=(9,\ 6,\ 0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 1,\ -1)$ であるから

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=9\times2+6\times1+0\times(-1)=24$

よって　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{24}{6}(2,\ 1,\ -1)=(8,\ 4,\ -4)$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=(-5,\ -2,\ 2)+(8,\ 4,\ -4)$

$=(3,\ 2,\ -2)$

したがって　H$(3,\ 2,\ -2)$

(2)　$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}=(4,\ 4,\ 2)+2(-1,\ -2,\ -4)$

$=(2,\ 0,\ -6)$

したがって　Q$(2,\ 0,\ -6)$

別解　Q$(x,\ y,\ z)$ とすると，線分 PQ の中点は

点$\left(\dfrac{x+4}{2},\ \dfrac{y+4}{2},\ \dfrac{z+2}{2}\right)$

これが点 H と一致するから　$\dfrac{x+4}{2}=3$，$\dfrac{y+4}{2}=2$，$\dfrac{z+2}{2}=-2$

よって　$x=2$，$y=0$，$z=-6$　ゆえに　Q$(2,\ 0,\ -6)$

参考　(1) の結果を使わずに (2) を解く場合の解答例。

Q$(x,\ y,\ z)$ とすると　$\overrightarrow{PQ}=(x-4,\ y-4,\ z-2)$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{PQ}$ より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$ であるから

$2\times(x-4)+1\times(y-4)-1\times(z-2)=0$

ゆえに　$2x+y-z=10$ ……①

線分 PQ の中点$\left(\dfrac{x+4}{2},\ \dfrac{y+4}{2},\ \dfrac{z+2}{2}\right)$を R とすると，点 R は直線 ℓ 上にあるから，$\overrightarrow{AR}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

よって　$\left(\dfrac{x+14}{2},\ \dfrac{y+8}{2},\ \dfrac{z-2}{2}\right)=k(2,\ 1,\ -1)$

ゆえに　$x=4k-14$，$y=2k-8$，$z=-2k+2$

これらを ① に代入して　$2(4k-14)+(2k-8)-(-2k+2)=10$

よって　$k=4$　ゆえに　$x=2$，$y=0$，$z=-6$

したがって　Q$(2,\ 0,\ -6)$

13 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ を通る平面を α とし，原点 O から平面 α に下ろした垂線の足を H とする。

(1)　点 H の座標を求めよ。　(2)　△ABC の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$\mathrm{H}\left(\dfrac{36}{49},\ \dfrac{18}{49},\ \dfrac{12}{49}\right)$　(2)　$S=\dfrac{7}{2}$

解説

(1) 点 H は平面 α 上にあるから，s，t，u を実数として

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\ s+t+u=1$$

と表される。

よって　$\overrightarrow{OH}=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ 3)$
$=(s,\ 2t,\ 3u)$

また　$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 3)$

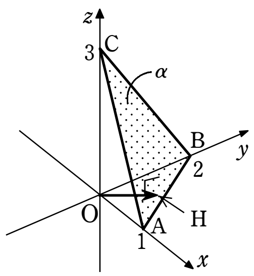
OH⊥(平面 α) であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=-s+4t=0$，

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=-s+9u=0$

よって，$t=\frac{1}{4}s$，$u=\frac{1}{9}s$ で $s+t+u=1$ から　$s=\frac{36}{49}$

したがって　$H\left(\frac{36}{49},\ \frac{18}{49},\ \frac{12}{49}\right)$



(2) 四面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle OAB\times OC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times3=1$$

また　$OH=|\overrightarrow{OH}|=\frac{6}{49}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\frac{6}{7}$

よって，$V=\frac{1}{3}S\times OH$ から　$S=\frac{3V}{OH}=3\times1\times\frac{7}{6}=\frac{7}{2}$

14 原点を O とし，3 点 A(2，0，0)，B(0，4，0)，C(0，0，3) をとる。原点 O から 3 点 A，B，C を含む平面に下ろした垂線の足を H とするとき

(1) 点 H の座標を求めよ。　　(2) △ABC の面積を求めよ。

解答　(1) $H\left(\frac{72}{61},\ \frac{36}{61},\ \frac{48}{61}\right)$　(2) $\sqrt{61}$

解説

(1) H は平面 ABC 上にあり，4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，s，t，u を実数として

$$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\quad s+t+u=1\ \cdots\cdots ①$$

と表される。

よって　$\overrightarrow{OH}=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 4,\ 0)+u(0,\ 0,\ 3)=(2s,\ 4t,\ 3u)$

また，OH⊥(平面 ABC) であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ …… ②

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 3)$ であるから，② より

$2s\times(-2)+4t\times4+3u\times0=0$，$2s\times(-2)+4t\times0+3u\times3=0$

よって　$t=\frac{1}{4}s$，$u=\frac{4}{9}s$ …… ③

③ を ① に代入して　$s+\frac{1}{4}s+\frac{4}{9}s=1$

これを解いて　$s=\frac{36}{61}$　③ に代入して　$t=\frac{9}{61}$，$u=\frac{16}{61}$

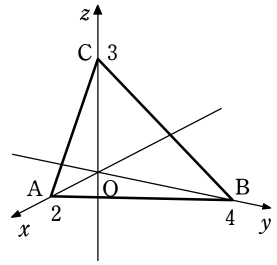
ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{72}{61},\ \frac{36}{61},\ \frac{48}{61}\right)$

したがって　$H\left(\frac{72}{61},\ \frac{36}{61},\ \frac{48}{61}\right)$

(2) 四面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle OAB\times OC$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\cdot3=4\ \cdots\cdots ④$$

また　$V=\frac{1}{3}\triangle ABC\times OH$ …… ⑤



ここで，(1) から

$$OH=\frac{12}{61}\sqrt{6^2+3^2+4^2}=\frac{12}{\sqrt{61}}$$

よって，④，⑤ から　$4=\frac{1}{3}\triangle ABC\times\frac{12}{\sqrt{61}}$

したがって　$\triangle ABC=\sqrt{61}$

別解　$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 3)$ であるから

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-2)+4\times0+0\times3=4$

$|\overrightarrow{AB}|^2=(-2)^2+4^2+0^2=20$，　$|\overrightarrow{AC}|^2=(-2)^2+0^2+3^2=13$

よって　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{20\cdot13-4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{244}=\sqrt{61}$$

15 ∠AOB＝∠AOC＝60°，∠BOC＝90°，OB＝OC＝1，OA＝2 である四面体 OABC において，頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線 OH の長さを求めよ。

解答　$\frac{\sqrt{10}}{5}$

解説

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

H は平面 ABC 上にあるから，s，t，u を実数として

$$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c},\ s+t+u=1$$

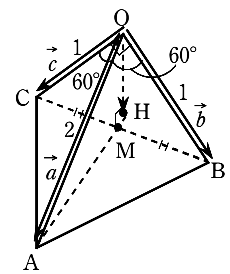
と表される。OH⊥(平面 ABC) から

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であるから

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ …… ①

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$ …… ②



ここで　$|\vec{a}|^2=4$，$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=1$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1\times\cos60°=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$

① から　$-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$3s+u=0$ …… ③

同様に，② から　$3s+t=0$ …… ④

③，④ および $s+t+u=1$ を解いて　$s=-\frac{1}{5}$，$t=\frac{3}{5}$，$u=\frac{3}{5}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=-\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$

よって　$5^2|\overrightarrow{OH}|^2=|-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{c}-6\vec{c}\cdot\vec{a}$
$=4+9\times1+9\times1-6\times1+18\times0-6\times1=10$

ゆえに　$|\overrightarrow{OH}|=\frac{\sqrt{10}}{5}$　　したがって　$OH=\frac{\sqrt{10}}{5}$

16 四面体 OABC において，OA＝OB＝OC＝1 とする。∠AOB＝60°，∠BOC＝45°，∠COA＝45° とし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく。点 C から平面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。　(2) 垂線 CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

解答　(1) $\overrightarrow{OH}=\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$　(2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　(3) $\frac{1}{12}$

解説

(1) 点 H は平面 OAB 上にあるから，s，t を実数として

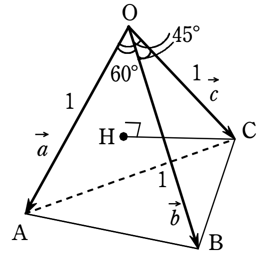
$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ と表される。

よって　$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

また　$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°=\frac{1}{2}$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

すなわち　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

よって　$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　　ゆえに　$s\cdot1^2+t\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

すなわち　$2s+t=\sqrt{2}$ …… ①

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ であるから　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

すなわち　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

よって　$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　ゆえに　$s\cdot\frac{1}{2}+t\cdot1^2-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

すなわち　$s+2t=\sqrt{2}$ …… ②

①，② を解いて　$s=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$t=\frac{\sqrt{2}}{3}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2) (1) から　$|\overrightarrow{OH}|^2=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a}+\vec{b})\right|^2=\frac{2}{9}(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$

$$=\frac{2}{9}\left(1^2+2\cdot\frac{1}{2}+1^2\right)=\frac{2}{3}$$

よって，直角三角形 OCH において三平方の定理により

$$CH^2=OC^2-OH^2=|\vec{c}|^2-|\overrightarrow{OH}|^2=1^2-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

したがって　$CH=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\triangle OAB=\frac{1}{2}OA\times OB\times\sin60°=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

よって，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle OAB\times CH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}$$

17 四面体 OABC の 4 つの面はすべて合同で，$OA=\sqrt{10}$，

O

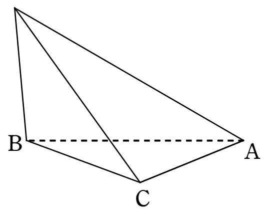
OB$=2$, OC$=3$ であるとする。このとき，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ア$\boxed{}$ であり，三角形 ABC の面積は

イ$\boxed{}$ である。また，3 点 A，B，C を通る平面を α

とし，点 O から平面 α に垂線 OH を下ろすと，$\overrightarrow{AH}$ は

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて $\overrightarrow{AH}=$ ウ$\boxed{}$ と表される。



解答 （ア） $\dfrac{3}{2}$ （イ） $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ （ウ） $\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

解説

四面体 OABC の 4 つの面は合同で，OA$=\sqrt{10}$，OB$=2$，OC$=3$ であるから

$$AB=3,\ BC=\sqrt{10},\ CA=2$$

このとき　$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}=$ ア $\dfrac{3}{2}$

同様に　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{15}{2}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{5}{2}$

三角形 ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{36-\dfrac{9}{4}}=$ イ $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

H は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s，t が存在する。

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{AO}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$

直線 OH は平面 α と垂直であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ここで　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(-\overrightarrow{AO}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{15}{2}+9s+\dfrac{3}{2}t$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=(-\overrightarrow{AO}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}s+4t$

ゆえに　$9s+\dfrac{3}{2}t-\dfrac{15}{2}=0$，$\dfrac{3}{2}s+4t-\dfrac{5}{2}=0$

これを解くと　$s=\dfrac{7}{9}$，$t=\dfrac{1}{3}$

したがって　$\overrightarrow{AH}=$ ウ $\dfrac{7}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

18 各辺の長さが 1 の正四面体 PABC において，A から 平面 PBC に下ろした垂線の足を H とし，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。　(2) $\overrightarrow{PH}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 正四面体 PABC の体積を求めよ。

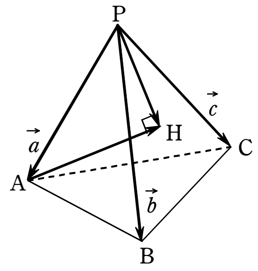
解答 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$　(2) $\overrightarrow{PH}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle APB=1\times1\times\cos60°=\dfrac{1}{2}$

同様にして　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$

(2) 平面 PBC において，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ であるから，s，t を実数として，$\overrightarrow{PH}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。



ゆえに　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{PH}-\overrightarrow{PA}=s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{a}$

AH⊥(平面 PBC) であるから

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{PC}$

よって　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PC}=0$

ここで　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PB}=(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{b}$

$=-\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=-\dfrac{1}{2}+s+\dfrac{1}{2}t$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PC}=(-\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{c}+s\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2$

$=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}s+t$

ゆえに　$2s+t-1=0$，$s+2t-1=0$　これを解いて　$s=t=\dfrac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{PH}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(3) 三平方の定理により

$|\overrightarrow{AH}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PH}|^2=1^2-\left|\dfrac{1}{3}(\vec{b}+\vec{c})\right|^2$

$=1-\dfrac{1}{9}(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)$

$=1-\dfrac{1}{9}\left(1^2+2\times\dfrac{1}{2}+1^2\right)=\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　また　$\triangle PBC=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

したがって，求める体積は

$\dfrac{1}{3}\times\triangle PBC\times|\overrightarrow{AH}|=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

19 3 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 4,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 6)$ を通る平面を α とし，原点 O から平面 α に下ろした垂線と α の交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

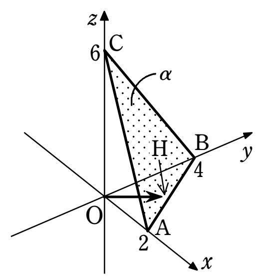
解答 H$\left(\dfrac{72}{49},\ \dfrac{36}{49},\ \dfrac{24}{49}\right)$

解説

点 H は平面 α 上にあるから，s，t，u を実数として

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$

と表される。



よって　$\overrightarrow{OH}=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 4,\ 0)+u(0,\ 0,\ 6)$

$=(2s,\ 4t,\ 6u)$

また　$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 6)$

OH⊥(平面α) であるから　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ から　$2s\times(-2)+4t\times4+6u\times0=0$

すなわち　$-4s+16t=0$ ……①

また，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ から　$2s\times(-2)+4t\times0+6u\times6=0$

すなわち　$-4s+36u=0$ ……②

①，② から　$t=\dfrac{s}{4}$，$u=\dfrac{s}{9}$

$s+t+u=1$ に代入して　$s+\dfrac{s}{4}+\dfrac{s}{9}=1$

ゆえに　$s=\dfrac{36}{49}$　よって　$t=\dfrac{9}{49}$，$u=\dfrac{4}{49}$

このとき　$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{72}{49},\ \dfrac{36}{49},\ \dfrac{24}{49}\right)$

したがって　H$\left(\dfrac{72}{49},\ \dfrac{36}{49},\ \dfrac{24}{49}\right)$

20 $\angle AOB=\angle BOC=45°$，$\angle AOC=60°$，OA$=OC=1$，OB$=\sqrt{2}$ である四面体 OABC において，頂点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。垂線 OH の長さを求めよ。

解答 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

解説

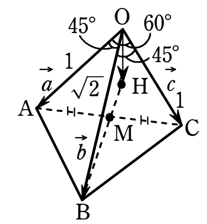
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

点 H は平面 ABC 上にあるから，s，t，u を実数として

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$

と表される。OH⊥(平面 ABC) から

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$



よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ ……①

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$ ……②

ここで　$|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2=1$，$|\vec{b}|^2=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times\sqrt{2}\times\cos45°=1$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\sqrt{2}\times1\times\cos45°=1$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times1\times\cos60°=\dfrac{1}{2}$

① から　$-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$t+\dfrac{1}{2}u=0$ ……③

② から　$-s|\vec{a}|^2+u|\vec{c}|^2+(s-u)\vec{a}\cdot\vec{c}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって　$s-u=0$ ……④

③，④ および $s+t+u=1$ を解いて　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=-\dfrac{1}{3}$，$u=\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

よって　$|\overrightarrow{OH}|^2=\dfrac{1}{9}|2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}|^2=\dfrac{1}{9}(4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{c}+8\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\dfrac{1}{9}\left(4\times1+2+4\times1-4\times1-4\times1+8\times\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$

$|\overrightarrow{OH}|\geqq0$ であるから　OH$=|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

21 (1) 点 A$(2,\ 3,\ 1)$ を通り，$\vec{d}=(-1,\ -2,\ 2)$ に平行な直線 ℓ に，原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

(2) 2 点 A$(3,\ -1,\ 2)$，B$(1,\ -2,\ 3)$ を通る直線と xy 平面との交点の座標を求めよ。

解答 (1) $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)$　(2) $(7,\ 1,\ 0)$

解説

(1) 点 H は直線 ℓ 上にあるから，t を媒介変数とすると

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$

と表される。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 3,\ 1)$，$\vec{d}=(-1,\ -2,\ 2)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ 3,\ 1)+t(-1,\ -2,\ 2)=(2-t,\ 3-2t,\ 1+2t)$$

また，OH は直線 ℓ への垂線であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\vec{d}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{d}=0$

ゆえに　$(2-t)\times(-1)+(3-2t)\times(-2)+(1+2t)\times 2=0$

これを解いて　$t=\dfrac{2}{3}$　　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)$

したがって，点 H の座標は　$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{7}{3}\right)$

(2)　直線 AB 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，t を媒介変数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3-2t,\ -1-t,\ 2+t)$$

点 P が xy 平面上にあるとき，P の z 座標は 0 であるから　$2+t=0$

よって　$t=-2$　　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(7,\ 1,\ 0)$

したがって，求める座標は　$(7,\ 1,\ 0)$

$\boxed{22}$ (1)　点 $\mathrm{A}(2,\ -1,\ 0)$ を通り，$\vec{d}=(-2,\ 1,\ 2)$ に平行な直線 ℓ に，原点 O から垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

(2)　2 点 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{B}(-2,\ -3,\ 2)$ を通る直線と，xy 平面，yz 平面，zx 平面との交点の座標をそれぞれ求めよ。

解答　(1)　$\left(\dfrac{8}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{10}{9}\right)$

(2)　順に，$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{7}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\left(\dfrac{7}{4},\ 0,\ -\dfrac{1}{4}\right)$

解説

(1)　点 H は直線 ℓ 上にあるから，t を媒介変数とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$ と表される。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ -1,\ 0)$，$\vec{d}=(-2,\ 1,\ 2)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ -1,\ 0)+t(-2,\ 1,\ 2)=(2-2t,\ -1+t,\ 2t)$$

また，OH は直線 ℓ への垂線であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\vec{d}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{d}=0$

ゆえに　$(2-2t)\times(-2)+(-1+t)\times 1+2t\times 2=0$

これを解いて　$t=\dfrac{5}{9}$　　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{8}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{10}{9}\right)$

したがって，点 H の座標は　$\left(\dfrac{8}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{10}{9}\right)$

(2)　直線 AB 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，t を媒介変数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3-5t,\ 1-4t,\ -1+3t)$$

点 P が xy 平面上にあるとき，P の z 座標は 0 であるから　$-1+3t=0$

よって　$t=\dfrac{1}{3}$　　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

したがって，xy 平面との交点の座標は　$\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

点 P が yz 平面上にあるとき，P の x 座標は 0 であるから　$3-5t=0$

よって　$t=\dfrac{3}{5}$　　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(0,\ -\dfrac{7}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

したがって，yz 平面との交点の座標は　$\left(0,\ -\dfrac{7}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

点 P が zx 平面上にあるとき，P の y 座標は 0 であるから　$1-4t=0$

よって　$t=\dfrac{1}{4}$　　このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\dfrac{7}{4},\ 0,\ -\dfrac{1}{4}\right)$

したがって，zx 平面との交点の座標は　$\left(\dfrac{7}{4},\ 0,\ -\dfrac{1}{4}\right)$